Module 2
Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

Analyse
Statisch bepaalde constructie. Uitwendig evenwicht te bepalen met evenwichtsvoorwaarden. Daarna op de gevraagde plaatsen een denkbeeldige snede aanbrengen en met de evenwichtsvoorwaarden de snedekrachten berekenen. De schuine kracht eerst ontbinden in een horizontale en een verticale kracht.

Ontbinden

$$F_{\text{vert.}} = F_{\text{hor.}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5{,}66 \text{ kN}$$

Evenwicht
Voor het invullen van de evenwichtsvoorwaarden moeten de richtingen van de reactiekrachten worden aangenomen. Intuïtief nemen we de verticale krachten naar boven aan en de horizontale kracht naar links.

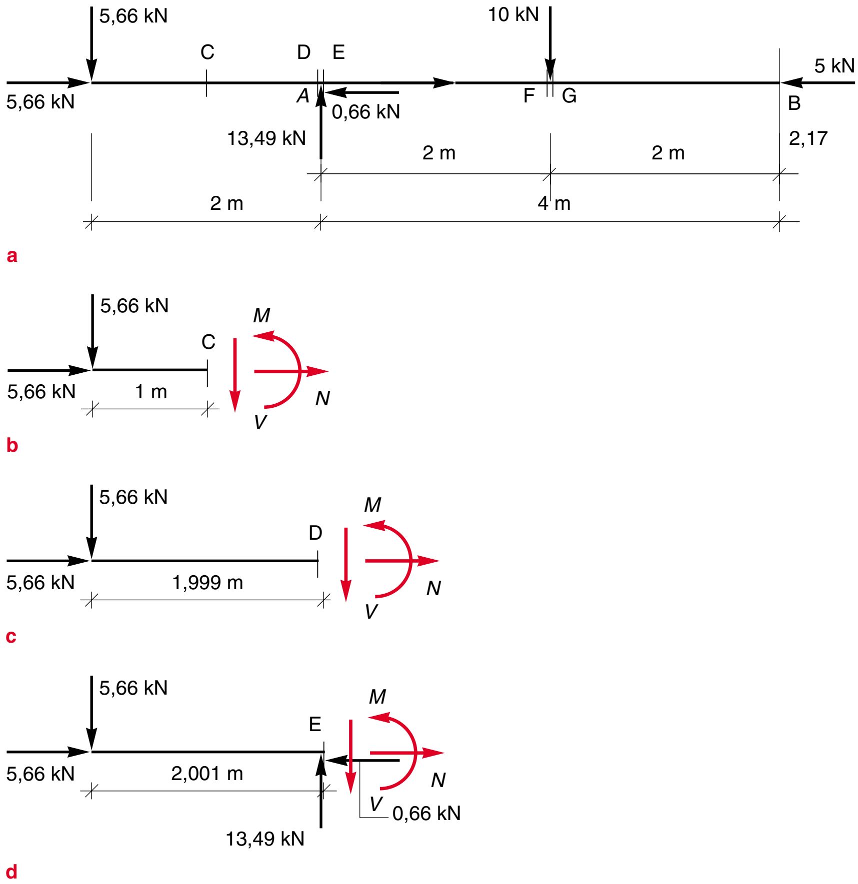
$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - A_H - 5 = 0 \;\Rightarrow\; A_H = 0{,}66 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(A)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + B_V \cdot 4 = 0$$
$$\Rightarrow\; B_V = 2{,}17 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 + 10 - 2{,}17 - A_V = 0 \;\Rightarrow\; A_V = 13{,}49 \text{ kN}$$

Alle antwoorden zijn positief, dus de aangenomen richtingen zijn juist.

Snedekrachten
In figuur 2.1 staan de figuren behorende bij de berekeningen.



Figuur 2.1

a Snedekrachten in snede C (zie figuur 2.1b).
Snedekrachten worden aangenomen in de positieve richting.

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 + V_{(C)} = 0 \;\Rightarrow\; V_{(C)} = -5{,}66 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 + N_{(C)} = 0 \;\Rightarrow\; N_{(C)} = -5{,}66 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(C)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 1 + M_{(C)} = 0$$

$$M_{(C)} = -5{,}66 \text{ kNm}$$

b Snedekrachten in snede D (zie figuur 2.1c)

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 + V_{(D)} = 0 \;\Rightarrow\; V_{(C)} = -5{,}66 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 + N_{(D)} = 0 \;\Rightarrow\; N_{(C)} = -5{,}66 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(D)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 1{,}999 + M_{(D)} = 0$$
$$\Rightarrow\; M_{(D)} = -11{,}31 \text{ kNm}$$

Snedekrachten in snede E (zie figuur 2.1d)

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 13{,}49 + V_{(E)} = 0 \;\Rightarrow\; V_{(E)} = 7{,}83 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 0{,}66 + N_{(E)} = 0$$

$$N_{(C)} = -5{,}00 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(C)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 2{,}001 - 13{,}49 \cdot 0{,}001 + M_{(E)} = 0$$
$$\Rightarrow\; M_{(E)} = -11{,}31 \text{ kNm}$$

c Snedekrachten in snede F
De maten kunnen afgelezen worden in figuur 2.1a.

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 13{,}49 + V_{(F)} = 0 \;\Rightarrow\; V_{(F)} = 7{,}83 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 0{,}66 + N_{(F)} = 0$$

$$N_{(F)} = -5{,}00 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(F)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 3{,}999 - 13{,}49 \cdot 1{,}999 + M_{(F)} = 0$$
$$\Rightarrow\; M_{(F)} = 4{,}34 \text{ kNm}$$

Snedekrachten in snede G

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 13{,}49 + 10 + V_{(G)} = 0$$
$$\Rightarrow\; V_{(G)} = -2{,}17 \text{ kN}$$

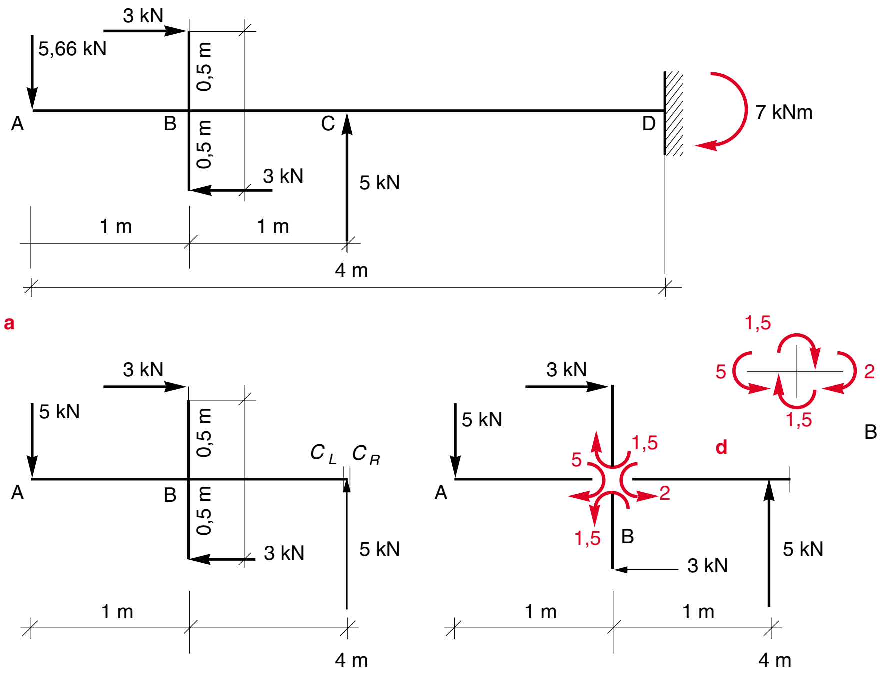
$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 - 0{,}66 + N_{(G)} = 0$$

$$N_{(G)} = -5{,}00 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(G)} = 0 \;\rightarrow\; 5{,}66 \cdot 4{,}001 - 13{,}49 \cdot 2{,}001 + 10 \cdot 0{,}001$$
$$+ M_{(G)} = 0 \;\Rightarrow\; M_{(G)} = 4{,}34 \text{ kNm}$$

Opdracht 2

Analyse
De constructie is een uitkraging in punt D. De delen AB, BE en BF zijn elk weer uitkragingen in B. De constructie is statisch bepaald. Voor het beantwoorden van de vragen is het niet noodzakelijk om de reactiekrachten te berekenen, maar het is een goede gewoonte om te controleren of er uitwendig evenwicht bestaat.



Figuur 2.2

Uitwendig evenwicht

$$\sum F_{\mathrm{H}} = 0 \;\rightarrow\; 3 - 3 + D_{\mathrm{H}} = 0 \;\rightarrow\; D_{\mathrm{H}} = 0$$

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; 5 - 5 + D_{\mathrm{T}} = 0 \;\rightarrow\; D_{\mathrm{T}} = 0$$

$$\sum T_{(\mathrm{D})} = 0 \;\rightarrow\; 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 0{,}5 - 3 \cdot 0{,}5 + D_{\mathrm{T}} = 0 \;\rightarrow\; D_{\mathrm{T}} = -7 \text{ kNm}.$$

In figuur 2.2.a is het reactiemoment in de juiste richting ingetekend.

a In punt C staat een kracht. Links en rechts van de kracht is de dwarskracht verschillend (figuur 2.2.b).
In $\mathrm{C_L}$: $\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; 5 + V_{\mathrm{C,L}} = 0 \;\rightarrow\; V_{\mathrm{C,L}} = -5$ kN
In $\mathrm{C_R}$: $\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; 5 - 5 + V_{\mathrm{C,R}} = 0 \;\rightarrow\; V_{\mathrm{C,R}} = 0$ kN

De normaalkracht wordt niet beïnvloed door de kracht in C.

$$\sum F_{\mathrm{H}} = 0 \;\rightarrow\; -3 + 3 + H_{\mathrm{C}} = 0 \;\rightarrow\; H_{\mathrm{C}} = 0 \text{ kN}$$

Het moment in C:

$$\sum T_{(C)} = 0 \;\rightarrow\; 5 \cdot 2 - 3 \cdot 0{,}5 - 3 \cdot 0{,}5 + M_C = 0$$
$$\rightarrow\; M_C = -7 \text{ kNm}$$

b In figuur 2.2.c zijn de sneden aangegeven nabij punt B met de in de staven werkende momenten. Deze kunnen eenvoudig uit het evenwicht van de betreffende staafdelen worden berekend.

c In figuur 2.2.d is punt B getekend met de momenten zoals die op het punt werken. Merk op dat deze tegengesteld gericht zijn aan de momenten die op de aansluitende staven werken. De som van de momenten is nul, zodat de knoop in evenwicht is.

Opdracht 3

Analyse
De constructie is statisch bepaald. Alle reactiekrachten bevinden zich in punt A. Deze kunnen berekend worden met behulp van de evenwichtsvoorwaarden. Uit de richting van de actiekrachten kan direct de richting van de reactiekrachten worden afgeleid. In figuur 2.3a zijn de grootte en richting van de reactiekrachten ingetekend.

a In figuur 2.3b is een snede getekend juist boven de inklemming in punt A. Om evenwicht te maken dienen de inwendige krachten even groot maar tegengesteld te zijn aan de reactiekrachten.
b De snede juist onder punt B is getekend in figuur 2.3c. De richting van het moment is niet zonder meer af te leiden zonder berekening. Er dienen dus richtingen te worden aangenomen. De aangenomen richtingen zijn in de figuur getekend.

$$\sum F_V = 0 \;\rightarrow\; N_{B,\text{onder}} + 300 = 0 \;\rightarrow\; N_{B,\text{onder}} = -300 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \;\rightarrow\; V_{B,\text{onder}} - 70 = 0 \;\rightarrow\; V_{B,\text{onder}} = 70 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(B)} = 0 \;\rightarrow\; M_{B,\text{onder}} + 490 - 70 \cdot 4$$
$$= 0 \;\rightarrow\; M_{B,\text{onder}} = -210 \text{ kNm}$$

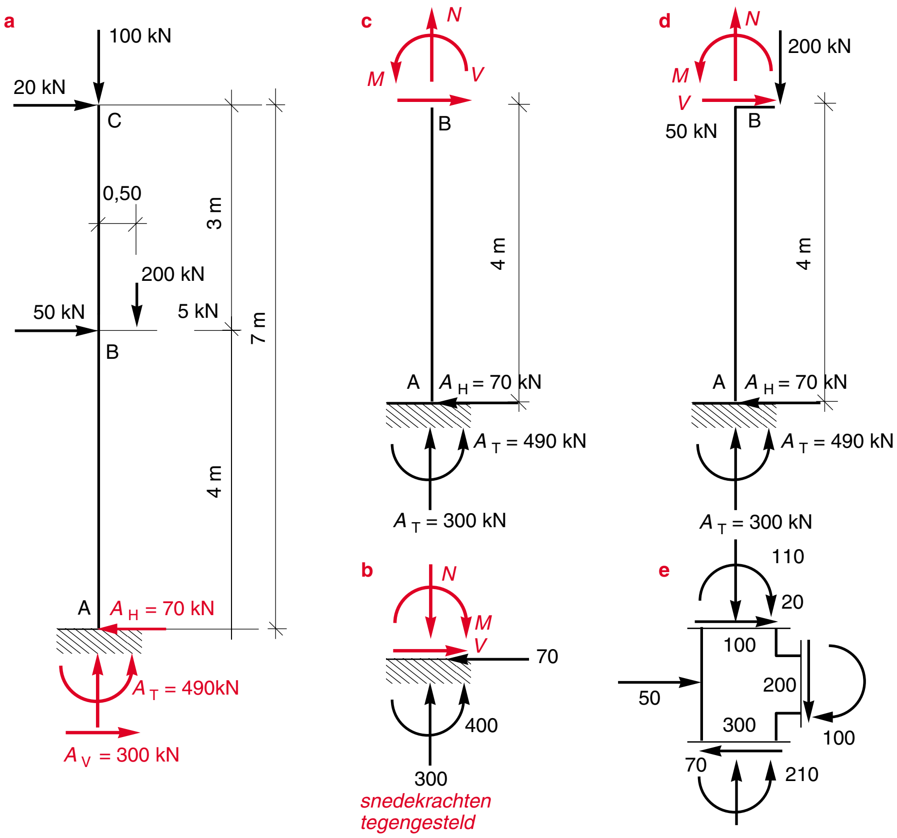
Uit de tekens van de antwoorden blijkt dat de richting van de dwarskracht en het moment verkeerd zijn aangenomen. De dwarskracht naar rechts op de getekende snede, en het moment met de klok mee. De snede juist boven B is getekend in figuur 2.3d. Nu werken in B de horizontale kracht van 50 kN en op de console de verticale kracht van 200 kN.

