Hoofdstuk 5 Meervoudige integralen, bol- en cilindercoördinaten

5.7 Herhalingsopgaven

1a

Laat x variëren van 0 tot 2; kies een willekeurige maar wel vaste x tussen 0 en 2; de bijbehorende y varieert van 0 tot $\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$.

Korter: $0 \le x \le 2$ en $0 \le y \le \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$.

De andere gebiedsbeschrijving in rechthoekscoördinaten $0 \le y \le 1$ en $0 \le x \le 2\sqrt{1-y^2}$.

Gebruikt is: $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 = 4\left(1-y^2\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{1-y^2}$, omdat $x \ge 0$.

We gaan het gebied nu in poolcoördinaten beschrijven. Het gebied wordt begrensd door de hoeken $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Voor een willekeurige, maar vaste waarde van φ tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ varieert de straal r van 0 tot op de ellips. We gaan de vergelijking van de ellips $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ omzetten in poolcoördinaten door te substitueren $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$:

$$\frac{1}{4}r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow r^2\left(\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 1$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{4}{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}}, \text{ omdat } r \ge 0$$

Voor een willekeurige, maar vaste φ, loopt de straal r dus van 0 tot $\dfrac{2}{\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}}$.

De beschrijving van G in poolcoördinaten wordt daarmee

$$0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \le r \le \frac{2}{\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}}$$

1b

De vergelijking van de cirkel $x^2 + (y-1)^2 = 1$ wordt na het uitwerken van de haakjes $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

De x- coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn berekenen we door $y = -x$ te substitueren in $x^2 + y^2 + 2x = 0$:

$$x^2 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Het is nodig het gebied in twee delen te splitsen voor de beschrijving in rechthoekscoördinaten. We beschrijven het gebied: x loopt van -1 tot 0 en voor een willekeurige, vaste x op het interval $[-1,0]$ loopt y van -1 tot de cirkel.

We lossen y op uit $x^2 + (y-1)^2 = 1$:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

In dit geval is $y \ge 1$, zodat er geldt $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Vervolgens loopt x van 0 tot 1 en voor een willekeurige, vaste x op het interval $[0,1]$ loopt y dan van $y=1-\sqrt{1-x^2}$ tot $y=1+\sqrt{1-x^2}$.
Kortweg

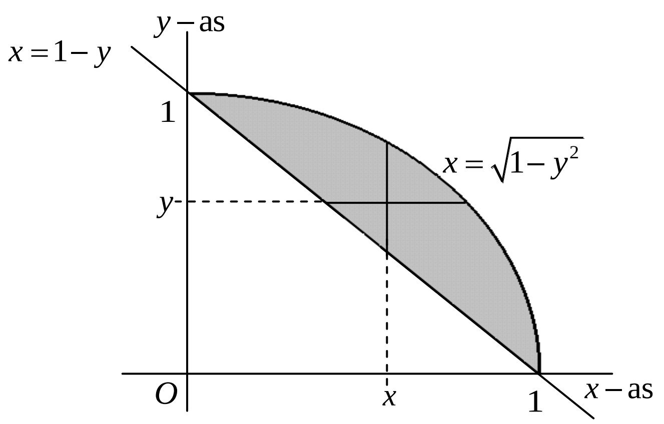
$$\begin{cases} -1 \le x \le 0 \quad \text{en} \quad -x \le y \le 1+\sqrt{1-x^2} \\ 0 \le x \le 1 \quad \text{en} \quad 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

De afleiding van de tweede gebiedsbeschrijving in rechthoekscoördinaten is op overeenkomstige wijze te geven en wordt achterwege gelaten. De beschrijving is

$$\begin{cases} 0 \le y \le 0 \quad \text{en} \quad -y \le x \le \sqrt{2y-y^2} \\ 1 \le y \le 2 \quad \text{en} \quad -\sqrt{2y-y^2} \le x \le \sqrt{2y-y^2} \end{cases}$$

We gaan het gebied nu in poolcoördinaten beschrijven. Het gebied wordt begrensd door de hoeken $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Voor een willekeurige, maar vaste waarde van φ tussen 0 en $\frac{3}{4}\pi$ varieert de straal r van 0 tot op de cirkel. We gaan de vergelijking van de cirkel $x^2+y^2-2y=0$ omzetten in poolcoördinaten door te substitueren $x^2+y^2=r^2$ en $y=r\sin\varphi$: $r^2-2r\sin\varphi=0 \Leftrightarrow r\left(r-2\sin\varphi\right)=0 \Rightarrow r=0 \vee r=2\sin\varphi$
Voor een willekeurige, maar vaste φ, loopt de straal r dus van 0 tot $r=2\sin\varphi$.
De beschrijving van G in poolcoördinaten wordt daarmee $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi$ en $0 \le r \le 2\sin\varphi$.

