Module 4
Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

Analyse
Constructie bestaat uit scharnierend aan elkaar verbonden staven, rust op twee scharnieropleggingen: $r = 4$, $s = 11$ en $k = 8$.
$2k \times 3 = 13 > 11$, dus niet vormvast.
$2k - r = 12 > 11$, dus niet statisch bepaald

Oplossingen
1 Je kunt r vergroten door een doelmatige oplegging toe te voegen: $r = 5$, $2k - r = 11 = s$, en daarmee is de constructie statisch bepaald. De constructie is niet vormvast.
2 Je kunt s vergroten door een doelmatige staaf toe te voegen: $s = 12$, $2k - r = 12 = s$. Daarmee is de constructie statisch bepaald maar nog niet vormvast.
3 Je kunt s vergroten door twee staven toe te voegen en één scharnieroplegging in een rol te veranderen. $s = 13$ en $r = 3$. $2k \times 3 = 13 = s$. Daarmee is de constructie statisch bepaald en vormvast.

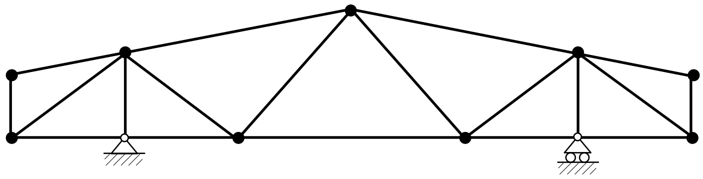
Opdracht 2

Analyse
Het is een vakwerkconstructie die uitwendig statisch bepaald is ($r = 3$).

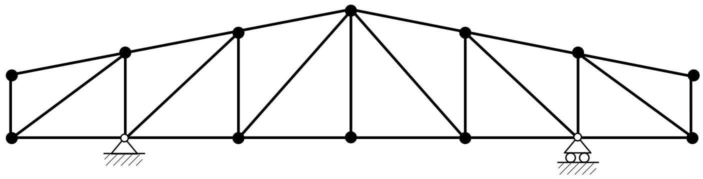
Uit $s = 31$ en $k = 14$ blijkt dat $2k - 3 = 28 < s$, dus is de constructie inwendig statisch onbepaald. De diagonalen zijn niet aan elkaar verbonden.

Oplossingen
De constructie kan in- en uitwendig statisch bepaald gemaakt worden door staven doelmatig te verwijderen. Uiteindelijk zal dan moeten gelden: $s = 2k - 3$, dus er moeten 6 staven worden verwijderd.

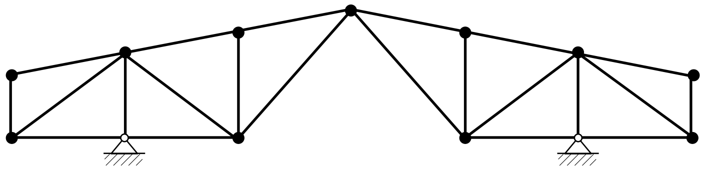
De constructie bestaat uit 6 stramienen. Het ligt voor de hand om in elk stramien één staaf te verwijderen.
In figuur 4.1a en b zijn twee mogelijke oplossingen gegeven.
Ook kan er een samengesteld vakwerk van worden gemaakt door van de roloplegging een scharnieroplegging te maken en een extra staaf te verwijderen. De constructie is dan uitwendig statisch bepaald maar niet vormvast (figuur 4.1c).



a



b



Figuur 4.1 c

Opdracht 3

Voor vormvastheid geldt bij doelmatige plaatsing van de staven de formule $s = 2k - 3$.
Voor het vakwerk van figuur 5.1a geldt: $k = 9$ en $s = 14$. $2k - 3 = 15$, dus is er één staaf te weinig. Er kan een doelmatige staaf worden aangebracht door de twee bovenste knopen te verbinden.
Het vakwerk van figuur b is vormvast, want $s = 2k - 3$ en de staven zijn doelmatig geplaatst.
Voor figuur c geldt: $s = 14$ en $k = 8$, waardoor $2k - 3 = 13$. Er is een staaf te veel voor inwendige statische bepaaldheid, maar het vakwerk is wel vormvast.
Figuur d heeft één staaf te weinig. De constructie kan vormvast gemaakt worden door een verticale staaf te plaatsen aan een rand of in het midden.