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{B,\text{boven}} + 300 - 200 = 0 \rightarrow$$
$$N_{B,\text{boven}} = -100 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow V_{B,\text{boven}} - 70 + 50 = 0 \rightarrow V_{B,\text{boven}} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum T_{(B)} = 0 \rightarrow M_{B,\text{boven}} + 490 - 70 \cdot 4 - 200 \cdot 0{,}5 = 0$$
$$\rightarrow M_{B,\text{boven}} = -110 \text{ kNm}$$

c Knoop B met alle erop werkende krachten is getekend in figuur 2.3e. Controle leert dat de knoop in evenwicht verkeert.

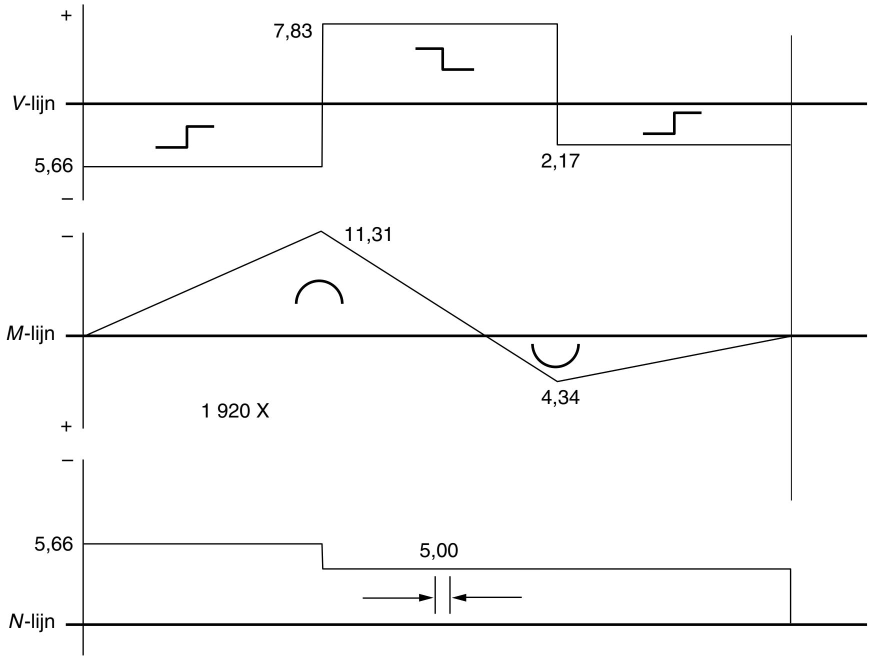


Figuur 2.3

Opdracht 4

Voor de berekening zie opdracht 1.

De gevraagde grafieken zijn afgebeeld in figuur 4.

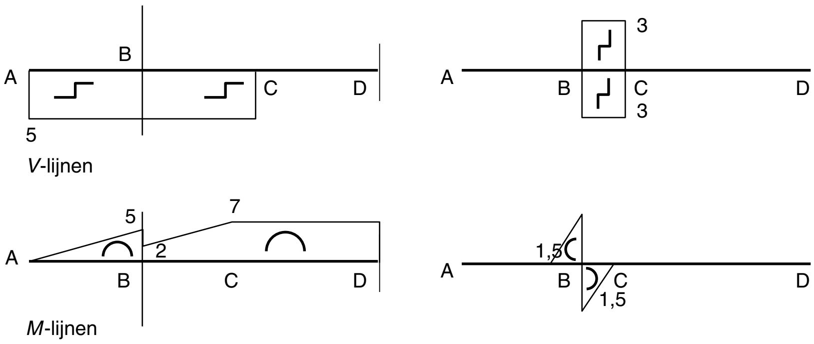


Figuur 2.4

Opdracht 5

Zie opdracht 2 voor de berekening.

De gevraagde grafieken zijn getekend in figuur 5.

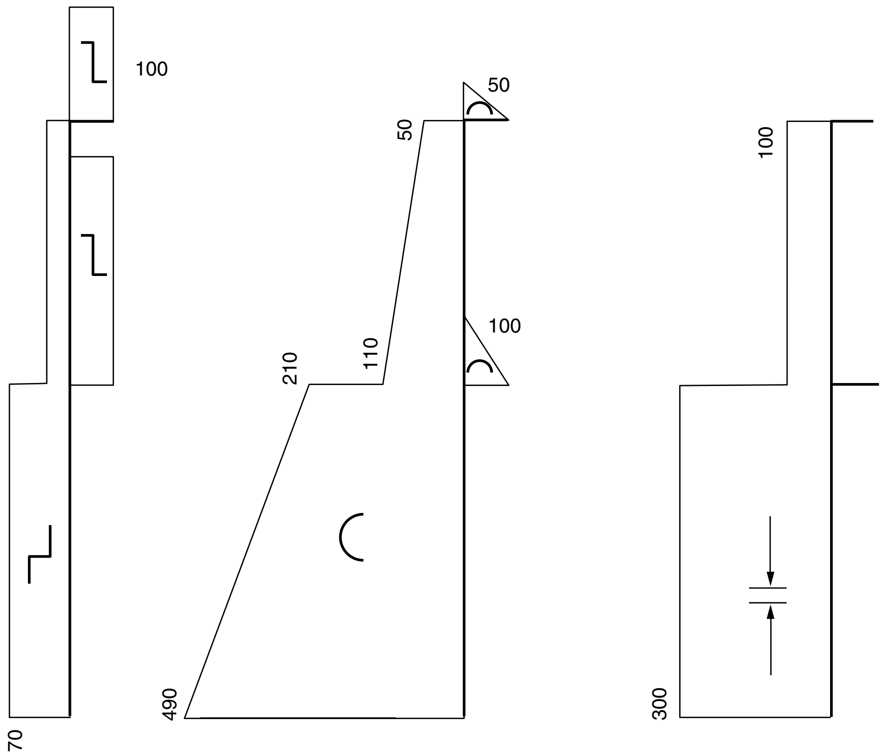


Figuur 2.5

Opdracht 6

Zie opdracht 3 voor de berekening.

De gevraagde grafieken zijn getekend in figuur 6.

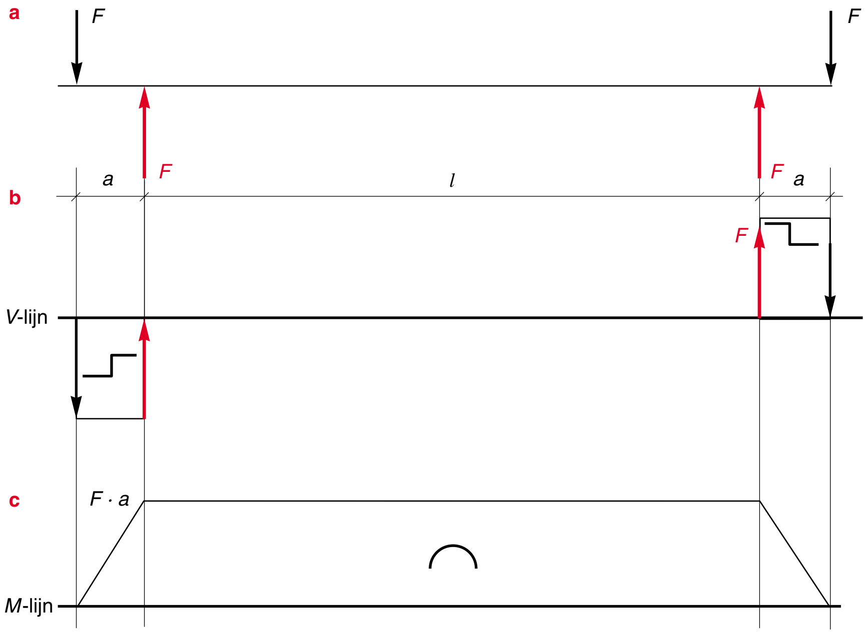


Figuur 2.6

Opdracht 7

Analyse
De constructie is statisch bepaald. Er is geen horizontale belasting, dus is de horizontale reactiekracht in A ook nul. De constructie is nu symmetrisch, en ook de belasting is symmetrisch. Beide verticale reactiekrachten zijn dus gelijk aan de kracht F. In figuur 2.7a is de ligger weergegeven waarbij de opleggingen vervangen zijn door de reactiekrachten.
De dwarskrachtenlijn kan nu getekend worden door de belasting te 'volgen'.(zie figuur 2.7b).
De momentenlijn bestaat uit lineaire functies, omdat er alleen puntlasten op de ligger staan en geen verdeelde belasting. De momentenlijn vertoont een knik ter plaatse van een puntlast. Aan de einden van de ligger is het moment nul. De verandering van het moment is gelijk aan de oppervlakte tussen de dwarskrachtenlijn en de nullijn over betreffende liggerdeel. Tussen het eind van de ligger en de oplegging is de oppervlakte van de dwarskrachtenfiguur: $F \cdot a$. Het moment ter plaatse van de opleggingen is dus ook: $F \cdot a$. Bij buiging is de bolle

zijde van de ligger naar boven gericht, dus de momentenlijn wordt boven de nullijn getekend (figuur 2.7c).



Figuur 2.7

Opdracht 8

Analyse
De constructie is symmetrisch. De reactiekrachten zijn gelijk, met grootte: $0{,}5 \cdot F$ (figuur 2.8).
De dwarskrachtenlijn kan nu getekend worden.
Links van het midden geldt:

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} \cdot F + V(x) = 0 \;\rightarrow\; V(x) = \frac{1}{2} F$$

$$\sum T_{(\mathrm{X})} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} F \cdot x + M(x) = 0 \;\rightarrow\; M(x) = \frac{1}{2} F \cdot x$$

Rechts van het midden geldt:

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} \cdot F + F + V(x) = 0 \;\rightarrow\; V(x) = -\frac{1}{2} F$$

$$\sum T_{(\mathrm{X})} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} F \cdot x + F \cdot \left(x - \frac{1}{2} l\right) + M(x) = 0$$

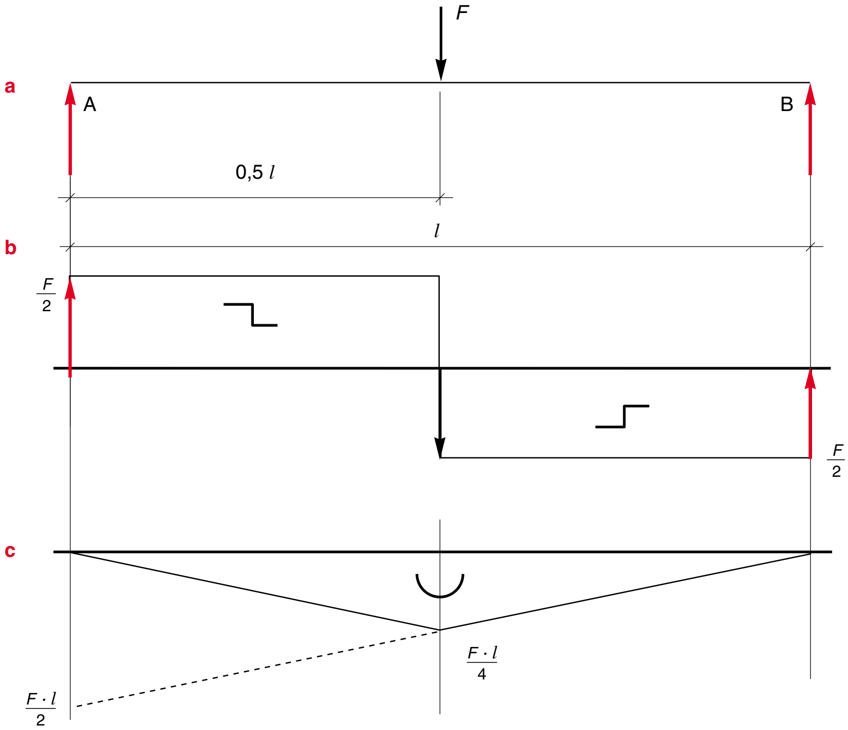
$$\rightarrow\; M(x) = F \cdot \left(-\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} l\right)$$

Met $x = \frac{1}{2}\,l$ geldt:

$$M_{(\frac{l}{2})} - \frac{1}{2}\,F \cdot \frac{1}{2}\,l = 0 \;\rightarrow\; M_{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}\,Fl$$

Dit is een standaardformule die gekend moet worden.

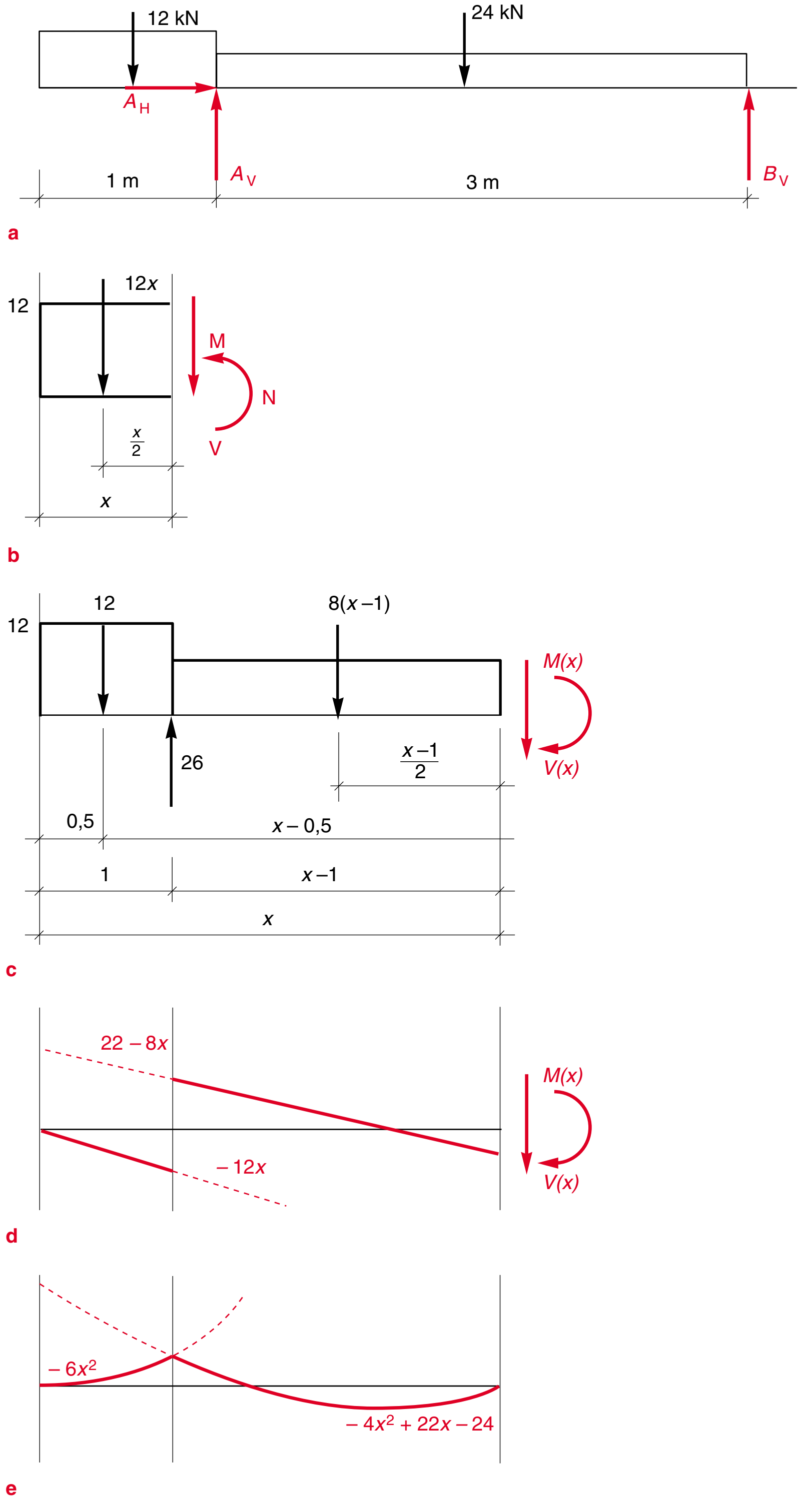
De momentenlijn bestaat uit twee lineaire functies. Aan de einden van de ligger is het moment nul. De bolle kant van de ligger is naar onderen gericht, dus de momentenlijn wordt ook aan de onderzijde van de nullijn getekend.



