

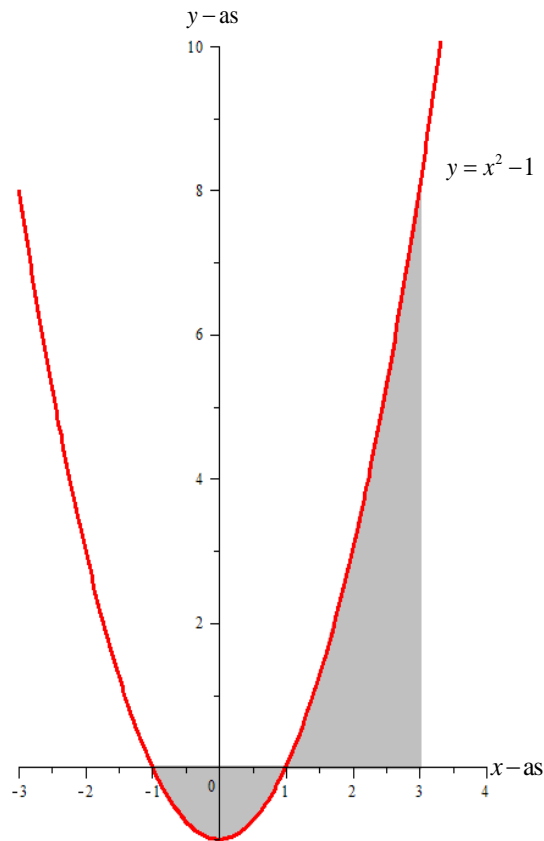


Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 7 Toepassingen van de integraalrekening

7.1 Oppervlakteberekeningen

Opgave 1

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.1.



Figuur 7. 1

Voor het berekenen van de integratiegrenzen lossen we op: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

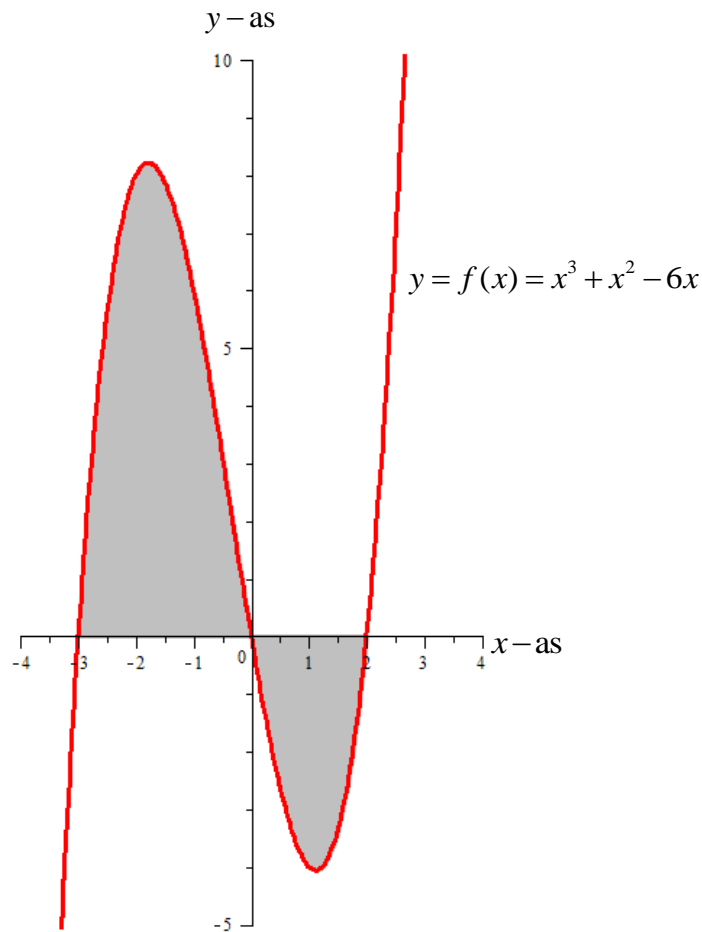
De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$\begin{aligned} O &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^3 \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot 27 - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 9 - 3 + \frac{2}{3} = 8 \end{aligned}$$



Opgave 2

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.2.



