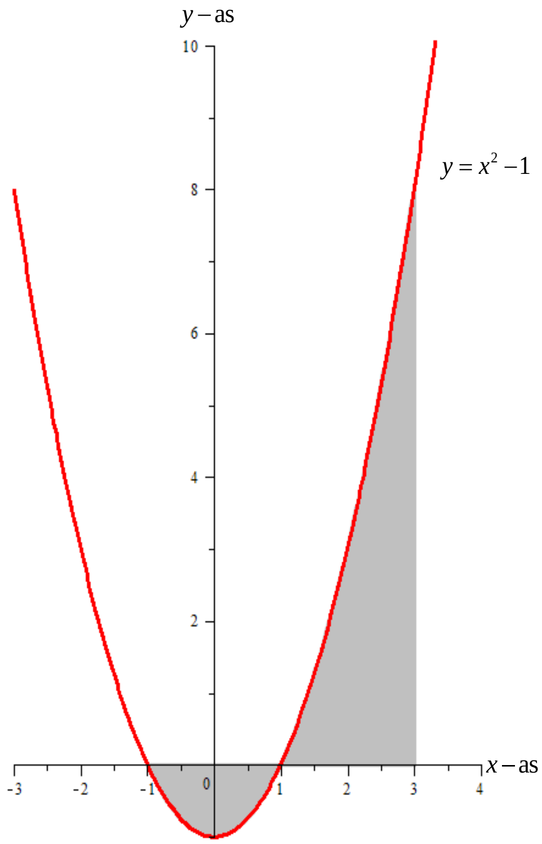
## Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 7 Toepassingen van de integraalrekening

### 7.1 Oppervlakteberekeningen

Opgave 1
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.1.




Figuur 7. 1

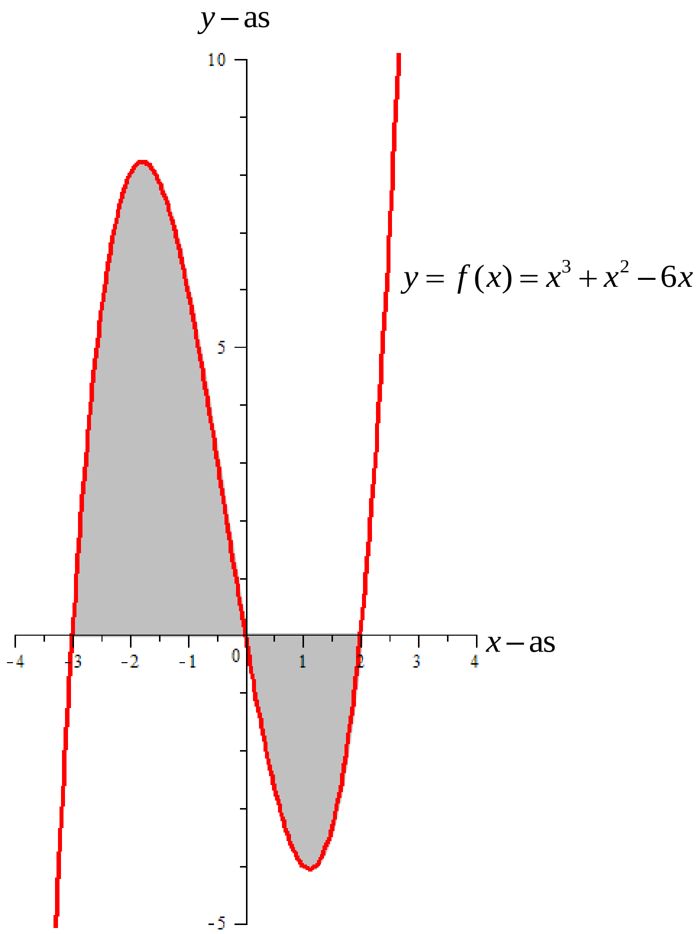
Voor het berekenen van de integratiegrenzen lossen we op: $x^2-1=0$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$$

De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$\begin{aligned} O &= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x \\ &=\left[x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}+\left[\tfrac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{3} \\ &=1-\tfrac{1}{3}-\left(-1+\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{3}\cdot 27-3-\left(\tfrac{1}{3}-1\right) \\ &=\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}+9-3+\tfrac{2}{3}=8 \end{aligned}$$

Opgave 2
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.2.