Figuur 2.8

Opdracht 9

Analyse
De constructie is een ligger op twee steunpunten. De reactiekrachten kunnen berekend worden m.b.v. de evenwichtsvoorwaarden. De richting van de reactiekrachten kan intuïtief worden aangenomen (zie figuur 2.9a). Omdat er een discontinuïteit in de belasting aanwezig is ter plaatse van punt A dienen er twee functievoorschriften te worden opgesteld.


12 kN
24 kN
A_H
A_V
B_V
1 m
3 m
a
12x
12
M
N
V
x/2
x
b
12
8(x – 1)
26
M(x)
V(x)
(x – 1)/2
0,5
x – 0,5
1
x – 1
x
c
22 – 8x
– 12x
M(x)
V(x)
d
– 6x²
– 4x² + 22x – 24
e

Figuur 2.9

Uitwendig evenwicht:

$$\sum F_{\mathrm{H}} = 0 \;\rightarrow\; A_{\mathrm{H}} = 0$$

$$\begin{aligned}\sum T_{(\mathrm{A})} &= 0 \;\rightarrow\; 12 \cdot 0{,}5 - 24 \cdot 1{,}5 + B_{\mathrm{V}} \cdot 3V \cdot 3 \cdot 3V \cdot 3\\ &= 0 \;\rightarrow\; B_{\mathrm{V}} = 10 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; 12 + 24 - 10 - A_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; A_{\mathrm{V}} = 26 \text{ kN}$$

Een snede links van punt A geeft de volgende vergelijkingen (zie figuur 2.9b):

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; 12 \cdot x + V(x) = 0 \;\rightarrow\; V(x) = -\,12x$$

$$\sum T_{(\mathrm{X})} = 0 \;\rightarrow\; 12 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M(x) = 0 \;\rightarrow\; M(x) = -\,6x^2$$

De dwarskrachtfunctie is dus een lineaire functie met richtingscoëfficiënt: $-\,12$ $(= -q)$
De momentfunctie is een parabool met de top in $x = 0$.
Rechts van punt A is de situatie zoals die in figuur 2.9c is getekend.

$$\begin{aligned}\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;&\rightarrow\; 12 - 26 + 8 \cdot (x-1) + V(x) = 0\\ &\rightarrow\; V(x) = -\,8x + 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum T_{(\mathrm{X})} = 0 \;&\rightarrow\; 12 \cdot (x - 0{,}5) - 26 \cdot (x-1) + 8 \cdot (x-1) \cdot \frac{x-1}{2}\\ &+ M(x) = 0 \;\rightarrow\; M(x) = -\,4x^2 + 22x - 24\end{aligned}$$

Opdracht 10

Analyse
De gevraagde functies kunnen gevonden worden door een snede aan te brengen op een willekeurige plaats. De belastingfunctie is continu, dus de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn bestaan uit één segment.

De reactiekrachten zijn ieder gelijk aan de helft van de totale belasting:

$$A_{\mathrm{V}} = B_{\mathrm{V}} = \frac{q \cdot l}{2}\,.$$

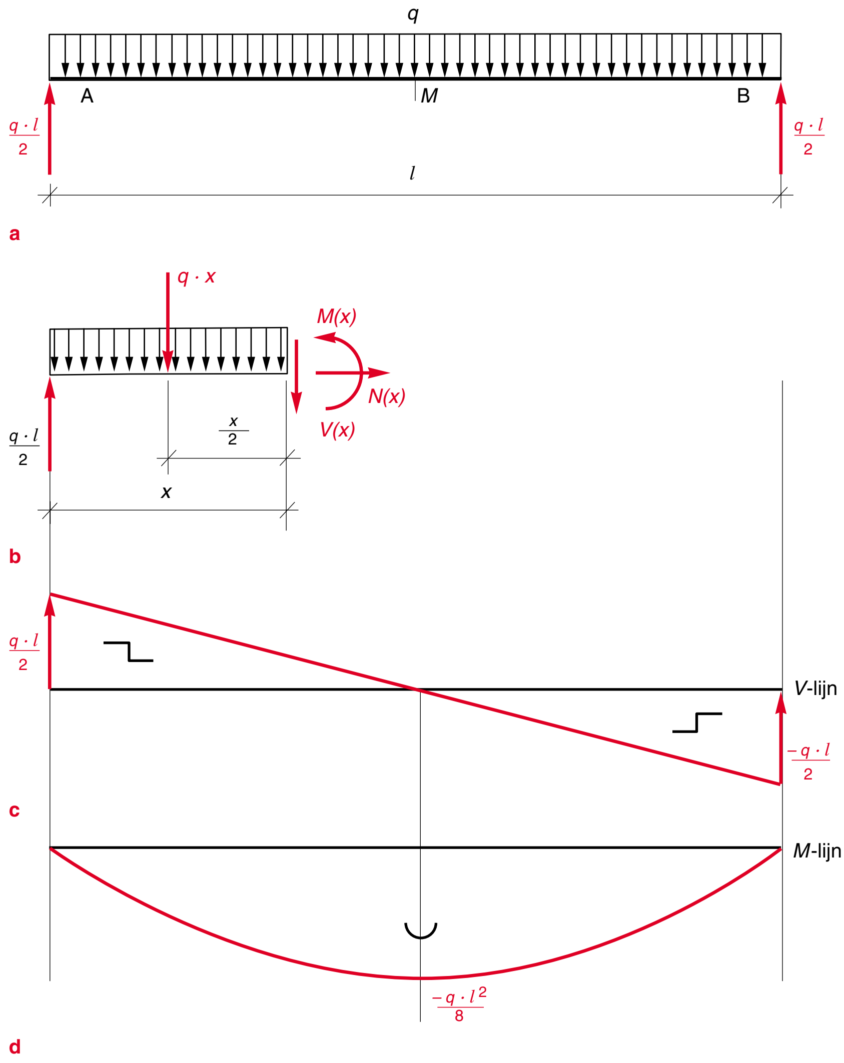
In figuur 2.10a zijn de opleggingen vervangen door de reactiekrachten. Brengen we een snede aan op een willekeurige afstand van A, dan ontstaat de situatie van figuur 2.10b. Uit het evenwicht van het linkerdeel volgt dan:

$$\sum F_{\mathrm{H}} = 0 \;\rightarrow\; N(x) = 0$$

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{q \cdot l}{2} + q \cdot x + V(x) = 0 \;\rightarrow\; V(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\sum T_{(\mathrm{X})} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{q \cdot l}{2} \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M(x) = 0$$

$$\rightarrow\; M(x) = \frac{1}{2}\,qlx - \frac{1}{2}\,qx^2$$



Figuur 2.10

De dwarskrachtenlijn is een lineaire functie. De momentenlijn een parabool, met de top in het midden van de ligger.

Ter plaatse van punt $M\left(x=\frac{1}{2}l\right)$ is het moment:

$$M_{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}q\cdot l\cdot\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}q\cdot\left(\frac{1}{2}l\right)^2=\frac{1}{8}ql^2$$

Dit is een standaardformule die gekend moet worden.

Opdracht 11

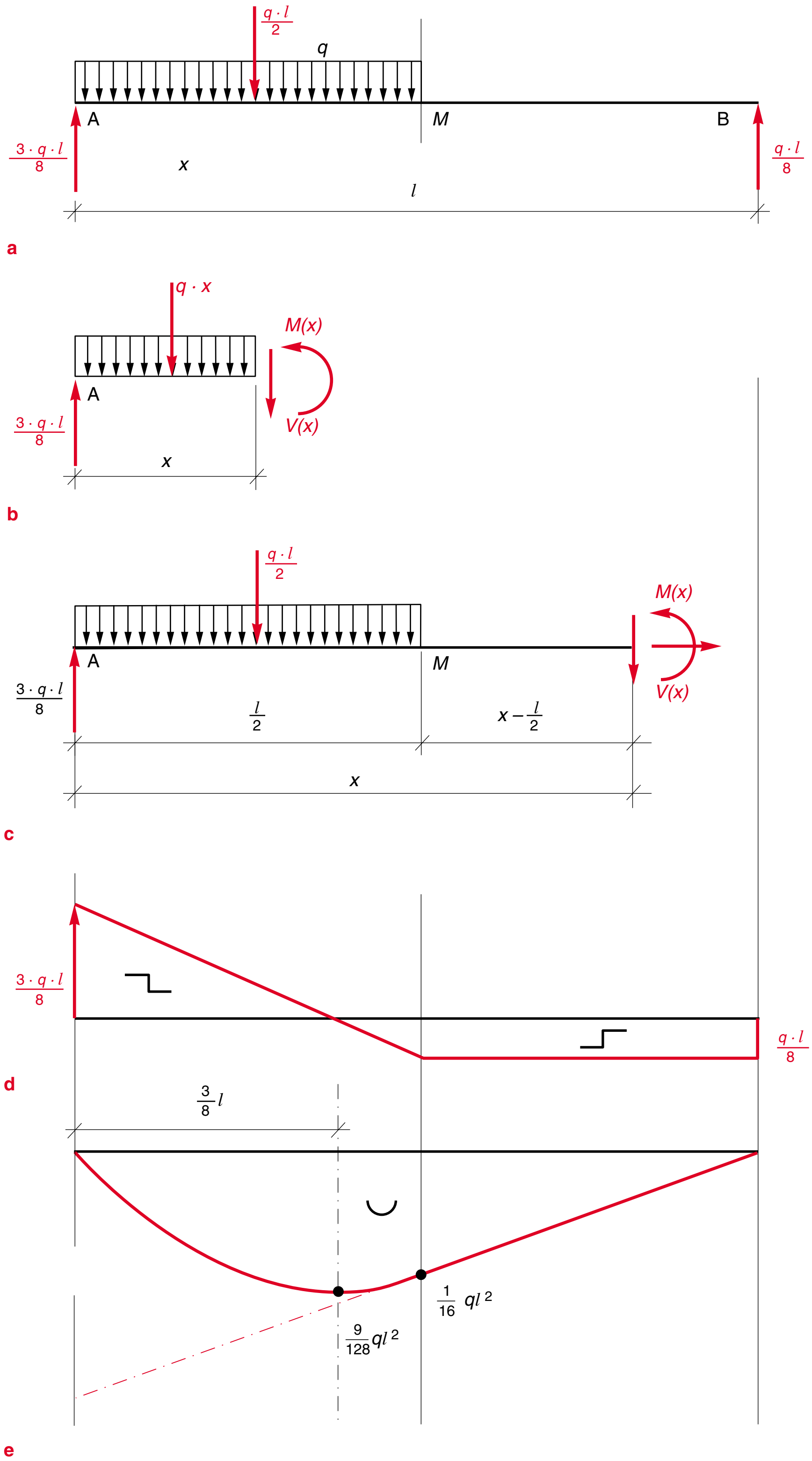
Analyse
De ligger is gelijk aan die van opgave 2.10. De belasting is nu slechts op de linkerhelft aanwezig. Er zijn dus twee functievoorschriften voor de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn. In figuur 2.11a zijn de reactiekrachten aangegeven.
Voor een snede links van het midden geldt figuur 2.11b. Verticaal evenwicht levert het functievoorschrift voor de dwarskracht:
$V(x)=\frac{3}{8}ql-qx$, en het momentenevenwicht: $M(x)=\frac{3}{8}qlx-\frac{1}{2}qx^2$.
Voor een snede rechts van het midden (figuur 11c):
$V(x)=-\frac{1}{8}ql$ (constant) en $M(x)=\frac{1}{8}ql(l-x)$. Om te kijken hoe de functies op elkaar aansluiten wordt in alle voorschriften voor x de waarde $\frac{1}{2}l$ ingevuld:

Links: $V(x)=\frac{3}{8}ql-qx=\frac{3}{8}ql-q\left(\frac{1}{2}l\right)=-\frac{1}{8}ql$

$$M(x)=\frac{3}{8}qlx-\frac{1}{2}qx^2=\frac{3}{8}ql\left(\frac{1}{2}\right)l-\frac{1}{2}q\left(\frac{1}{2}l\right)^2=\frac{1}{16}ql^2$$

Rechts: $V(x)=-\frac{1}{8}ql$

$$M(x)=\frac{1}{8}ql(l-x)=\frac{1}{8}ql\left(l-\frac{1}{2}l\right)=\frac{1}{16}ql^2$$


q · l / 2
q
A
M
B
3 · q · l / 8
q · l / 8
x
l
a
q · x
M(x)
V(x)
A
3 · q · l / 8
x
b
q · l / 2
M(x)
A
M
V(x)
3 · q · l / 8
l / 2
x − l / 2
x
c
3 · q · l / 8
q · l / 8
d
3/8 l
1/16 ql 2
9/128 ql 2
e

Figuur 2.11

Hieruit blijkt dat de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn continue functies zijn. De top van de parabool (momentenlijn) kan worden gevonden met de a,b,c-formule:

$$x_{top} = \left[\frac{-b}{2a}\right] = \frac{-\frac{3}{8}ql}{2\left(-\frac{1}{2}q\right)} = \frac{3}{8}l$$

De functiewaarde van de top is:

$$M_{top} = -\frac{1}{2}q\left(\frac{3}{8}l\right)^2 + \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l = \frac{9}{128}ql^2$$

Uit de figuur blijkt dat de top van de momentenlijn samenvalt met het nulpunt van de dwarskrachtenlijn.