Figuur 7.2

Voor het berekenen van de integratiegrenzen lossen we op: $x^3 + x^2 - 6x = 0$

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$$

De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$\begin{aligned} O &= \int_{-3}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx + \int_0^2 -(x^3 + x^2 - 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-3}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2 \\ &= 0 - \left(\frac{81}{4} - 9 - 27 \right) + \left(-4 - \frac{8}{3} + 12 \right) \\ &= 36 - \frac{81}{4} - \frac{8}{3} + 8 = \frac{253}{12} \end{aligned}$$



Opgave 3

a Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.3.

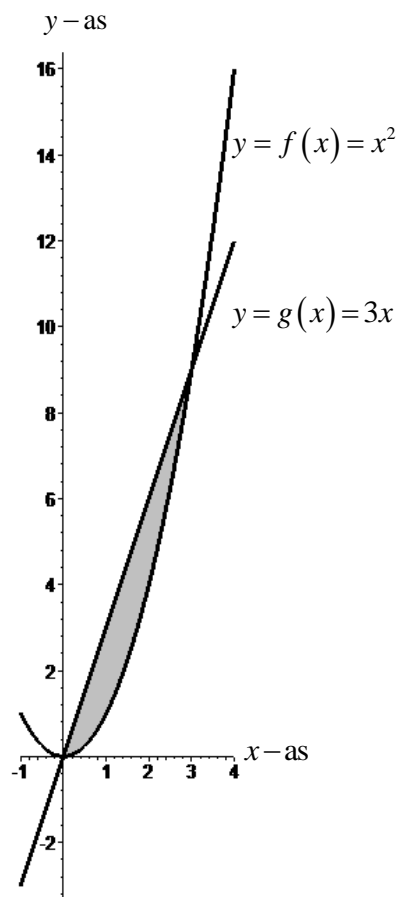
De x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$x^2 = 3x$$

$$x^2 = 3x \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} O &= \int_0^3 (3x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 27 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



Figuur 7.3



b Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.4.

De x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$x^4 = 8x$$

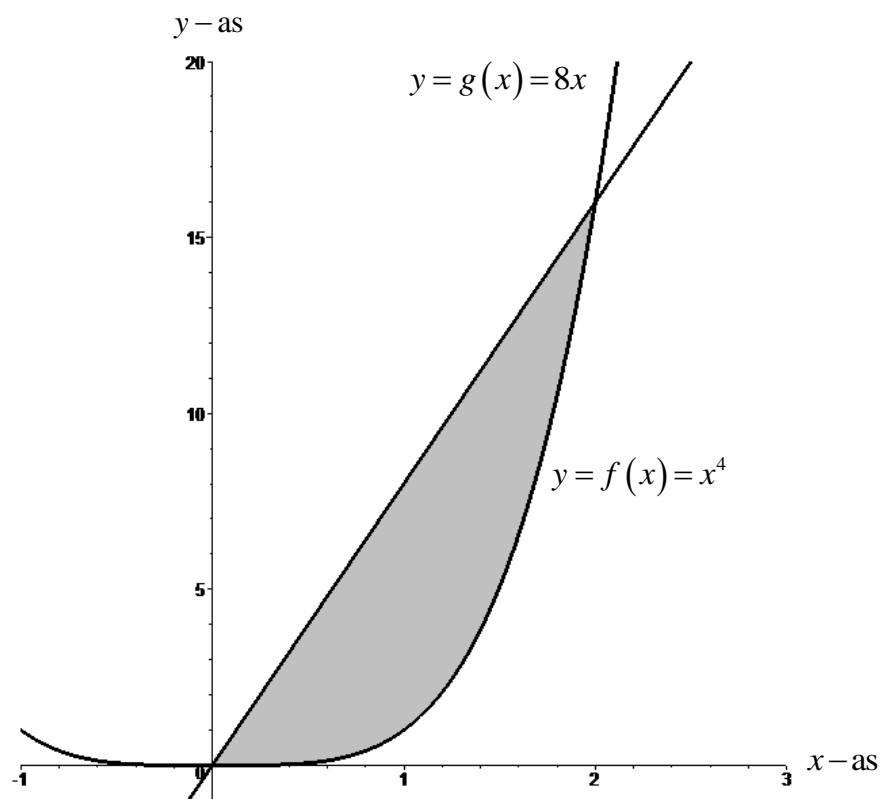
$$x^4 = 8x \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Er volgt:

$$O = \int_0^2 (8x - x^4) dx$$

$$= \left[4x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2$$

$$= 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 = \frac{48}{5}$$

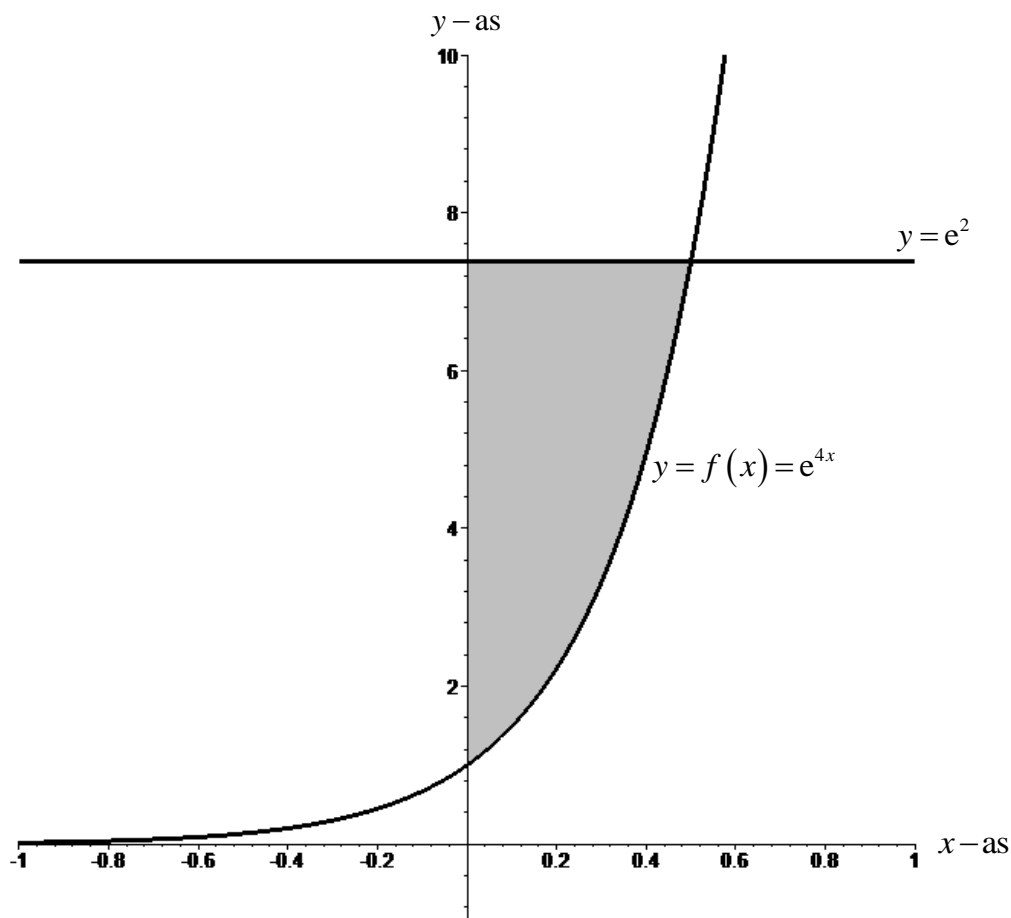


Figuur 7.4



Opgave 4

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.5.