Figuur 7.2

Voor het berekenen van de integratiegrenzen lossen we op: $x^3+x^2-6x=0$

$$x^3+x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-3$$

De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$O=\int_{-3}^{0}\left(x^3+x^2-6x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}-\left(x^3+x^2-6x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=0-\left(\tfrac{81}{4}-9-27\right)+\left(-4-\tfrac{8}{3}+12\right)$$

$$=36-\frac{81}{4}-\frac{8}{3}+8=\frac{253}{12}$$

Opgave 3

a Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.3.

De *x*-coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$x^2 = 3x$$

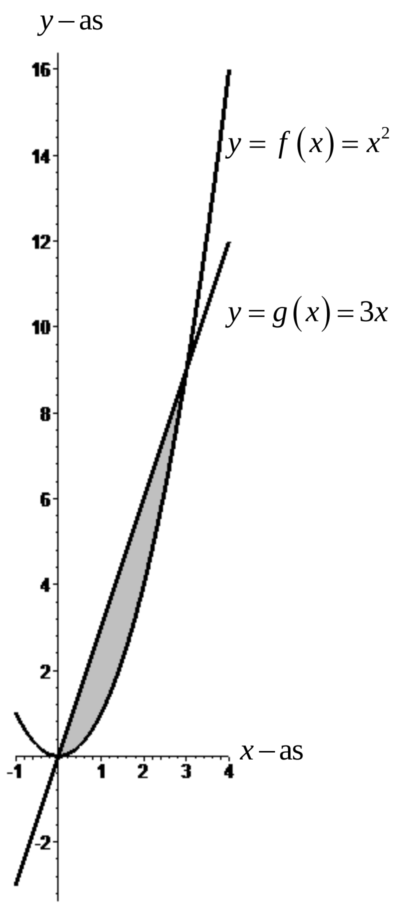
$$x^2 = 3x \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Er volgt:

$$O = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= \tfrac{3}{2} \cdot 9 - \tfrac{1}{3} \cdot 27 = \tfrac{9}{2}$$




Figuur 7.3

b Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.4.

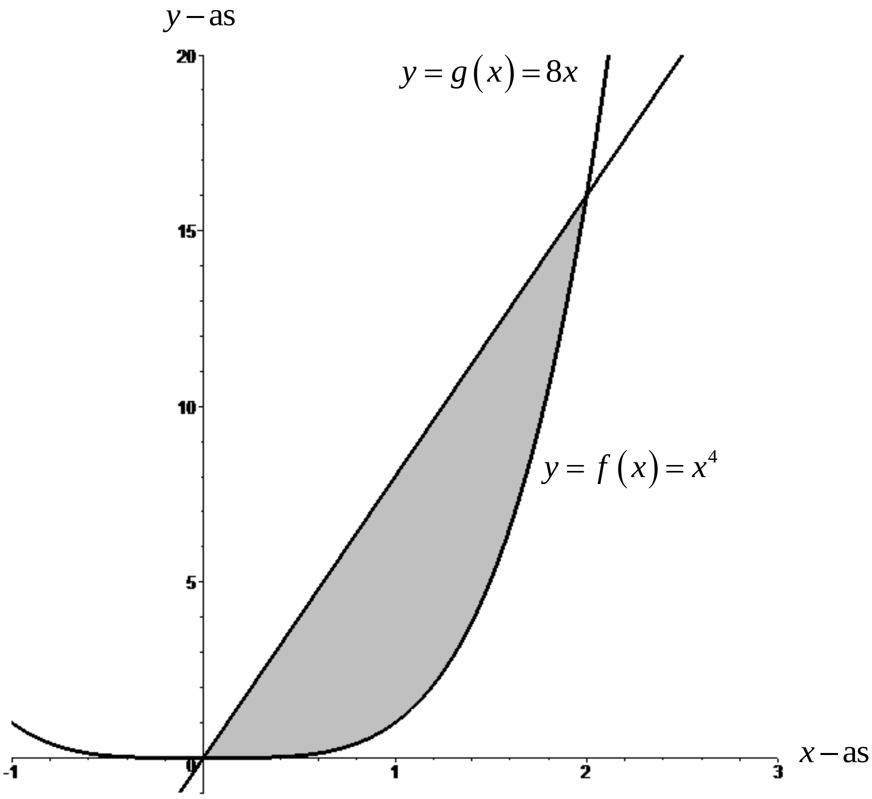
De $x$-coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$x^4 = 8x$$