Opdracht 12

Analyse
Tussen de eindpunten van de ligger is er geen belasting. De belastingfunctie is derhalve: $q(x) = 0$. Twee keer integreren levert de dwarskracht- en momentfuncties. Met de randvoorwaarden kunnen vervolgens de integratieconstanten worden uitgerekend.

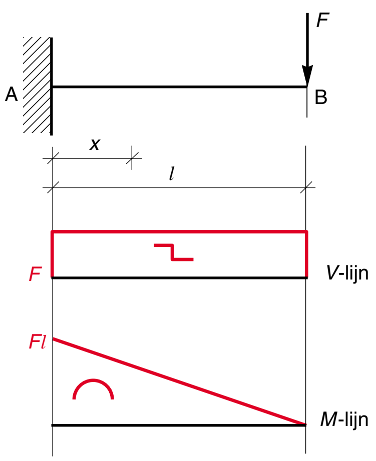
$$q(x) = 0 V(x) = -\int q(x)\ \mathrm{d}x = \int -0\ \mathrm{d}x = C_1$$

$$M(x) = \int V(x)\ \mathrm{d}x = \int C_1\ \mathrm{d}x = C_1x + C_2$$

Randvoorwaarden:
$V(l) = F \rightarrow C_1 = F \rightarrow C_1 = F$
$M(l) = 0 \rightarrow Fl + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -Fl$

De functies worden nu:
$V(x) = F$
$M(x) = Fx - Fl = F(x - l)$

De dwarskrachtfunctie is een constante functie en de momentfunctie een lineaire functie.
De waarden voor de dwarskracht en het moment bij A worden dan:
$V_A = V(0) = F$
$M_A = M(0) = F(0 - l) = -Fl$
In figuur 2.12 zijn de grafieken getekend.



a
Figuur 2.12

Opdracht 13

De belastingfunctie is lineair constant. Door twee keer integreren worden de dwarskracht en momentfuncties bepaald. Daarna worden m.b.v. de randvoorwaarden de integratieconstanten berekend.

$$q(x) = \frac{x}{l}\,q = \frac{q}{l}\,x$$

$$V(x) = -\int q(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{q}{l}\,x\,\mathrm{d}x = -\frac{q}{l}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{2}\,x^2 + C_1\right)$$

$$M(x) = \int V(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{q}{l}\int\left(\frac{1}{2}\,x^2 + C_1\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{6}\,x^3 + C_1 x + C_2\right)$$

De ligger is aan beide zijden vrij opgelegd, dus de randvoorwaarden zijn: $M(0) = 0$ en $M(l) = 0$

$$M(0) = 0 \;\rightarrow\; C_2 = 0$$

$$M(l) = 0 \;\rightarrow\; -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{6}\,l^3 + C_1 l + 0\right) = 0 \;\rightarrow\; C_1 = -\frac{1}{6}\,l^2$$

De functies worden nu:

$$V(x) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{6}\,l^2\right) = q\left(\frac{1}{6}\,l - \frac{x^2}{2l}\right)$$

$$M(x) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{6}\,l^2 x\right) = q\left(\frac{lx}{6} - \frac{x^3}{6l}\right)$$

Nu kunnen extreme waarden en markante punten worden berekend:

$$V(0) = \frac{1}{6}\,ql$$

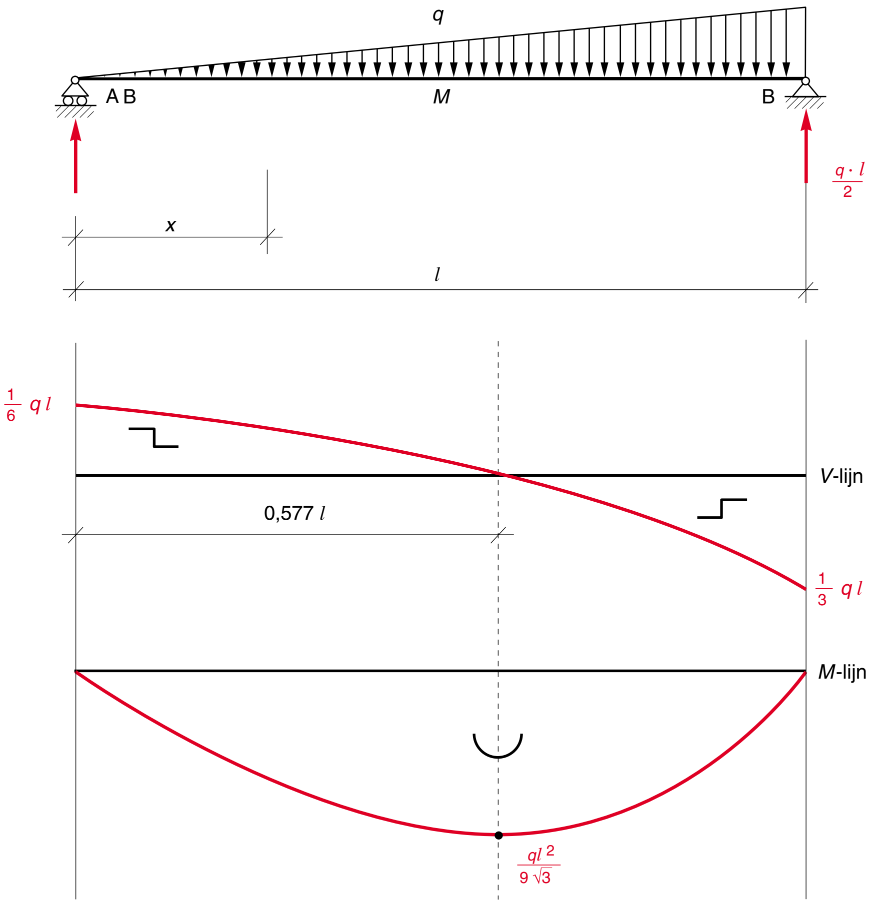
$$V(l) = q\left(\frac{1}{6}\,l - \frac{l^2}{2l}\right) = -\frac{1}{3}\,ql$$

$$V(x) = 0 \;\text{ als }\; \frac{x^2}{2l} = \frac{1}{6}\,l \;\text{ dus als }\; x^2 = \frac{1}{3}\,l^2 \;\rightarrow\; x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577l$$

Het moment is maximaal als de dwarskracht nul is, dus:

$$M_{\max} = q\left(\frac{l\dfrac{l}{\sqrt{3}}}{6} - \frac{\left(\dfrac{l}{\sqrt{3}}\right)^3}{6l}\right) = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$$

De grafieken zijn getekend in figuur 2.13



Figuur 2.13

Opdracht 14

Analyse
Als opdracht 13.
De functies voor de dwarskrachten- en momentenlijn zijn identiek aan opdracht 13. De randvoorwaarden verschillen omdat de ligger anders is opgelegd:
$V(0) = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$
$M(0) = 0 \;\rightarrow\; C_2 = 0$

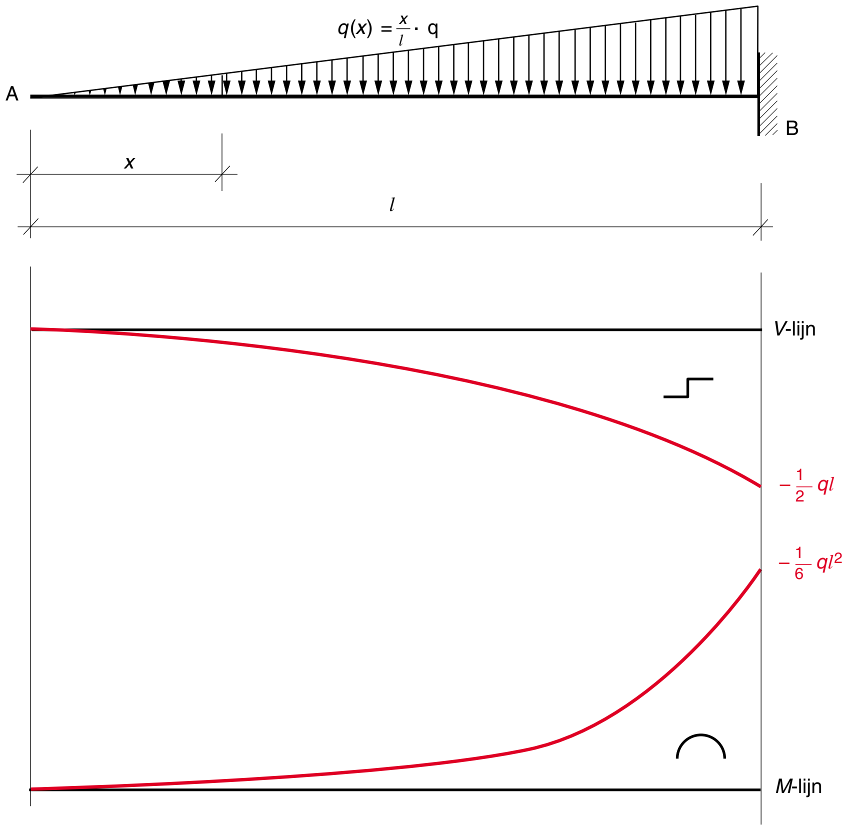
De functies worden dan:

$$V(x) = -\frac{qx^2}{2l} \quad \text{en} \quad M(x) = -\frac{qx^3}{6l}$$

Voor punt B geldt:

$$V_B = V(l) = -\frac{ql^2}{2l} = -\frac{1}{2}ql$$

$$M_B = M(l) = -\frac{ql^3}{6l} = -\frac{1}{6}ql^3$$



Figuur 2.14

Opdracht 15

Analyse als opgave 13 en 14.
Met de hier geldende randvoorwaarden vinden we:

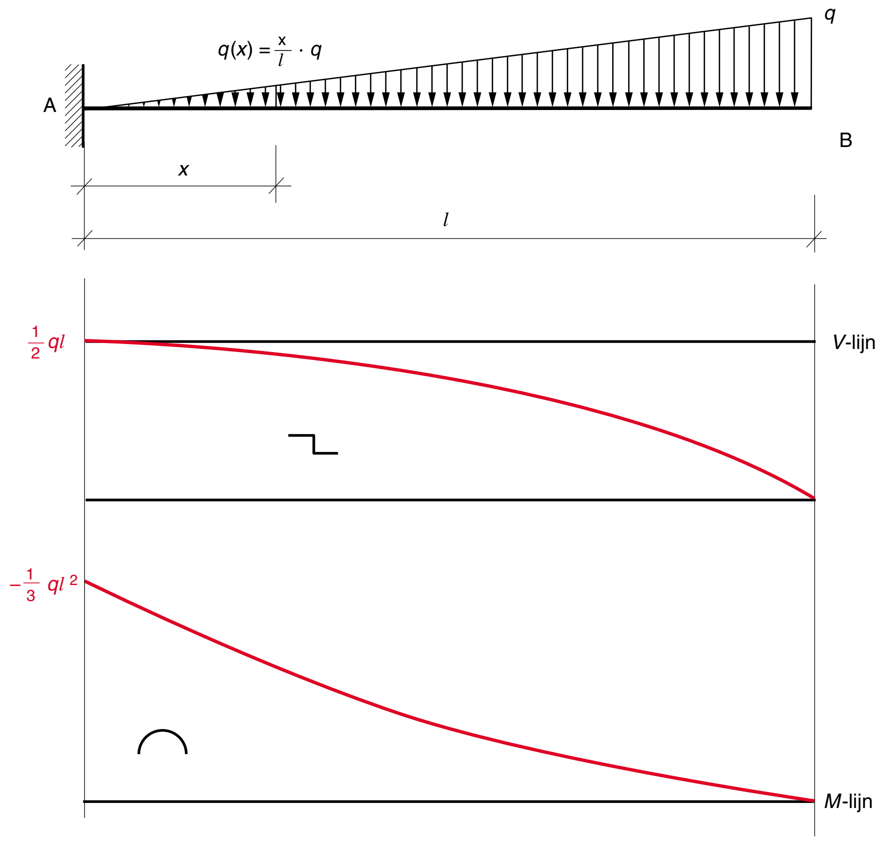
$$V(l) = 0 \;\rightarrow\; V(l) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{2}l^2 + C_1\right) = 0 \;\rightarrow\; C_1 = -\frac{1}{2}l^2$$

$$M(l) = 0 \;\rightarrow\; M(l) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{6}l^3 - \frac{1}{2}l^2 + C_2\right) \;\rightarrow\; C_2 = \frac{1}{3}l^3$$

De functies worden dan:

$$V(x) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}l^2\right) \;\rightarrow\; V(0) = \frac{1}{2}ql$$

$$M(x) = -\frac{q}{l}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}l^2x + \frac{1}{3}l^3\right) \;\rightarrow\; M(0) = -\frac{1}{3}ql^2$$



Figuur 2.15

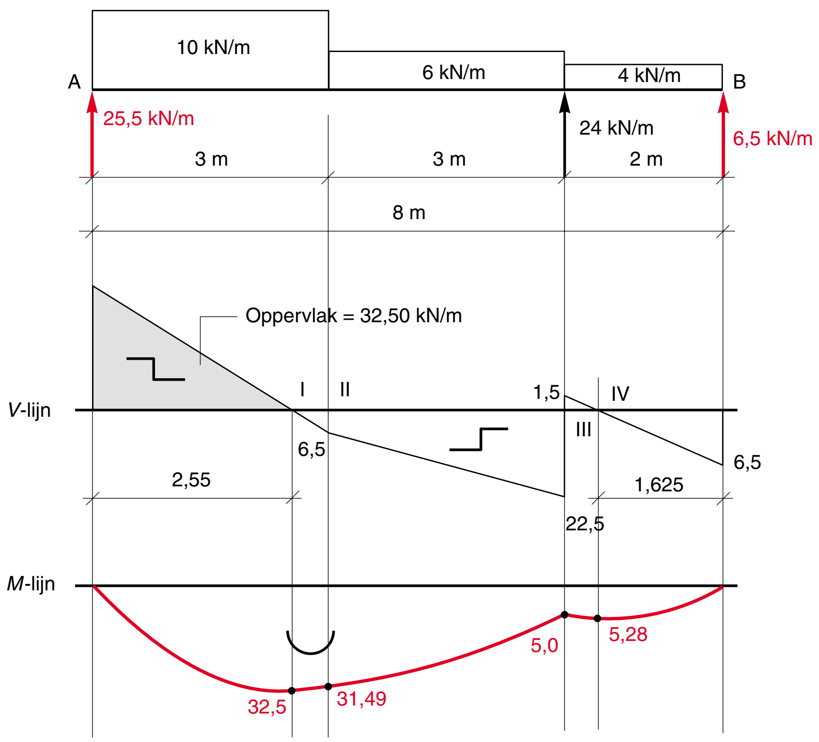
Opdracht 16

Statisch bepaalde constructie, dus de reactiekrachten berekenen met de evenwichtsvoorwaarden. De dwarskrachtenlijn tekenen door de belasting te 'volgen'. Vervolgens de momenten bepalen op plaatsen waar de belasting discontinu is en waar de dwarskracht nul is. Dit kan door gebruik te maken van de oppervlakte van het momentenvlak, of door sneden aan te brengen en vervolgens de inwendige krachten te bepalen uit het evenwicht van één deel.
Bij de opleggingen zijn de momenten nul. Tussen A en I is de oppervlakte van de dwarskrachtenfiguur: 32,5 kNm. De verandering van het moment tussen A en I is dus ook 32,5 kNm. M_1 is dus 32,5 kNm. De oppervlakte van de dwarskrachtenfiguur tussen tussen I en II is 1,01 kNm. De dwarskrachten figuur ligt hier onder de nullijn. De oppervlakte dient dus negatief te worden genomen. Het moment in punt II wordt dus:
$M_{II} = M_I - 1{,}01 = 32{,}50 - 1{,}01 = 31{,}49$ kNm.