Figuur 7.5

De bovengrens is de oplossing van de vergelijking $e^{4x} = e^2$

$$e^{4x} = e^2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

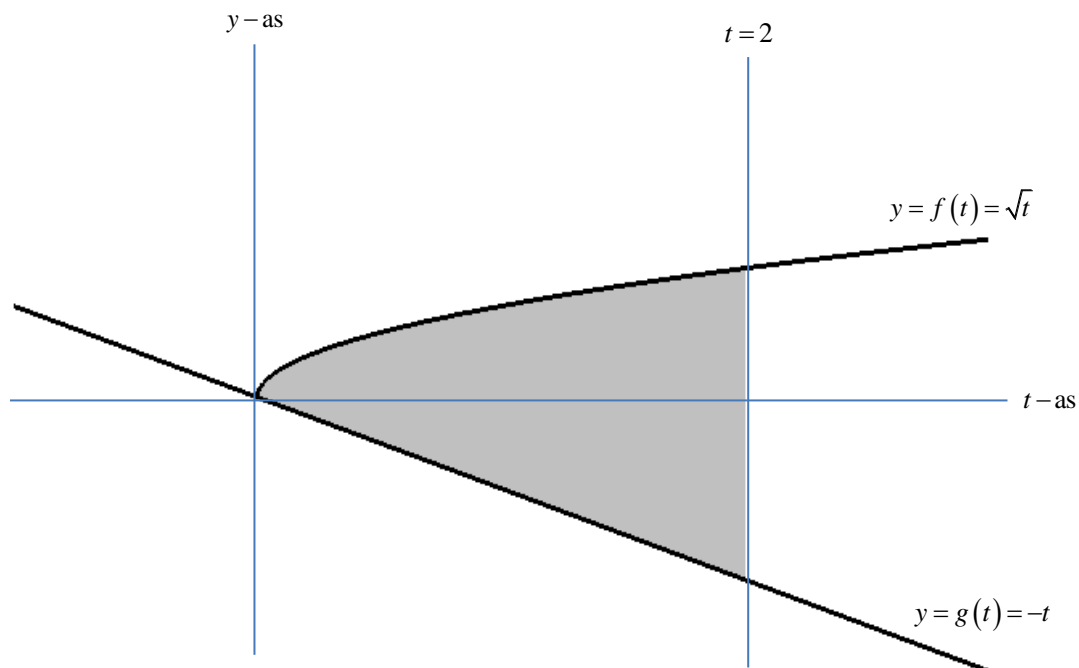
De oppervlakte kan vervolgens berekend worden:

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^2 - e^{4x} \, dx \\ &= \left[e^2 x - \frac{1}{4} e^{4x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Opgave 5

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.6.



Figuur 7.6

$$\begin{aligned} O &= \int_0^2 (\sqrt{t} - (-t)) dt \\ &= \int_0^2 \left(t^{\frac{1}{2}} + t \right) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + 2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$



7.2 Versnelling, snelheid en weglengte

Opgave 1

We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de afstandsfunctie $s(t)$ en de snelheid en de gereden afstand na 20 seconden.

$$\begin{aligned}v(t) &= \int \frac{4}{5} \cdot e^{-\frac{1}{50}t} dt \\&= -40 \int e^{-\frac{1}{50}t} dt \left(-\frac{1}{50}t\right) \\&= -40 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + C_v\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 0$ m/s, dit levert op de vergelijking $0 = -40 + C_v$, zodat $C_v = 40$ en

$$v(t) = -40 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 40 \text{ (m/s)}.$$

De snelheid na 20 seconden: $v(20) \approx 13,187$ m/s.