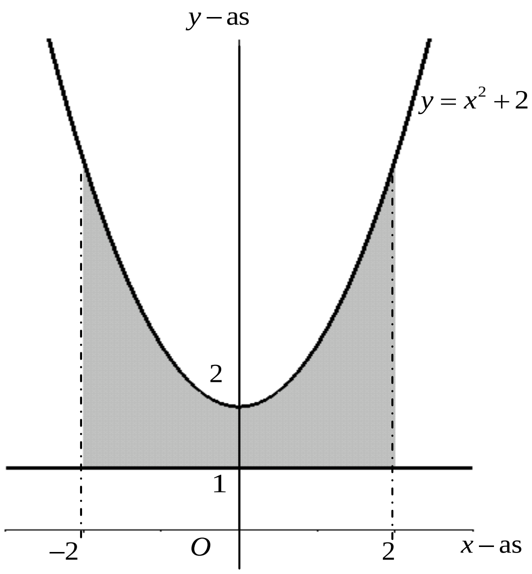
2a
Schets van het gebied



Figuur 1

Tweede gebiedsbeschrijving:
$0 \le x \le 1$ en $1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$

2b
Schets van het gebied



Figuur 2

Tweede gebiedsbeschrijving is in twee delen:

$$\begin{cases} 1\le y\le 2 \text{ en } -2\le x\le 2 \\ 2\le y\le 6 \text{ en } -2\le x\le -\sqrt{y-2} \\ 2\le y\le 6 \text{ en } \sqrt{y-2}\le x\le 2 \end{cases}$$

3a

$$\int_0^2\int_{-u}^{\sqrt{u}}(u+v+1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{du}=\int_0^2\left[uv+\tfrac{1}{2}v^2+v\right]_{v=-u}^{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^2\left(u^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}u+\sqrt{u}-\left(-u^2+\tfrac{1}{2}u^2-u\right)\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^2\left(\tfrac{1}{2}u^2+u^{\frac{3}{2}}+\tfrac{3}{2}u+u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left[\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\tfrac{3}{4}u^2+\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{5}4\sqrt{2}+3+\tfrac{4}{3}\sqrt{2}=\tfrac{44}{15}\sqrt{2}+\tfrac{13}{3}$$

3b

$$\int_0^\pi \int_0^{t^2} t\cos\left(y+t^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi t\left\{\int_{y=0}^{t^2} \cos\left(y+t^2\right)\mathrm{d}\left(y+t^2\right)\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi t\left[\sin\left(y+t^2\right)\right]_{y=0}^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\pi t\left(\sin\left(2t^2\right)-\sin\left(t^2\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi t\sin\left(2t^2\right)\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin\left(2t^2\right)\mathrm{d}\left(2t^2\right) - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}\left(t^2\right)$$

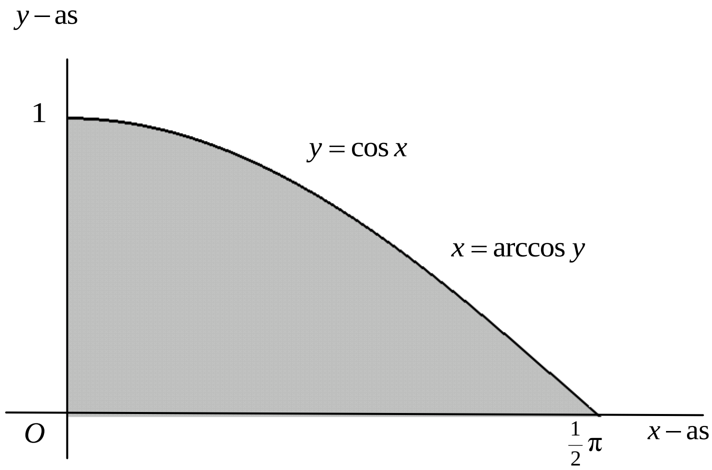
$$= -\frac{1}{4}\left[\cos\left(2t^2\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\cos\left(t^2\right)\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{4}\cos\left(2\pi^2\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\pi^2\right) - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\cos\left(2\pi^2\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\pi^2\right) - \frac{1}{4}$$

4a

We draaien de integratievolgorde om. Zie figuur 3.