Met de snedemethode:

$$+M_{II} - 25{,}5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0 \rightarrow M_{II} = 31{,}49 \text{ kNm}$$

De overige berekeningen worden aan de gebruiker overgelaten. De uitkomsten staan in figuur 2.16 bijgeschreven.

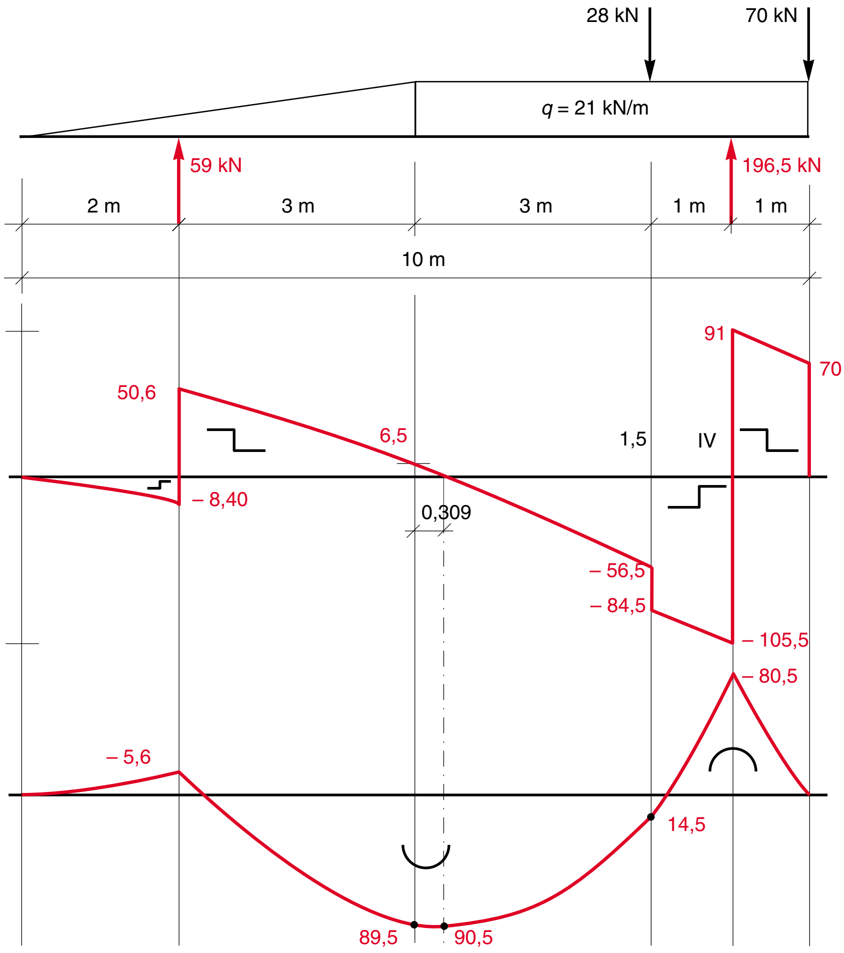


Figuur 2.16

Opdracht 17

Analyse
Statisch bepaalde ligger zonder horizontale krachten. De reactiekrachten berekenen m.b.v. de evenwichtsvoorwaarden. Vervolgens de dwarskrachtenlijn tekenen door de belasting te volgen. Daarna kunnen de momenten berekend worden door op markante punten sneden aan te brengen.

De uitkomsten zijn in figuur 2.17 bijgeschreven.



Figuur 2.17

Opdracht 18

Analyse
De reactiekrachten berekenen met de evenwichtsvoorwaarden. Daarna een functie opstellen voor de dwarskracht, waarmee het dwarskrachtnulpunt kan worden berekend. Vervolgens de momenten berekenen in het dwarskrachtnulpunt en ter plaatse van het steunpunt.Hiermee kunnen de gevraagde grafieken worden getekend.
De dwarskrachtfunctie kan worden berekend m.b.v. figuur 2.18b:

$$q(x) = 10 + 5x$$

$$V(x) = -\int q(x)\ \mathrm{d}x) = -\int (10 + 5x)\ \mathrm{d}x = -10x - \frac{5}{2}x^2 + C$$

$$V(0) = 0 \ \rightarrow\ C = 42$$

$$V(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 10x + 42$$

Het dwarskrachtnulpunt:

$$V(x) = 0 \ \rightarrow\ -\frac{5}{2}x^2 - 10x + 42 = 0 \ \rightarrow\ x = 2{,}56\ \text{m}$$

De dwarskracht bij het steunpunt:

$$V(5) = -\frac{5}{2}5^2 - 105 + 42 = -70{,}5\ \text{kN}$$

De momentfunctie kan worden bepaald door de dwarskrachtfunctie te integreren:

$$M(x) = \int V(x)\ \mathrm{d}x = \int \left(-\frac{5}{2}x^2 - 10x + 42\right) \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{5}{6}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 42x + C_2$$

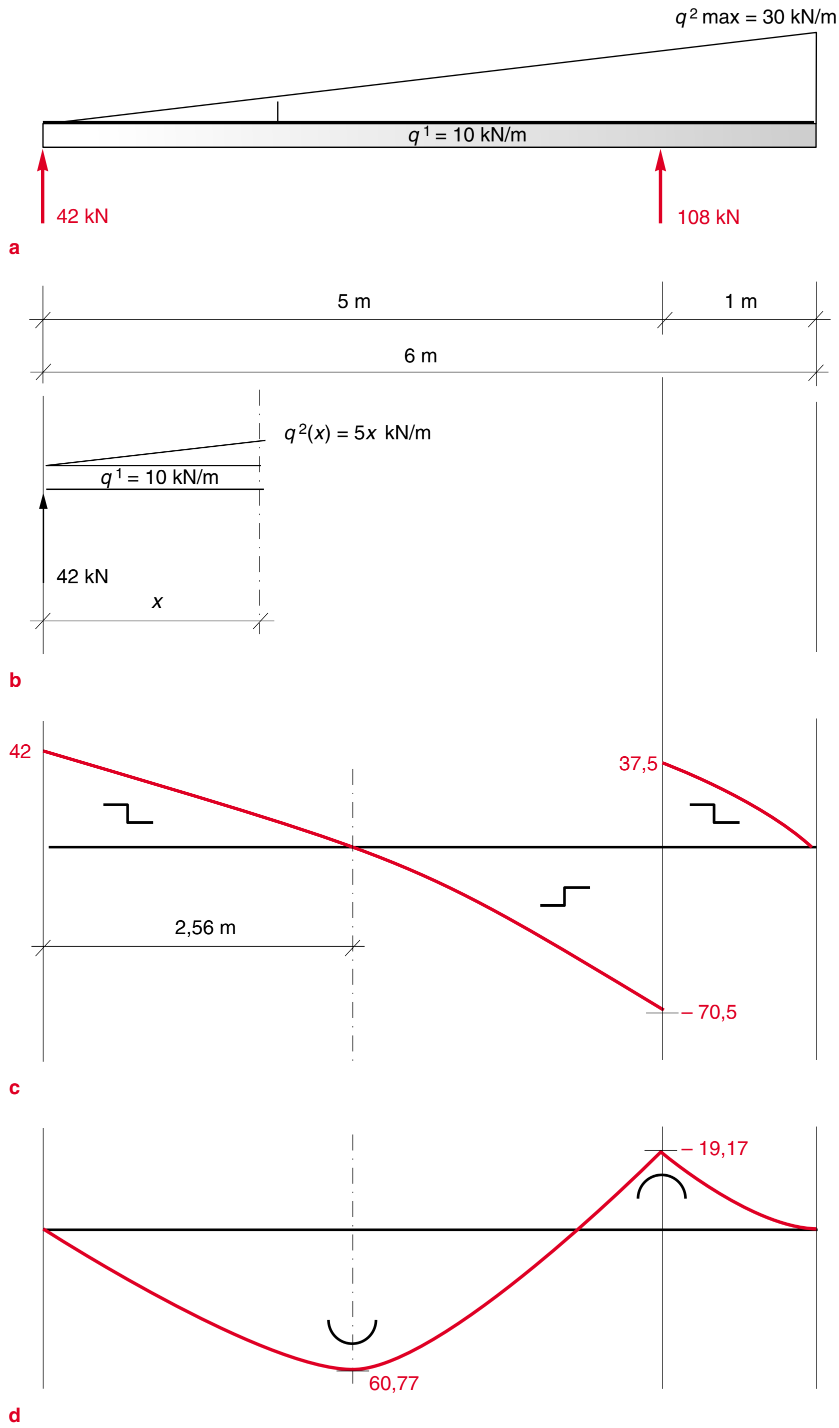
$$M(0) = 0 \ \rightarrow\ C_2 = 0$$

$$M(x) = -\frac{5}{6}x^3 - 5x^2 + 42x$$

$$M(2{,}56) = -\frac{5}{6}\cdot 2{,}56^3 - 5\cdot 2{,}56^2 + 42\cdot 2{,}56 = 60{,}77\ \text{kNm}$$

$$M(5) = -\frac{5}{6}\cdot 5^3 - 5\cdot 5^2 + 42\cdot 5 = -19{,}17\ \text{kNm}$$

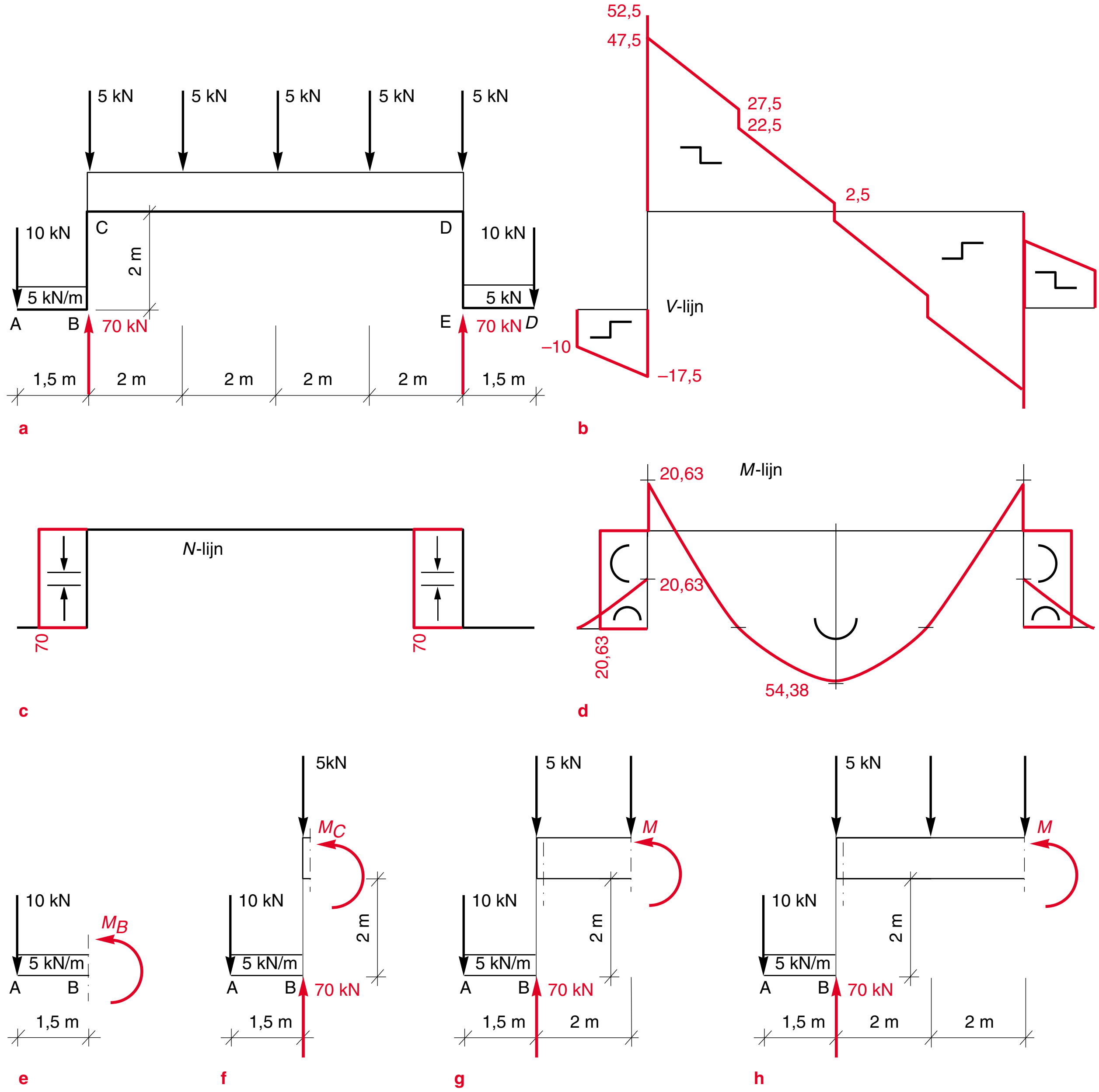
Hiermee kunnen de grafieken worden getekend. Let erop dat de dwarskrachtfunctie een parabool is en de momentfunctie een derdegraadskromme.