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned}s &= \int v dt = \int \left(-40 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 40\right) dt \\&= -40 \int e^{-\frac{1}{50}t} dt + 40 \int 1 dt \\&= 2000 \int e^{-\frac{1}{50}t} dt \left(-\frac{1}{50}t\right) + 40 \int 1 dt \\&= 2000 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 40t + C_s\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_s = -2000$ en $s(t) = 2000 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} + 40t - 2000$ (m).

De gereden afstand na 20 seconden: $s(20) \approx 140,640$ m.

Opgave 2

We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de remtijd, de afstandsfunctie $s(t)$ en uiteindelijk de remweg.

$$\begin{aligned}v(t) &= \int a(t) dt \\&= - \int \frac{12}{\sqrt{1+\frac{1}{3}t}} dt \\&= -36 \int \left(1+\frac{1}{3}t\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{1}{3}t\right) \\&= -72 \sqrt{1+\frac{1}{3}t} + C_v\end{aligned}$$



Als $t = 0$ s, dan is $v = 50$ m/s, dit levert op de vergelijking $50 = -72 + C_v$, zodat $C_v = 122$ en

$$v(t) = -72\sqrt{1 + \frac{1}{3}t} + 122 \text{ (m/s)}.$$

Vervolgens lossen we op: $v(t) = 0$.

$$v(t) = 0 \Rightarrow -72\sqrt{1 + \frac{1}{3}t} + 122 = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{3}t} = \frac{61}{36} \Rightarrow t = 3\left(\left(\frac{61}{36}\right)^2 - 1\right) = 5,61342593 \text{ sec}$$

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned} s &= \int v \, dt = \int \left(-72\sqrt{1 + \frac{1}{3}t} + 122\right) dt \\ &= -216 \int \left(1 + \frac{1}{3}t\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{1}{3}t\right) + 122 \int 1 \, dt \\ &= -144\left(1 + \frac{1}{3}t\right)\sqrt{1 + \frac{1}{3}t} + 122t + C_s \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_s = 144$ en $s(t) = -144\left(1 + \frac{1}{3}t\right)\sqrt{1 + \frac{1}{3}t} + 122t + 144$ (m).

De remweg:

$$s(5,61342593) = 128,279 \text{ m}$$

Opgave 3

Eerst berekenen we de snelheid $v(t)$ en de hoogtefunctie $h(t)$ en beantwoorden vervolgens de gestelde vragen.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t) \, dt \\ &= -\int 9,81 \, dt \\ &= -9,81t + C_v \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 60$ m/s, dit levert op de vergelijking $60 = 0 + C_v$, zodat $C_v = 60$ en

$$v(t) = -9,81t + 60 \text{ (m/s)}.$$

De hoogtefunctie:

$$\begin{aligned} h &= \int v \, dt = \int (-9,81t + 60) \, dt \\ &= -4,905t^2 + 60t + C_h \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $h = 10$ m, zodat $C_h = 10$ en $h(t) = -4,905t^2 + 60t + 10$ (m).

a Het projectiel begint te dalen op het moment dat $v(t) = 0$:

$$v(t) = 0 \Rightarrow -9,81t + 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{60}{9,81} = 6,11620795 \text{ sec}$$

De bereikte hoogte is dan:

$$h(6,11620795) = 193,486 \text{ m}$$

b De oplossing van $h(t) = 10$: $-4,905t^2 + 60t + 10 = 10$ zijn $t = 0$ en $t = 12,2324159$.

Het gevraagde tijdstip $t = 12,232$ sec. (dit is $2 \cdot 6,116$ sec).