Figuur 3

$$\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\cos x} \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{\sin x}\left[y\right]_{y=0}^{\cos x}\mathrm{d}x$$

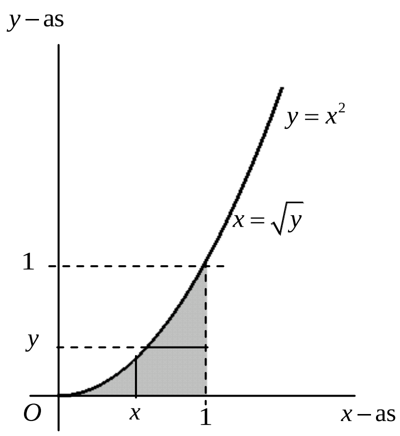
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= \left[\mathrm{e}^{\sin x}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \mathrm{e}^{\sin\frac{1}{2}\pi} - \mathrm{e}^{\sin 0} = \mathrm{e}-1$$

4b

We draaien de integratievolgorde om. Zie figuur 4.



Figuur 4

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\int_0^{x^2} y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_0^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$$

$$= \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$$

5a

We gaan over op poolcoördinaten

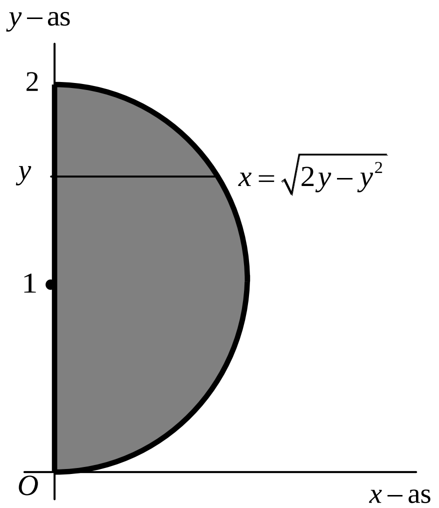
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Het gebied G volgt uit de integratiegrenzen.

Voor een y tussen 0 en 2 varieert x van 0 tot $x=\sqrt{2y-y^2}$

$$x=\sqrt{2y-y^2}\Rightarrow x^2+y^2-2y=0\Rightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=1$$

De laatste uitdrukking is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $\left(0,1\right)$ en straal 1. Het gebied *G* is geschetst in figuur 5.



Figuur 5

We gaan *G* in poolcoördinaten beschrijven. Vrij eenvoudig is in te zien dat $0\le\varphi\le\frac{1}{2}\pi$. We zien ook dat voor willekeurige, maar vaste φ tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ de straal *r* loopt van 0 tot op de cirkel. Om de waarde van *r* op de cirkel te kunnen bepalen, moeten we de cirkel in poolcoördinaten beschrijven.

In de vergelijking $x^2+y^2-2y=0$ substitueren we $y=r\sin\varphi$ en $x^2+y^2=r^2$.

Dit geeft:

$$r^2-2r\sin\varphi=0\Rightarrow r\left(r-2\sin\varphi\right)=0\Rightarrow r=0\vee r=2\sin\varphi$$

Dit betekent dat voor een willekeurige, maar vaste φ de straal *r* loopt van 0 tot $2\sin\varphi$

De gebiedsbeschrijving in poolcoördinaten is $0\le\varphi\le\frac{1}{2}\pi$ en $0\le r\le 2\sin\varphi$.

De berekening van de gevraagde integraal verloopt nu als volgt.

$$\begin{aligned}\iint_G\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\sin\varphi}r^3\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

We werken $\sin^4\varphi$ om tot een integreerbare uitdrukking.

$$
\begin{aligned}
\sin^4\varphi &= \left(\sin^2\varphi\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}-2\cos 2\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 4\varphi\right)
\end{aligned}
$$

Er volgt

$$
\begin{aligned}
\iint_G \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\tfrac{3}{2}-2\cos 2\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 4\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \tfrac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}(2\varphi)-\tfrac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 4\varphi\,\mathrm{d}(4\varphi) \\
&= \left[\tfrac{3}{2}\varphi-\sin 2\varphi-\tfrac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

5b

We gaan over op poolcoördinaten.