$$x^4 = 8x \Leftrightarrow x\left(x^3 - 8\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

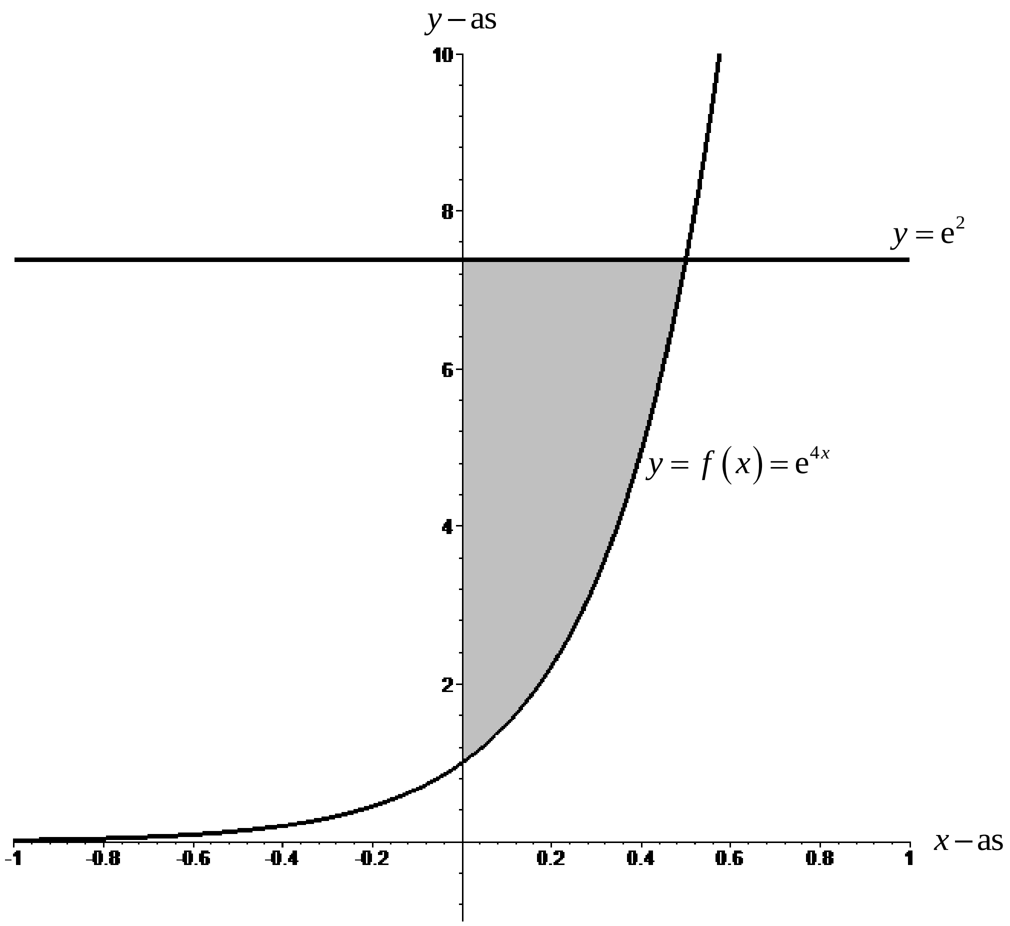
Er volgt:

$$\begin{aligned} O &= \int_0^2 \left(8x - x^4\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[4x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\ &= 16 - \tfrac{1}{5} \cdot 32 = \tfrac{48}{5} \end{aligned}$$




Figuur 7.4

Opgave 4
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.5.