Figuur 2.18

Opdracht 19

Analyse
De constructie is statisch bepaald. De pendelstaven bij *B* en *E* fungeren als rolscharnieren. De verticale rol bij *B* houdt de constructie overeind. Uit het horizontale evenwicht blijkt dat de horizontale reactiekracht nul is. De constructie en de belasting zijn symmetrisch. De verticale reactiekrachten zijn daardoor gelijk. Daarmee zijn de *V*-, en *N*-lijn voor de constructie te tekenen. Vervolgens de momenten berekenen ter plaatse van de puntlasten en de knopen, waarmee de *M*-lijn te tekenen is.



Figuur 2.19

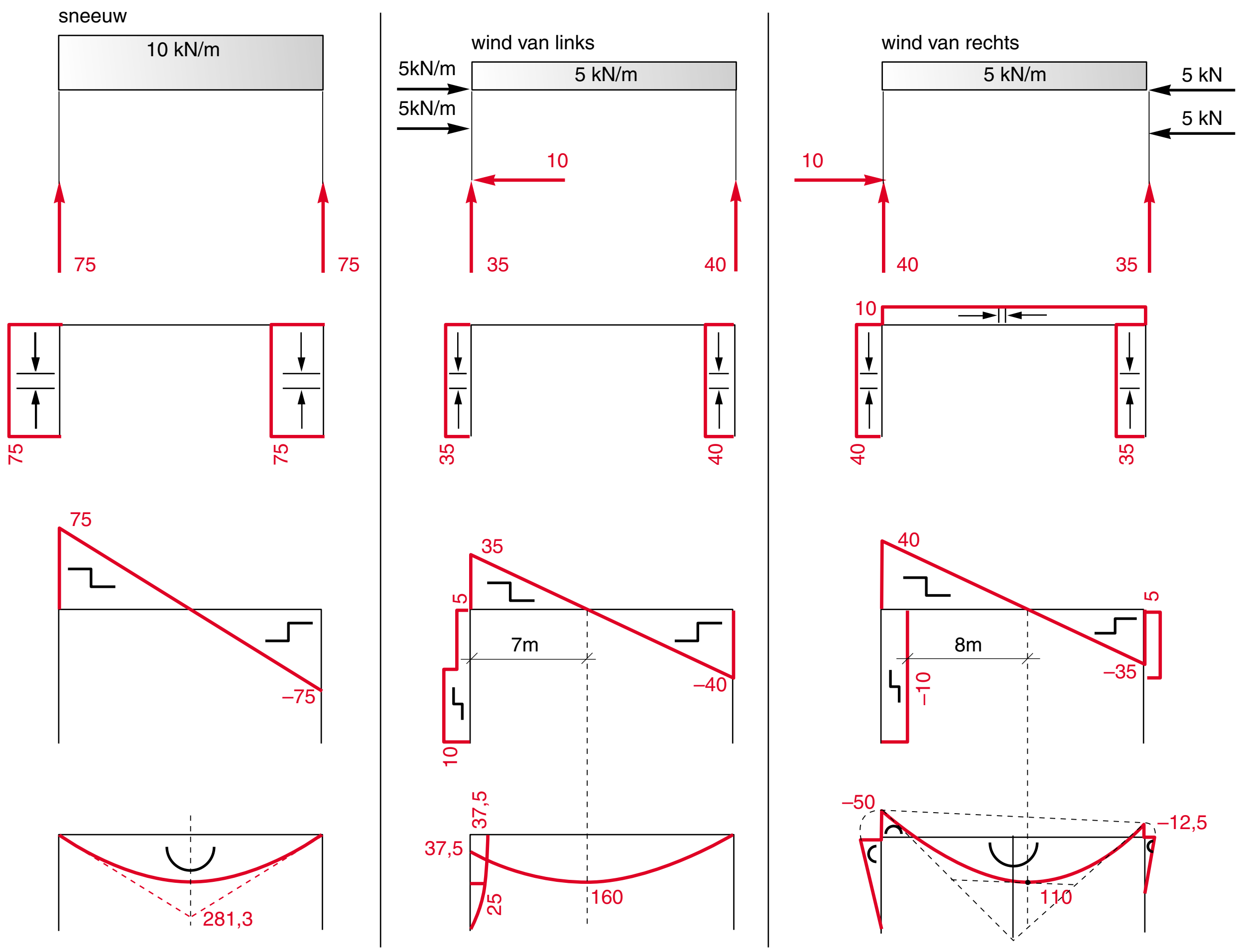
Reactiekrachten: $B_V = E_V = 10 + 1{,}5 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 5 = 70$ kN

In figuur 2.19a zijn de opleggingen vervangen door de reactiekrachten.

De *V*-, en *N*-lijn zijn te tekenen door de belasting te 'volgen'. In figuur 2.19b is de *V*-lijn getekend en in figuur 2.19c de *N*-lijn.
De figuren 2.19e t/m h zijn de situaties waarmee achtereenvolgens de belangrijke momenten kunnen worden uitgerekend. De uitkomsten zijn verwerkt in de momentenlijn (figuur 2.19d)

Opdracht 20

Een statisch bepaald portaal. In alle gevallen kunnen de oplegreacties worden berekend met behulp van de evenwichtsvoorwaarden, waarna de *V*-, en *N*-lijnen kunnen worden getekend. De momentenlijnen kunnen worden getekend nadat in de knopen en ter plaatse van de dwarskrachtnulpunten de momenten zijn berekend.



Figuur 2.20

In figuur 2.20 worden de uitkomsten van de berekeningen getoond. Beschouw hierbij de grote invloed van de horizontale krachten op het momentenverloop.

Opdracht 21

Analyse
Drie statisch bepaalde liggers, waarvan de horizontaal gemeten lengte gelijk is. Bij figuur b en c is de werkelijke lengte groter. Het rolscharnier bij B is in figuur c gedraaid t.o.v. figuur b.
Figuur a is het basisgeval waarvoor alle formules bekend zijn.

De belasting is bij b en c over een grotere liggerlengte verdeeld: $l_1 = \dfrac{l}{\cos(\alpha)}$. De belasting per meter balk is: $q_1 = q \cdot \cos(\alpha)$. Deze belasting moet ontbonden worden in een verdeelde belasting loodrecht op de balk (q_V) en een verdeelde belasting evenwijdig aan de balk (q_N).

$$q_N = q_1 \cdot \sin(\alpha) = q \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

$$q_V = q_1 \cdot \cos(\alpha) = q \cdot \cos^2(\alpha)$$

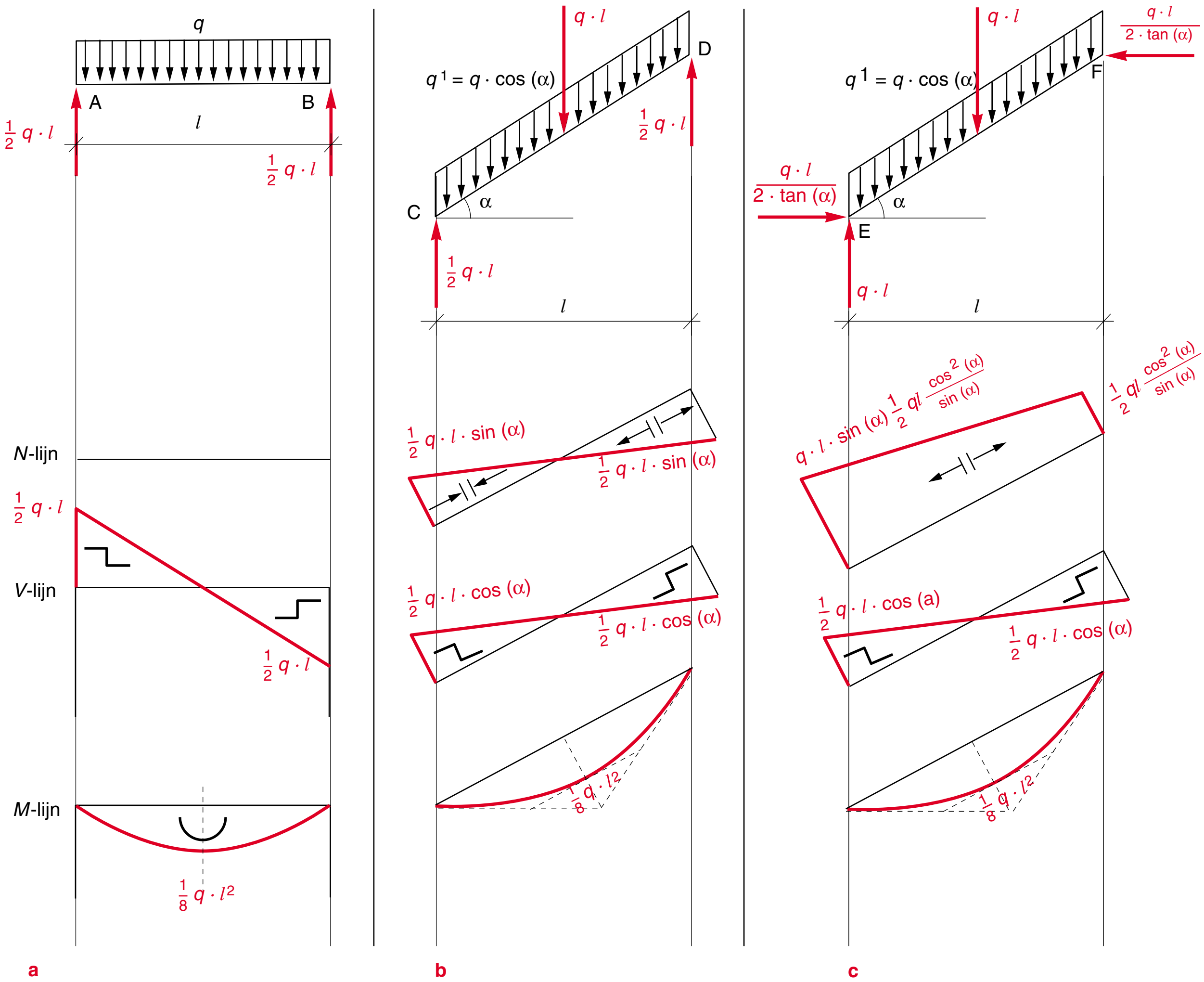
De reactiekrachten zijn te berekenen met behulp van de evenwichtsvoorwaarden. Deze reactiekrachten kunnen ontbonden worden in krachten loodrecht op en evenwijdig aan de staafas. In beide gevallen zijn de reactiekrachten loodrecht op de liggeras:

$$A_{\text{loodr.}} = B_{\text{loodr.}} = \frac{1}{2} ql \cdot \cos(\alpha)$$

Met behulp van de oppervlakte van het dwarskrachtenfiguur kan het maximale moment berekend worden:

$$M_{\max} = \frac{A_{\text{loodr.}} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} ql \cdot \cos(\alpha) \cdot \dfrac{l}{2 \cdot \cos(\alpha)}}{2} = \frac{1}{8} ql^2$$

De dwarskrachtenlijn is in de gevallen b en c gelijk. Alleen de normaalkrachtenlijn is verschillend (zie figuur 2.21).



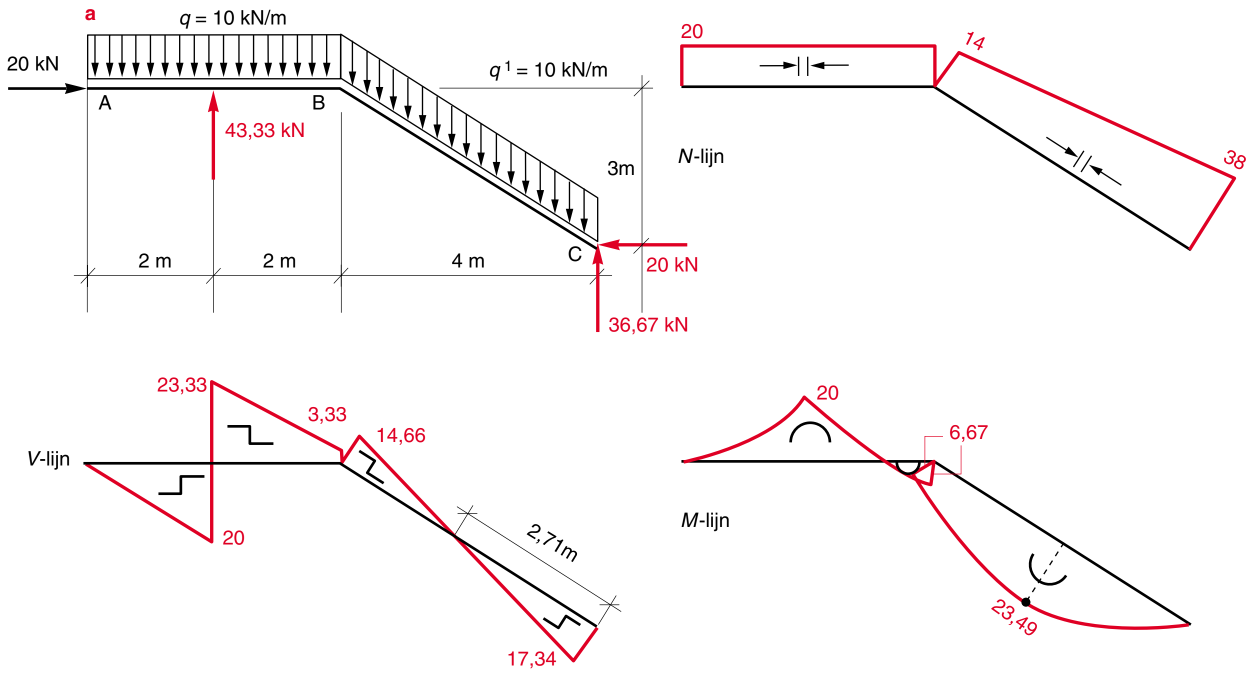
Figuur 2.21

Opdracht 22

Analyse

Statisch bepaalde constructie. Zorg voor uitwendig evenwicht. Teken vervolgens de *N*-, *V*- en *M*-lijnen met behulp van alle praktische hulpmiddelen. Voor het berekenen van de normaal- en dwarskracht in het schuine deel dient de belasting op het schuine deel over de liggerlengte te worden verdeeld en vervolgens te worden ontbonden in een belasting evenwijdig met de staafas en een belasting loodrecht op de staafas. Ook de reactiekrachten in *B* moeten worden ontbonden. De dwarskrachten worden bepaald door de krachten loodrecht op de verschillende staven te 'volgen', en de normaalkrachten door de evenwijdige krachten te 'volgen'.