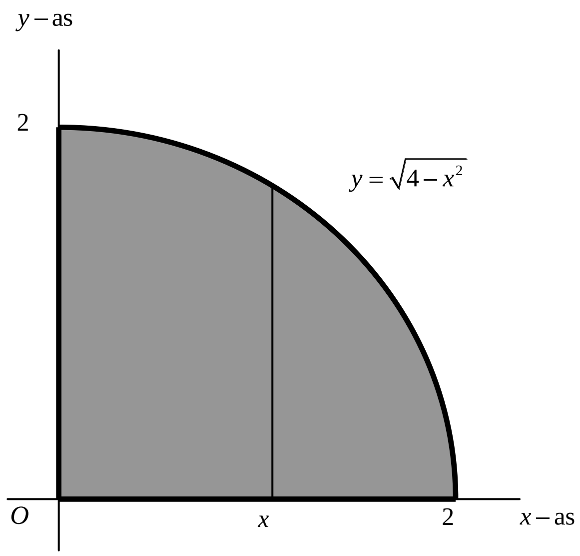
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Het gebied G volgt uit de integratiegrenzen.

Voor een x tussen 0 en 2 varieert y van 0 tot $y=\sqrt{4-x^2}$

$$y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=4$$

De laatste uitdrukking is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 2. Het gebied G is geschetst in figuur 6.



Figuur 6

Er volgt

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^2 \sqrt{4-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^2 \left(4-r^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(4-r^2\right)\mathrm{d}\varphi$$

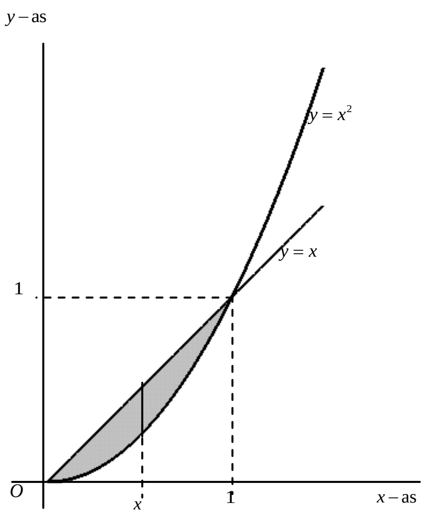
$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(0-8\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\left[\varphi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}\pi$$

6

Het vlak $x+y+z=2$ is de grafiek van de functie $z=f\left(x,y\right)=2-x-y$. Het lichaam wordt begrensd door de grafiek van f en het gebied G in het xy-vlak volgens figuur 7.



Figuur 7

$$V=\iint_G (2-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{y=x^2}^{x}(2-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[2y-xy-\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(2x-\tfrac{3}{2}x^2-\left(2x^2-x^3-\tfrac{1}{2}x^4\right)\right)\mathrm{d}x$$

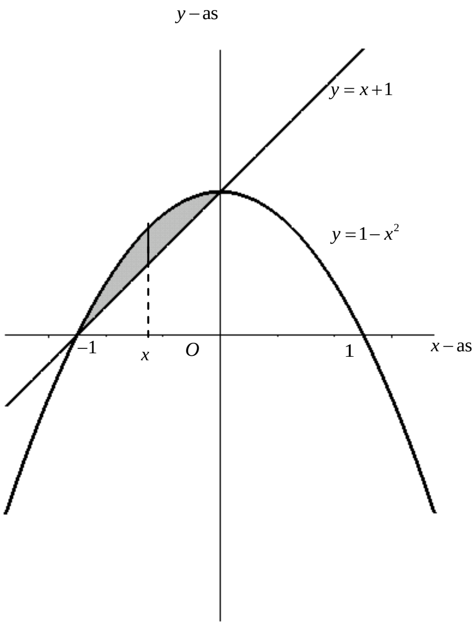
$$=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}x^4+x^3-\tfrac{7}{2}x^2+2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{6}x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{7}{6}+1=\frac{6+15-70+60}{60}=\frac{11}{60}$$

7

Een schets van het gebied is te zien in figuur 8.



Figuur 8

$$O=\iint_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\int_{y=x+1}^{1-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\left[y\right]_{y=x+1}^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(1-x^2-\left(x+1\right)\right)\mathrm{d}x$$

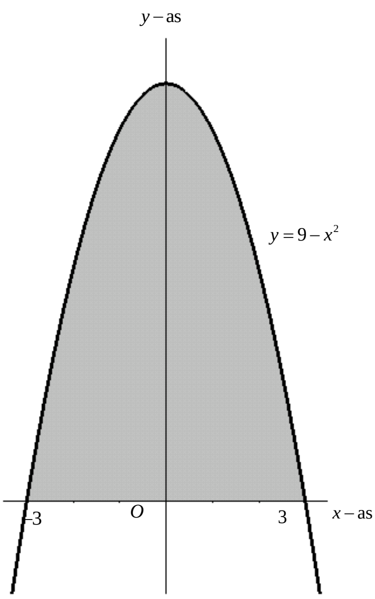
$$=\int_{-1}^{0}\left(-x^2-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{3}\left(-1\right)^3-\frac{1}{2}\left(-1\right)^2\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

8

Een schets van het gebied is te zien in figuur 9.