Figuur 7.5

De bovengrens is de oplossing van de vergelijking $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^2$

$$\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

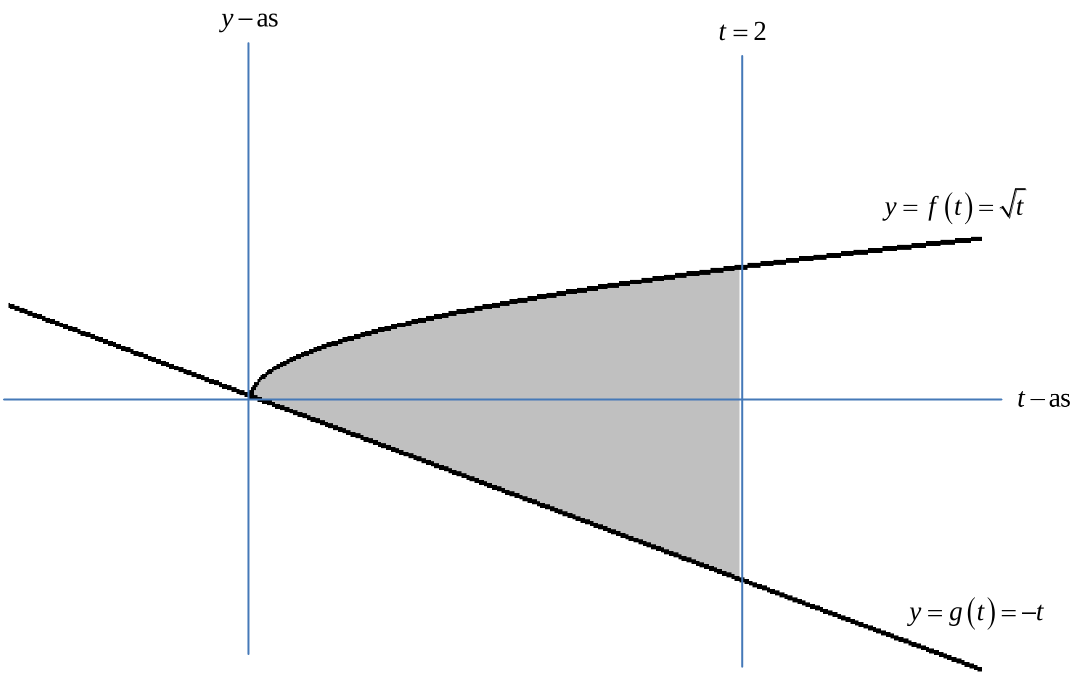
De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$O = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\mathrm{e}^2 x - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$$

Opgave 5
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.6.




Figuur 7.6

$$
\begin{aligned}
O &= \int_0^2 \left(\sqrt{t}-(-t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \left(t^{\frac{1}{2}}+t\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}+2=\frac{4}{3}\sqrt{2}+2
\end{aligned}
$$

## 7.2 Versnelling, snelheid en weglengte

Opgave 1

We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de afstandsfunctie $s(t)$ en de snelheid en de gereden afstand na 20 seconden.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \tfrac{4}{5} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\,\mathrm{d}t \\ &= -40\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\,\mathrm{d}t\left(-\tfrac{1}{50}t\right) \\ &= -40 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + C_v \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 0$ m/s, dit levert op de vergelijking $0 = -40 + C_v$, zodat $C_v = 40$ en $v(t) = -40 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + 40$ (m/s).