De momentenlijn kan worden getekend door de momenten in de markante punten te berekenen. Omdat er alleen verdeelde belasting op staat, wordt de momentenlijn gevormd door paraboolsegmenten. De uitkomsten zijn in figuur 2.22 bij de grafieken vermeld.



Figuur 2.22

Opdracht 23

De gegeven ligger is getekend in figuur 2.23a. De momentenlijn staat in figuur 2.23b. De verdeling van veld- en steunpuntsmoment wordt bepaald door de plaats van de scharnieren. Plaatsen we het scharnier dicht bij de oplegging, dan wordt het veldmoment klein en het steunpuntsmoment groot, en omgekeerd.
In figuur 2.23c is een willekeurige parabool getekend met de top in de oorsprong. Met het bijgeschreven functievoorschrift geldt:

$$\begin{cases} p \cdot b^2 = M \\ p \cdot c^2 = 2M \end{cases} \Rightarrow \ p \cdot c^2 = 2 \cdot p \cdot b^2 \ \Rightarrow \ c = \sqrt{2} \cdot b$$

Uit $a = c - b$ volgt nu: $a = \sqrt{2} \cdot b - b = (\sqrt{2} - 1)b$ (zie figuur 2.23c)

a Voor een middenveld geldt

$$l = 2a + 2b = 2\{(\sqrt{2} - 1) + 1\}b = 2\sqrt{2} \cdot b$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l$$

$$a = c - b = \frac{1}{2}\, l - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) l = 0{,}146 \cdot l$$

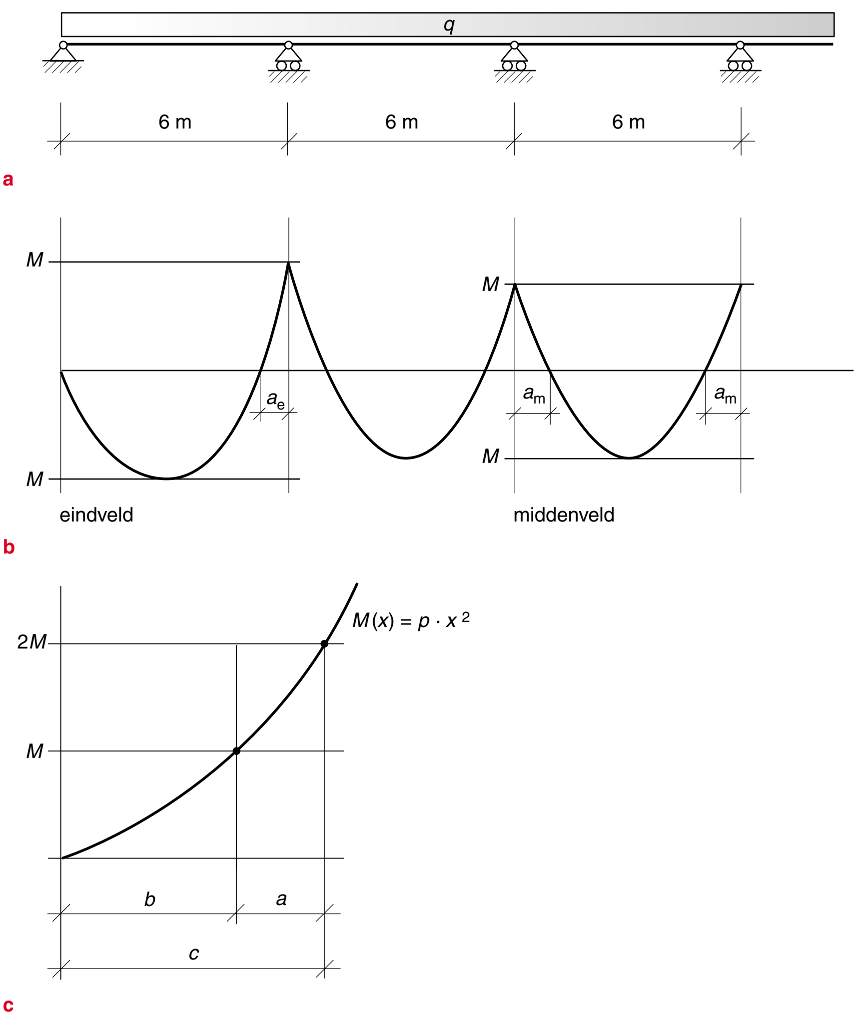
Voor een veldlengte van 6 meter is dit: $0{,}146 \cdot 6 = 0{,}88$ m

b Voor een eindveld geldt:

$$l = a + 2b = (\sqrt{2} - 1)b + 2b = (\sqrt{2} + 1)b$$

$$\frac{a}{l} = \frac{(\sqrt{2} - 1)b}{(\sqrt{2} + 1)b} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} l = 0{,}172 \cdot l$$

Voor een veldlengte van 6 meter is dit: $a = 0{,}172 \cdot 6 = 1{,}03m$

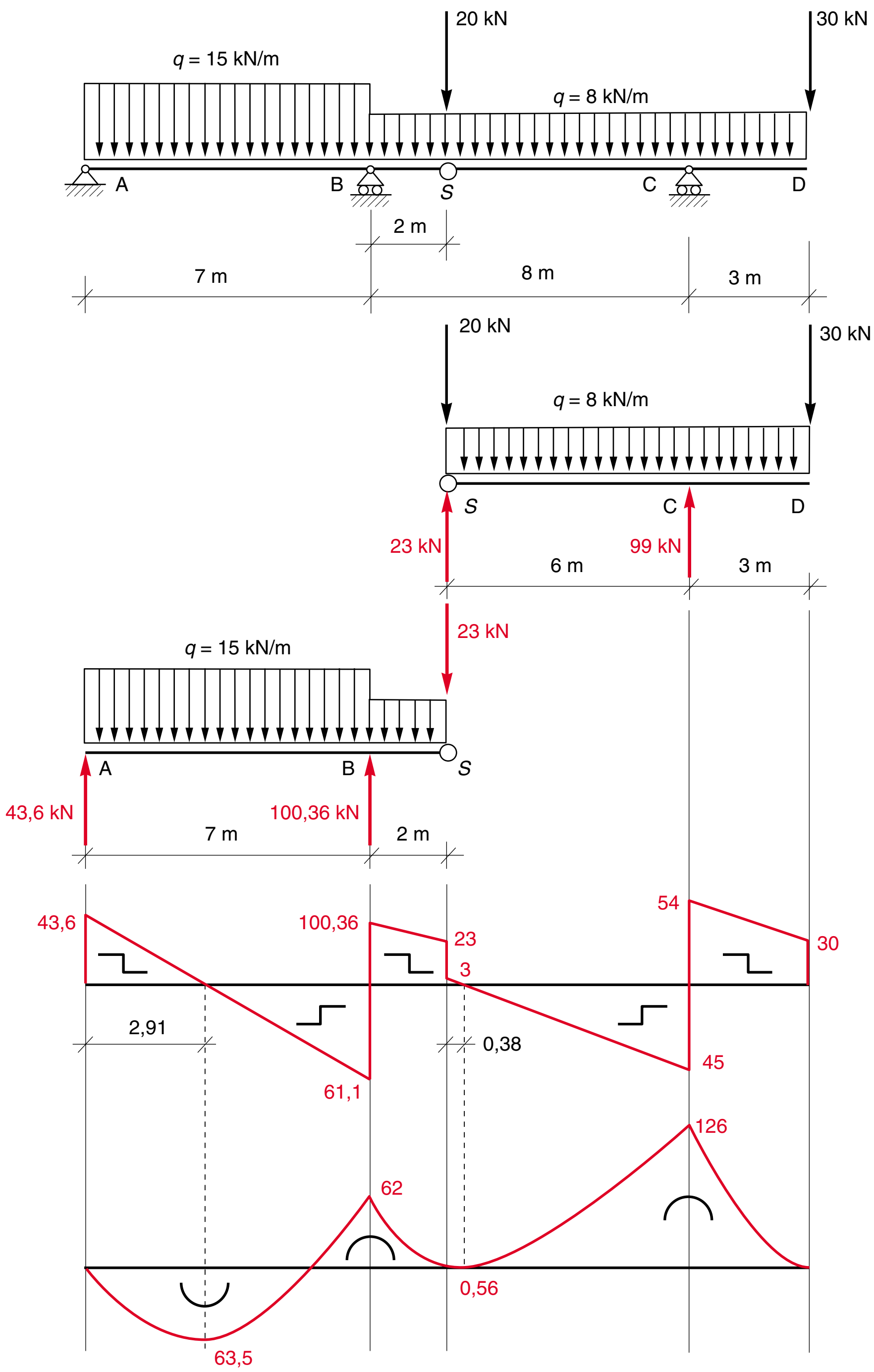


Figuur 2.23

Opdracht 24

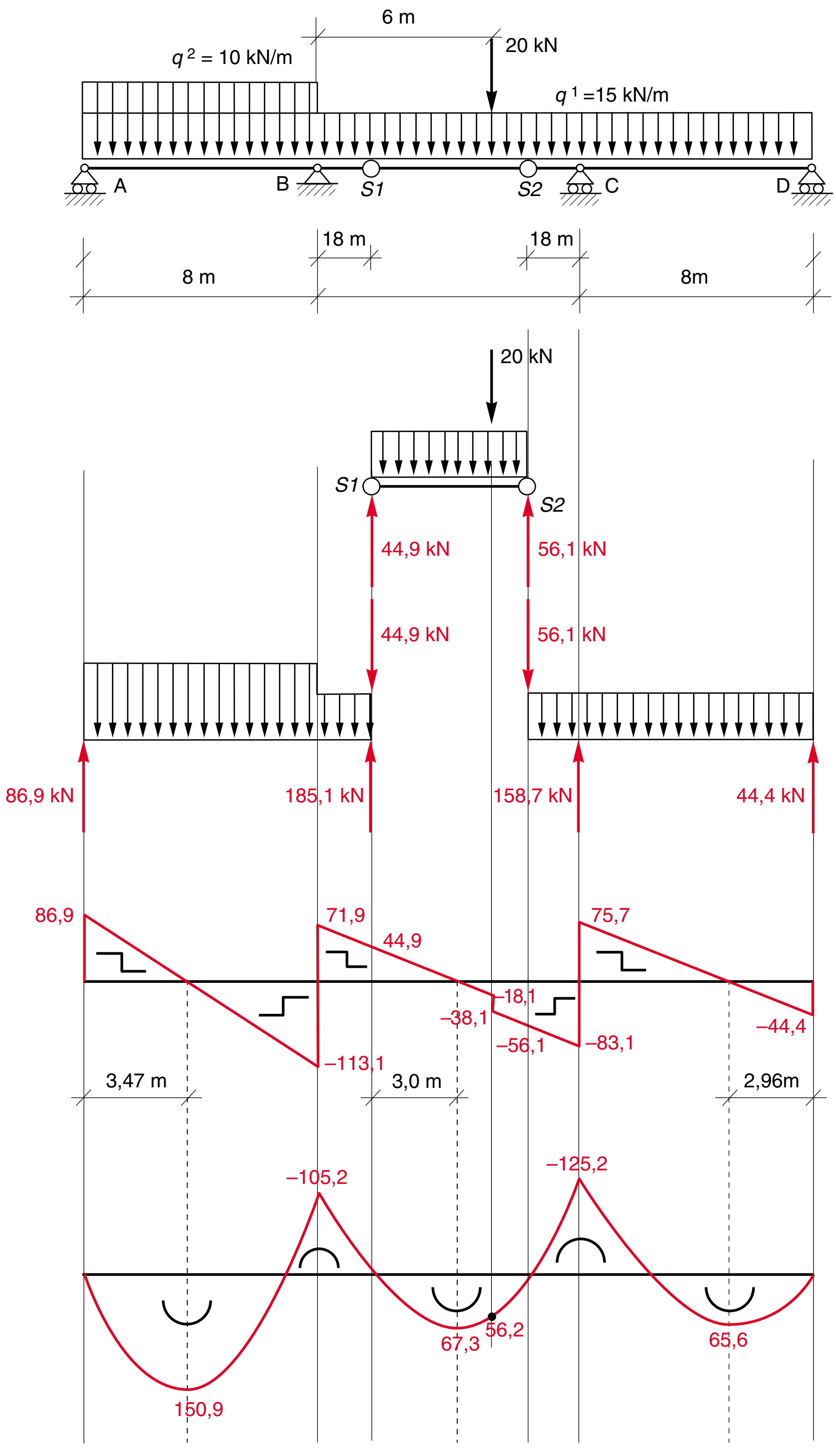
Analyse
Statisch bepaalde scharnierligger. De ligger bestaat uit delen die elk afzonderlijk statisch bepaald zijn, waarbij het ene deel rust op het andere deel. In dit geval rust deel *SCD* op deel *ABS*.
De kracht die *SCD* op *S* uitoefent kan worden bepaald uit het evenwicht van *SCD*. De reactiekrachten in *S* en *C* zijn in figuur 24 weer-

gegeven. De reactiekracht op *SCD* vormt in tegengestelde richting een actiekracht in *S* op *ABS*. Deze actiekracht is ook in de figuur weergegeven op ligger *ABS*. Van de twee afzonderlijke liggers kan op de gebruikelijke wijze een *V*- en *M*-lijn getekend worden (zie figuur 24).