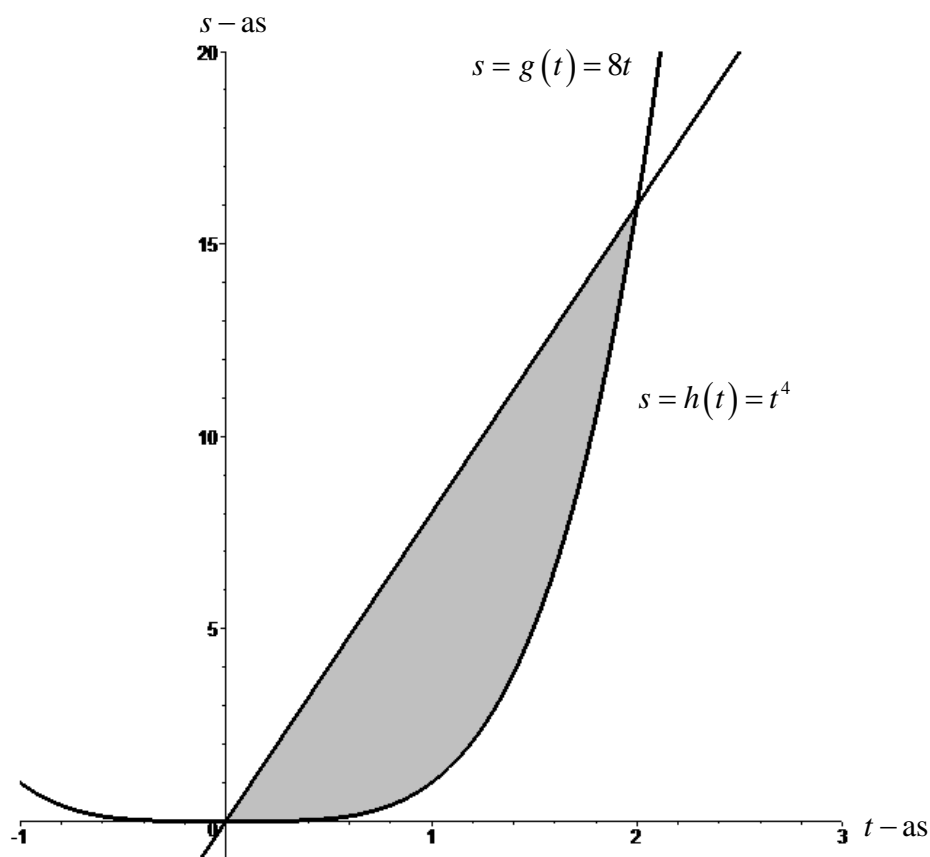


- c We lossen t op uit $h(t) = 0$: $-4,905t^2 + 60t + 10 = 0$. De oplossingen zijn:
 $t = -0,164455683$ en $t = 12,3968716$.
De snelheid waarmee het projectiel op de grond komt:
 $v(12,3968716) = -61,6133103$
De gevraagde snelheid: 61,613 m/s

7.4 Volume van omwentelingslichamen

Opgave 1

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.7.



Figuur 7.7

De t -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$t^4 = 8t$$

$$t^4 = 8t \Leftrightarrow t(t^3 - 8) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$$



- a Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de t -as:

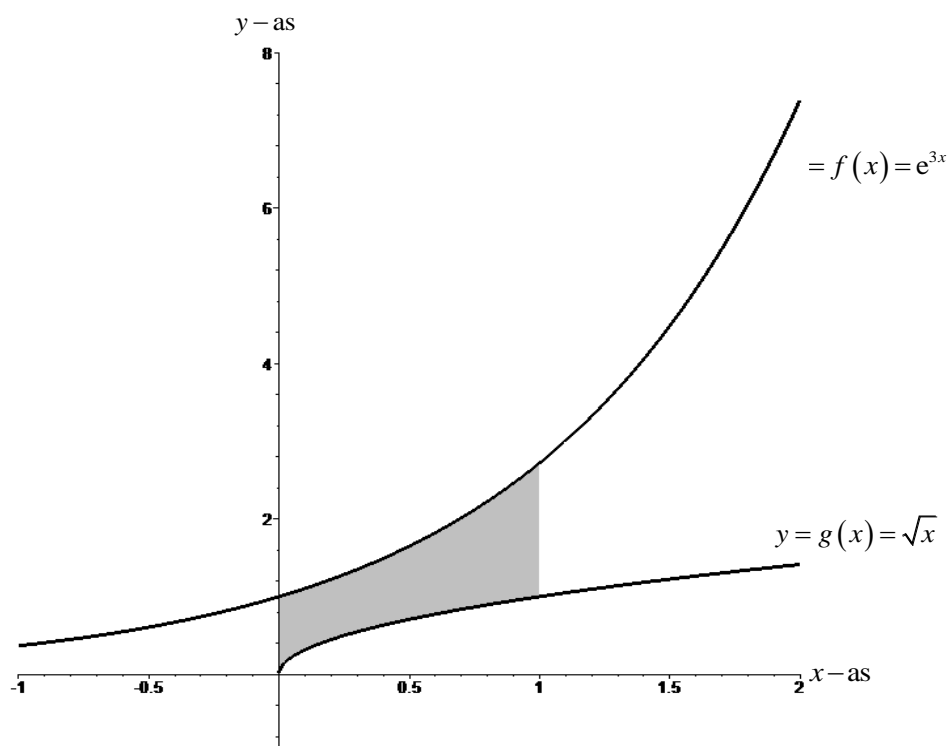
$$\begin{aligned}V_t &= \pi \int_0^2 (8t)^2 dt - \pi \int_0^2 (t^4)^2 dt \\&= \pi \int_0^2 64t^2 dt - \pi \int_0^2 t^8 dt \\&= 64\pi \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^2 - \pi \left[\frac{1}{9}t^9 \right]_0^2 \\&= \frac{512}{3}\pi - \frac{512}{9}\pi = \frac{1024}{9}\pi\end{aligned}$$

- b Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de s -as:

$$\begin{aligned}V_s &= 2\pi \int_0^2 t \cdot 8t dt - 2\pi \int_0^2 t \cdot t^4 dt \\&= 16\pi \int_0^2 t^2 dt - 2\pi \int_0^2 t^5 dt \\&= 16\pi \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{1}{6}t^6 \right]_0^2 \\&= \frac{128}{3}\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi\end{aligned}$$

Opgave 2

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.8.





Figuur 7.8

a

$$\begin{aligned}V_x &= \pi \int_0^1 (e^{3x})^2 dx - \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx \\&= \pi \int_0^1 e^{6x} dx - \pi \int_0^1 x dx \\&= \pi \left[\frac{1}{6} e^{6x} \right]_0^1 - \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\&= \frac{1}{6} \pi (e^6 - 1) - \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{6} \pi \cdot e^6 - \frac{2}{3} \pi\end{aligned}$$