De snelheid na 20 seconden: $v(20) \approx 13{,}187$ m/s.

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned} s &= \int v\,\mathrm{d}t = \int \left(-40 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + 40\right)\mathrm{d}t \\ &= -40\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\,\mathrm{d}t + 40\int 1\mathrm{d}t \\ &= 2000\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\,\mathrm{d}t\left(-\frac{1}{50}t\right) + 40\int 1\mathrm{d}t \\ &= 2000 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + 40t + C_s \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_s = -2000$ en $s(t) = 2000 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + 40t - 2000$ (m).

De gereden afstand na 20 seconden: $s(20) \approx 140{,}640$ m.

Opgave 2

We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de remtijd, de afstandsfunctie $s(t)$ en uiteindelijk de remweg.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int a(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \frac{12}{\sqrt{1+\frac{1}{3}t}}\,\mathrm{d}t \\
&= -36\int \left(1+\tfrac{1}{3}t\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(1+\tfrac{1}{3}t\right) \\
&= -72\sqrt{1+\tfrac{1}{3}t} + C_v
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 50$ m/s, dit levert op de vergelijking $50 = -72 + C_v$, zodat $C_v = 122$ en $v(t) = -72\sqrt{1+\frac{1}{3}t} + 122\ (\text{m/s})$.

Vervolgens lossen we op: $v(t) = 0$.

$$v(t) = 0 \Rightarrow -72\sqrt{1+\tfrac{1}{3}t} + 122 = 0 \Rightarrow \sqrt{1+\tfrac{1}{3}t} = \frac{61}{36} \Rightarrow t = 3\left(\left(\frac{61}{36}\right)^2 - 1\right) = 5{,}61342593 \text{ sec}$$

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned}
s &= \int v\,\mathrm{d}t = \int \left(-72\sqrt{1+\tfrac{1}{3}t} + 122\right)\mathrm{d}t \\
&= -216\int \left(1+\tfrac{1}{3}t\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(1+\tfrac{1}{3}t\right) + 122\int 1\,\mathrm{d}t \\
&= -144\left(1+\tfrac{1}{3}t\right)\sqrt{1+\tfrac{1}{3}t} + 122t + C_s
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_s = 144$ en $s(t) = -144\left(1+\frac{1}{3}t\right)\sqrt{1+\frac{1}{3}t} + 122t + 144\ (\text{m})$.

De remweg:

$$s(5{,}61342593) = 128{,}279 \text{ m}$$

Opgave 3

Eerst berekenen we de snelheid $v(t)$ en de hoogtefunctie $h(t)$ en beantwoorden vervolgens de gestelde vragen.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int a(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int 9{,}81\,\mathrm{d}t \\
&= -9{,}81t + C_v
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 60$ m/s, dit levert op de vergelijking $60 = 0 + C_v$, zodat $C_v = 60$ en $v(t) = -9{,}81t + 60\ (\text{m/s})$.

De hoogtefunctie:

$$\begin{aligned}
h &= \int v\,\mathrm{d}t = \int (-9{,}81t + 60)\,\mathrm{d}t \\
&= -4{,}905t^2 + 60t + C_h
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $h = 10$ m, zodat $C_h = 10$ en $h(t) = -4{,}905t^2 + 60t + 10\ (\text{m})$.

a Het projectiel begint te dalen op het moment dat $v(t) = 0$:

$v(t)=0 \Rightarrow -9{,}81t+60=0 \Rightarrow t=\frac{60}{9{,}81}=6{,}11620795 \text{ sec}$

De bereikte hoogte is dan:

$$h(6{,}11620795)=193{,}486 \text{ m}$$

b De oplossing van $h(t)=10$: $-4{,}905t^2+60t+10=10$ zijn $t=0$ en $t=12{,}2324159$.
Het gevraagde tijdstip $t=12{,}232 \text{ sec.}$ (dit is $2\cdot 6{,}116 \text{ sec}$).