Figuur 9

$$I = \iint_G x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-3}^{3} \int_{y=0}^{9-x^2} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{3} x^2 \left[y\right]_{y=0}^{9-x^2} \mathrm{d}x$$

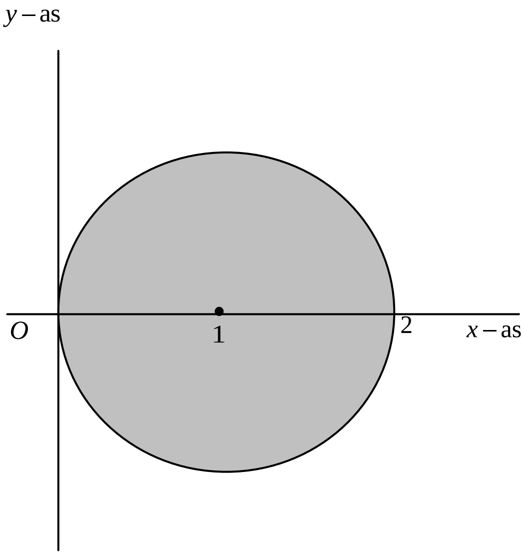
$$= \int_{-3}^{3} \left(9x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\left(3x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right)\right]_{-3}^{3}$$

$$= 3\cdot 27 - \frac{3^5}{5} - \left(3\cdot -27 - \frac{(-3)^5}{5}\right) = \tfrac{324}{5}$$

9

Een schets van het gebied is te zien in figuur 10.



Figuur 10

Er geldt $I_p = \iint_G \rho(x,y) r^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

We gaan G in poolcoördinaten beschrijven. Vrij eenvoudig is in te zien dat $-\frac{1}{2}\pi \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$.

We zien ook dat voor willekeurige, maar vaste φ tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ de straal r loopt van 0 tot op de cirkel. Om de waarde van r op de cirkel te kunnen bepalen, moeten we de cirkel in poolcoördinaten beschrijven. De vergelijking van de cirkel $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 1$ is na het uitwerken van de haakjes te herschrijven tot $x^2+y^2-2x=0$.

In de vergelijking $x^2+y^2-2x=0$ substitueren we $x = r\cos\varphi$ en $x^2+y^2=r^2$.

Dit geeft $r^2 - 2r\cos\varphi = 0 \Rightarrow r\left(r-2\cos\varphi\right)=0 \Rightarrow r=0 \vee r = 2\cos\varphi$.

Dit betekent dat voor een willekeurige, maar vaste φ de straal r loopt van 0 tot $2\cos\varphi$.

De gebiedsbeschrijving in poolcoördinaten is $-\frac{1}{2}\pi \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$ en $0 \le r \le 2\cos\varphi$.

De berekening van de gevraagde integraal verloopt nu als volgt

$$\begin{aligned}\iint_G \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\cos\varphi} r^5 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\frac{1}{6}r^6\right]_0^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{32}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^6\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Deze laatste integraal is handmatig veel werk, maar het is wel mogelijk. We moeten dan als volgt handelen:

$$\begin{aligned}\cos^6\varphi &= \left(\cos^2\varphi\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2\varphi+3\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 4\varphi\right)\right)+\cos^2 2\varphi\cos 2\varphi\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}+3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}\cos 4\varphi+\left(1-\sin^2 2\varphi\right)\cos 2\varphi\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}+4\cos 2\varphi+\frac{3}{2}\cos 4\varphi+\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\right)\end{aligned}$$

Nu is elke term te integreren.

$$\begin{aligned}\iint_G \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{32}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^6\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{5}{2}+4\cos 2\varphi+\frac{3}{2}\cos 4\varphi+\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{10}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{d}\varphi+\frac{16}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi+2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 4\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{10}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{d}\varphi+\frac{8}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\left(2\varphi\right)+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 4\varphi\,\mathrm{d}\left(4\varphi\right)+\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\left(\sin 2\varphi\right) \\ &= \left[\frac{10}{3}\varphi+\frac{8}{3}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 4\varphi+\frac{2}{9}\sin^3 2\varphi\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{10}{3}\pi\end{aligned}$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$ en $-\sqrt{r^2+1} \le z \le \sqrt{r^2+1}$

11

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ en $0 \le r \le 2\cos\theta$