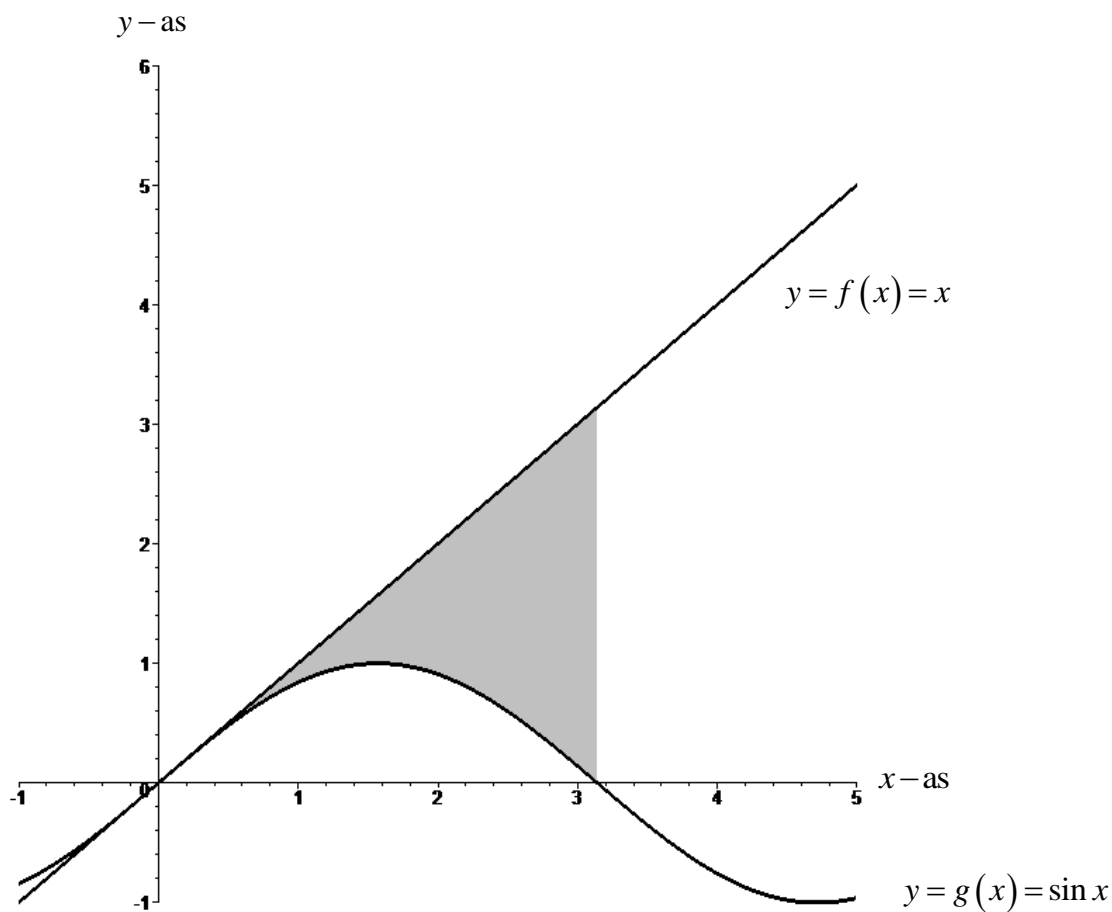
b

$$\begin{aligned}V_y &= 2\pi \int_0^1 x \cdot e^{3x} dx - 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x} dx \\&= 2\pi \int_0^1 x d\left(\frac{1}{3} e^{3x}\right) - 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx \\&= \frac{2}{3} \pi \left[x \cdot e^{3x} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \pi \int_0^1 e^{3x} dx - 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\&= \frac{2}{3} \pi \cdot e^3 - \frac{2}{9} \pi \left[e^{3x} \right]_0^1 - 2\pi \cdot \frac{2}{5} \\&= \frac{2}{3} \pi \cdot e^3 - \frac{2}{9} \pi (e^3 - 1) - \frac{4}{5} \pi \\&= \frac{4}{9} \pi \cdot e^3 - \frac{26}{45} \pi\end{aligned}$$



Opgave 3

Een schets van het gebied is te zien in figuur 7.9.



Figuur 7.9

a

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\pi} x^2 dx - \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} x^2 dx - \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} - \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{3} \pi^4 - \frac{1}{2} \pi^2 \end{aligned}$$



b

$$\begin{aligned}V_y &= 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot x \, dx - 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx \\&= 2\pi \int_0^{\pi} x^2 \, dx + 2\pi \int_0^{\pi} x \, d \cos x \\&= 2\pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} + 2\pi [x \cos x]_0^{\pi} - 2\pi \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\&= \frac{2}{3} \pi^4 - 2\pi^2 - 2\pi [\sin x]_0^{\pi} \\&= \frac{2}{3} \pi^4 - 2\pi^2\end{aligned}$$