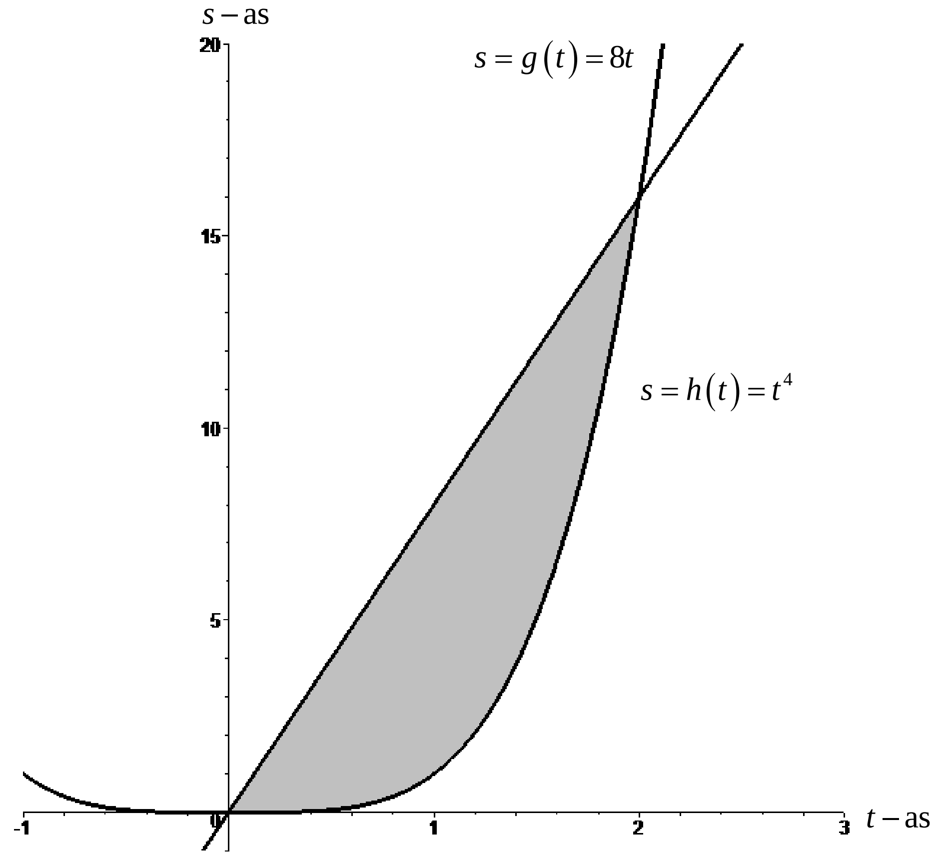
c We lossen *t* op uit $h(t)=0$: $-4{,}905t^2+60t+10=0$. De oplossingen zijn:
$t=-0{,}164455683$ en $t=12{,}3968716$.
De snelheid waarmee het projectiel op de grond komt:

$$v(12{,}3968716)=-61{,}6133103$$

De gevraagde snelheid: $61{,}613 \text{ m/s}$

## 7.4 Volume van omwentelingslichamen

Opgave 1
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.7.



Figuur 7.7

De *t*-coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$t^4 = 8t$$

$$t^4 = 8t \Leftrightarrow t\left(t^3 - 8\right) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$$

a Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van *G* om de *t*-as:

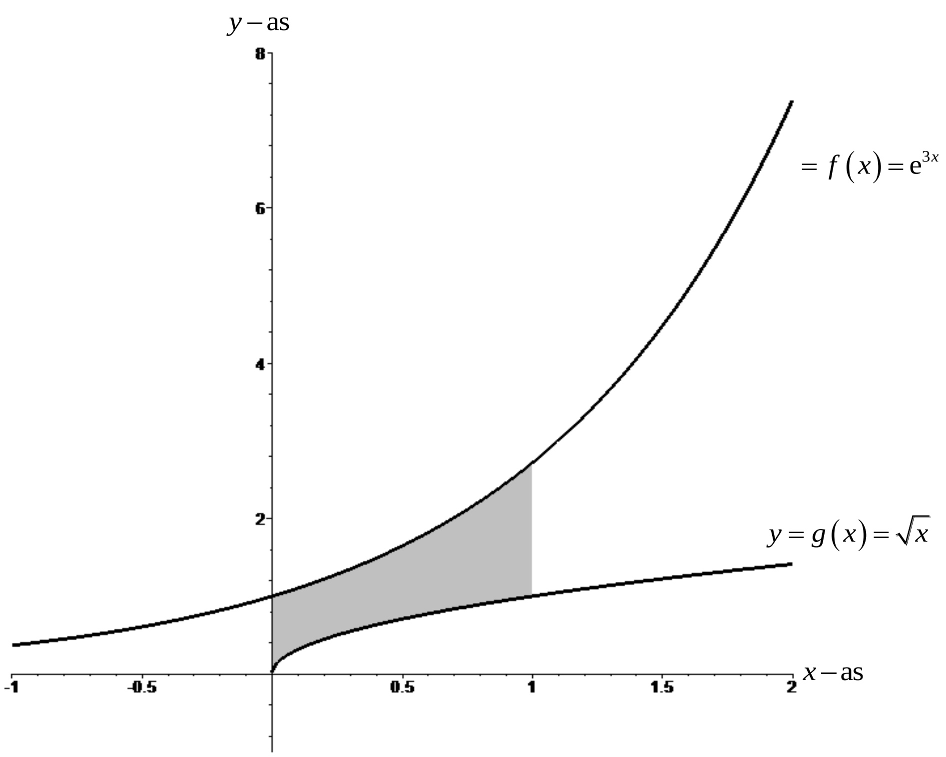
$$V_t = \pi\int_0^2 (8t)^2\,\mathrm{d}t - \pi\int_0^2 \left(t^4\right)^2\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi\int_0^2 64t^2\,\mathrm{d}t - \pi\int_0^2 t^8\,\mathrm{d}t$$
$$= 64\pi\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 - \pi\left[\frac{1}{9}t^9\right]_0^2$$
$$= \frac{512}{3}\pi - \frac{512}{9}\pi = \frac{1024}{9}\pi$$

b Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van *G* om de *s*-as:

$$V_s = 2\pi\int_0^2 t\cdot 8t\,\mathrm{d}t - 2\pi\int_0^2 t\cdot t^4\,\mathrm{d}t$$
$$= 16\pi\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 2\pi\int_0^2 t^5\,\mathrm{d}t$$
$$= 16\pi\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 - 2\pi\left[\frac{1}{6}t^6\right]_0^2$$
$$= \frac{128}{3}\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi$$

Opgave 2

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.8.



Figuur 7.8

a

$$V_x=\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^1\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^1x\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x}\right]_0^1-\pi\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\tfrac{1}{6}\pi\left(\mathrm{e}^6-1\right)-\tfrac{1}{2}\pi=\tfrac{1}{6}\pi\cdot\mathrm{e}^6-\tfrac{2}{3}\pi$$

b

$$V_y=2\pi\int_0^1x\cdot\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^1x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^1x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right)-2\pi\int_0^1x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