Figuur 2.24

Opdracht 25



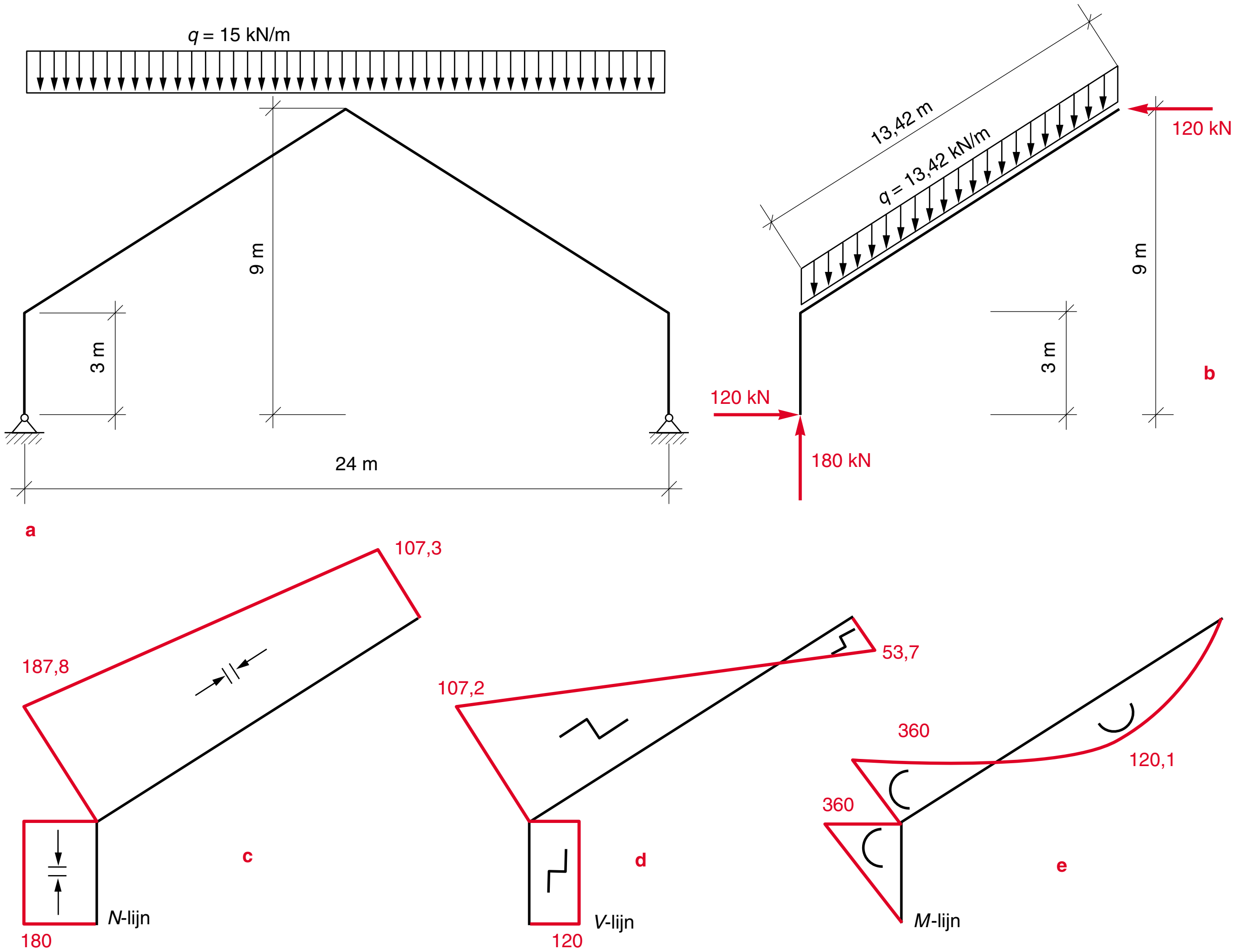
Figuur 2.25

Analyse

Statisch bepaalde scharnierligger op vier steunpunten. De werkwijze is als bij opgave 2.24. Nu ligt ligger $S1$-$S2$ op de einden van de twee eindliggers. De reactiekrachten van ligger $S1$-$S2$ vormen krachten op de einden van *ABS*1 en *S*2*CD*. In figuur 2.25 zijn de liggers afzonderlijk getekend met de actie- en reactiekrachten. De *V*-, en *M*-lijn zijn ook in de figuur getekend.

Opdracht 26

Analyse
Statisch bepaald driescharnierspant. De constructie en belasting is symmetrisch, dus de oplegreacties ook. Vanwege de symmetrie werkt er in het scharnier alleen een horizontale kracht. De reactiekrachten kunnen worden berekend m.b.v. de drie evenwichtsvoorwaarden, en het gegeven dat het moment in het scharnier gelijk is aan nul. In figuur 2.26b is de halve constructie getekend met de reactiekrachten. De belasting op het schuine deel is in deze figuur verdeeld over de schuine lengte. Vervolgens moet deze belasting worden ontbonden in een belasting loodrecht op de ligger en een belasting evenwijdig aan de ligger. Ook de reactiekrachten dienen in deze richtingen te worden ontbonden. Met de dan gevonden waarden kunnen de *N*-, *V*- en M-lijn worden getekend (figuur 2.26c, d, e).

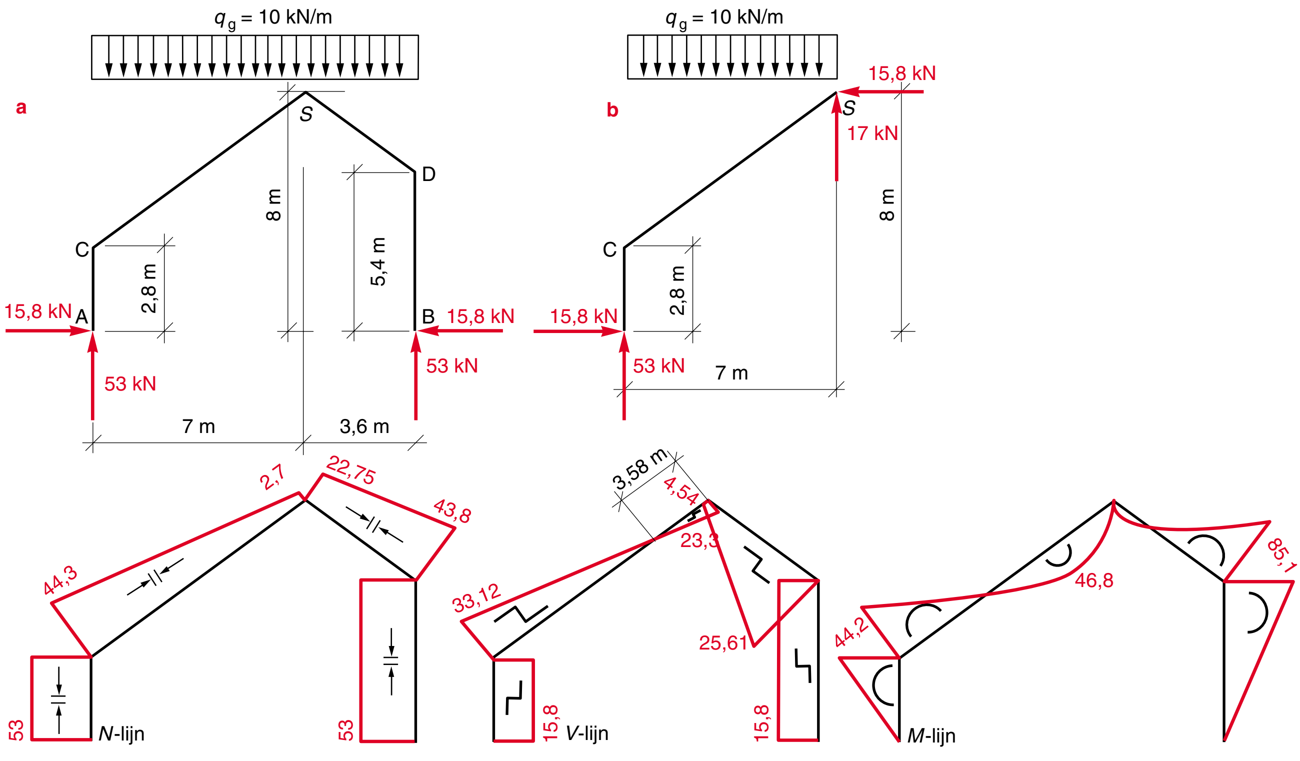


Figuur 2.26

Opdracht 27

Analyse
Statisch bepaald driescharnierspant. De constructie is niet symmetrisch. Er wordt gevraagd om twee belastinggevallen door te rekenen. Voor de reactiekrachten kan gebruik worden gemaakt van de drie evenwichtsvoorwaarden en het gegeven dat het moment in S nul moet zijn. Voor het tekenen van de grafieken dienen de belastingen en reacties te worden ontbonden in richtingen evenwijdig met en loodrecht op de staafas.

a Belastinggeval 1
Uit de berekening volgt dat de reactiekrachten links en rechts wel gelijk zijn. In het scharnier zal behalve een horizontale kracht ook een verticale kracht werken. In figuur 2.27b is het linker deel getekend met de daarop werkende reacties. Na ontbinding van de krachten en belastingen kunnen de N-, V- en M-lijn getekend worden.



Figuur 2.27

b Belastinggeval 2
Hier zijn de belastingen loodrecht op de schuine staven gegeven. Voor de berekening van de reactiekrachten is dit lastig. Aan de hand van figuur 2.28c wordt een andere werkwijze afgeleid. De belasting q wordt ontbonden in een verticale en een horizontale belasting verdeeld over de schuine lengte:

$$q_v = q \cdot \cos(a)$$

$$q_h = q \cdot \sin(a)$$

Wordt de verticale belasting verdeeld over de horizontaal gemeten lengte, dan geldt:

$$\text{belasting} = \frac{q \cdot \cos(a) \cdot l}{l \cdot \cos(a)} = q,$$

en voor de horizontale belasting geldt:

$$\text{belasting} = \frac{q \cdot \sin(a) \cdot l}{l \cdot \sin(a)} = q.$$

De schuine belasting q op de schuine staaf kan dus worden ontbonden in een horizontale belasting q over de verticaal gemeten afstand en een verticale belasting q over de horizontale afstand.

De berekening wordt dan:

$$\begin{aligned} \sum T_{(A)} &= 0 \rightarrow -3 \cdot 5{,}2 \cdot 5{,}4 - 3 \cdot 3 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 3{,}6 \cdot 8{,}8 \\ &\quad - 3 \cdot 2{,}6 \cdot 6{,}7 - B_V \cdot 10{,}6 = 0 \\ B_V &= -10{,}8 \text{ kN} \end{aligned}$$

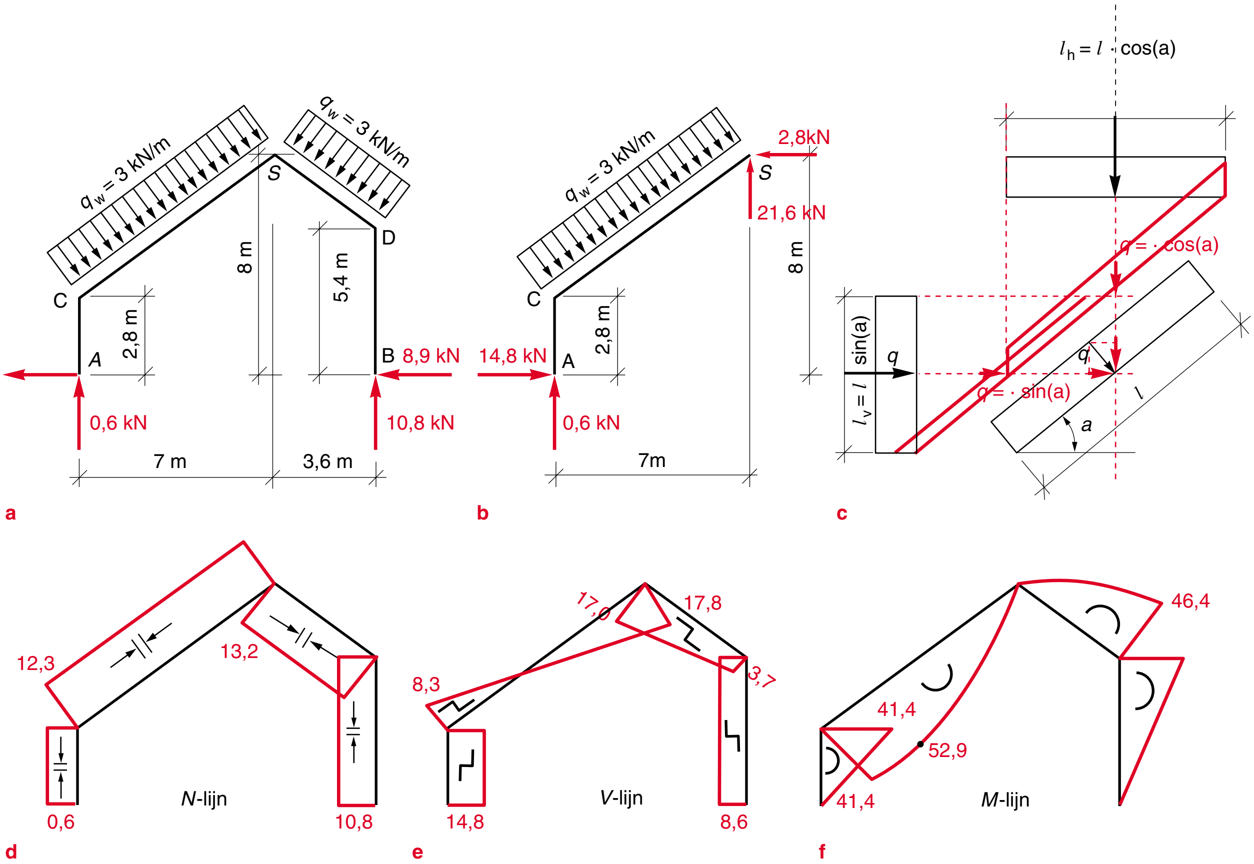
$$\sum F_V = 0 \rightarrow A_V + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 3{,}6 - 10{,}8 = 0 \rightarrow A_V = 0{,}6 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \sum T_{(S),\text{links}} &= 0 \rightarrow 3 \cdot 5{,}2 \cdot 2{,}6 + 3 \cdot 7 \cdot 3{,}5 + 0{,}6 \cdot 7 + A_H \cdot 8 \\ &= 0 \rightarrow A_H = -14{,}8 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \rightarrow -14{,}8 + 15{,}6 + 7{,}8 + B_H \\ &= 0 \rightarrow B_H = -8{,}6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Voor de berekening van de scharnierkrachten kan het evenwicht van het linker of rechter deel worden beschouwd.

Met de dan gevonden krachten kunnen de N-, V- en M-lijn worden getekend. Hierbij kan naar keuze gebruik worden gemaakt van de oorspronkelijke belasting of van de ontbonden belasting. Per berekening kan de handigste belasting worden gekozen.


q_w = 3 kN/m
q_w = 3 kN/m
S
D
C
8 m
5,4 m
2,8 m
A
B 8,9 kN
0,6 kN
10,8 kN
7 m
3,6 m
a
14,8 kN
2,8kN
21,6 kN
0,6 kN
7m
b
$l_h = l \cdot \cos(a)$
$q = \cdot \cos(a)$
$q = \cdot \sin(a)$
$l_v = l \cdot \sin(a)$
c
12,3
13,2
0,6
N-lijn
10,8
d
17,0
17,8
8,3
3,7
14,8
V-lijn
8,6
e
46,4
41,4
52,9
41,4
M-lijn
f

Figuur 2.28