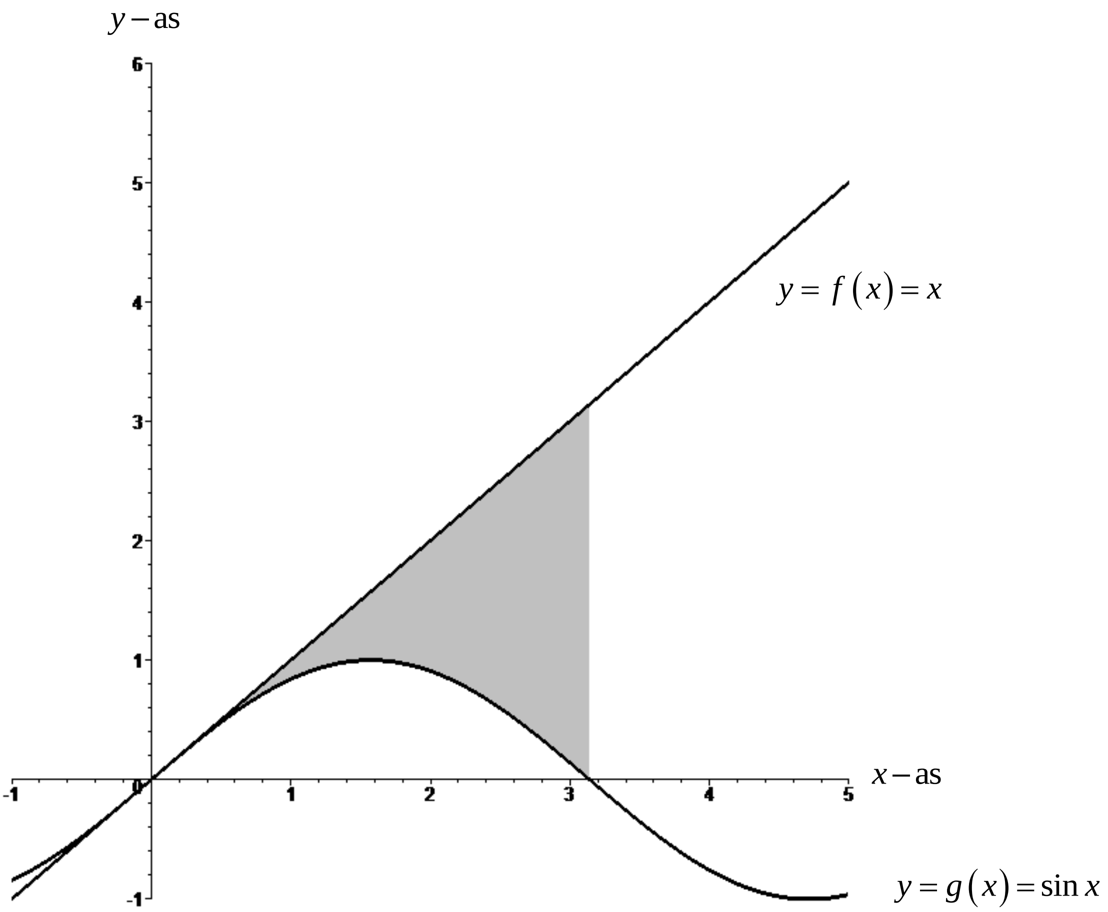
$$=\tfrac{2}{3}\pi\left[x\cdot\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1-\tfrac{2}{3}\pi\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x-2\pi\left[\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=\tfrac{2}{3}\pi\cdot\mathrm{e}^3-\tfrac{2}{9}\pi\left[\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1-2\pi\cdot\tfrac{2}{5}$$

$$=\tfrac{2}{3}\pi\cdot\mathrm{e}^3-\tfrac{2}{9}\pi\left(\mathrm{e}^3-1\right)-\tfrac{4}{5}\pi$$

$$=\tfrac{4}{9}\pi\cdot\mathrm{e}^3-\tfrac{26}{45}\pi$$

Opgave 3
Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.9.




Figuur 7.9

a

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^{\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^{\pi} \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} - \pi\left[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{3}\pi^4 - \tfrac{1}{2}\pi^2
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi\int_0^{\pi} x \cdot x\,\mathrm{d}x - 2\pi\int_0^{\pi} x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}\cos x \\
&= 2\pi\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} + 2\pi\left[x\cos x\right]_0^{\pi} - 2\pi\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{3}\pi^4 - 2\pi^2 - 2\pi\left[\sin x\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{2}{3}\pi^4 - 2\pi^2
\end{aligned}
$$