Opdracht 4

a De constructie is opgelegd op drie scharnieropleggingen, dus $r = 6$. Het aantal staven $s = 14$ en het aantal knopen $k = 10$. Uit $2k - 3 = 17 > s$, blijkt dat de constructie niet vormvast is, maar met $2k - r = 14 = s$ is de constructie wel uitwendig statisch bepaald.
b Als de pendelstaven door roloplegggingen worden vervangen, wordt: $r = 3$, $s = 11$ en $k = 7$.

Uit $2k - r = 2k - 3 = 11 = s$ blijkt dat de constructie nu vormvast en statisch bepaald is.

Opdracht 5

De staafkrachten 6, 7 en 8 kunnen worden berekend met behulp van snede II (figuur 4.3b). De momentensom ten opzichte van punt E levert de staafkracht N_8 ($= +26$ kN).
Voor de berekening van N_6 wordt N_6 in punt D ontbonden in een horizontale en een verticale kracht (figuur 4.3c). Met de momentensom ten opzichte van punt K kan worden berekend dat $N_6 = -81{,}5$ kN.
Staafkracht N_7 kan worden berekend met behulp van het verticale evenwicht van het linkerdeel. N_7 dient daartoe te worden ontbonden in een horizontale en verticale kracht. N_7 blijkt -28 kN te zijn.
Staafkracht N_{10} kan worden berekend met snede III. Deze is gemakkelijker te bepalen uit het evenwicht van knoop J, hoewel dit niet volgens de opdracht is.
Staaf 10 is een nulstaaf. De overige staafkrachten kunnen op analoge wijze worden berekend. De staafkrachten staan in onderstaande tabel weergegeven.

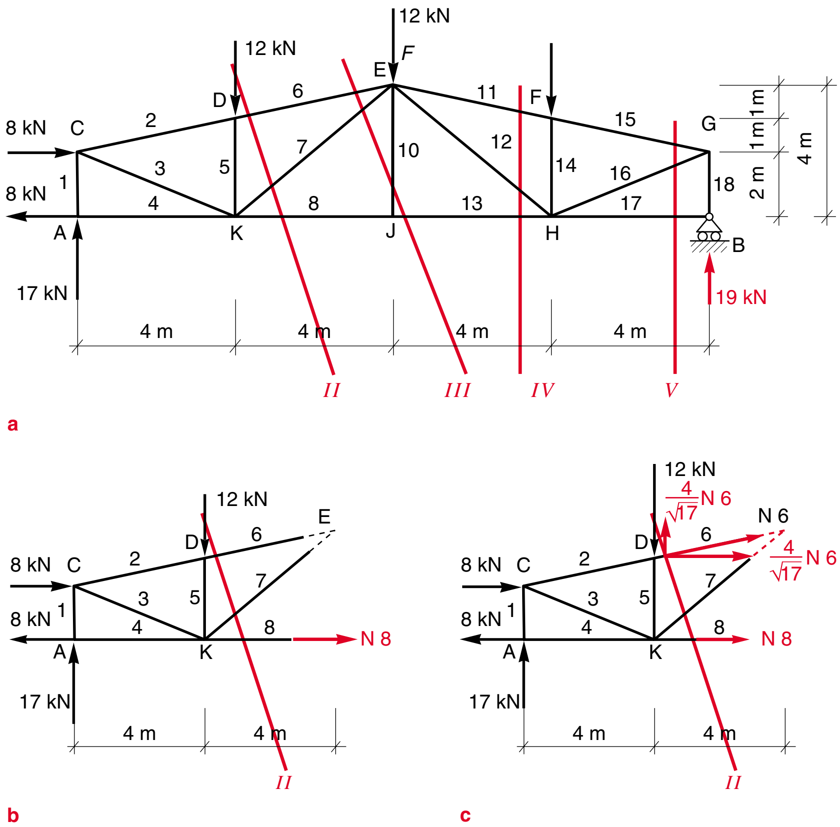
Staaf	1	2	3	4	5	6	7	8	10
Kracht	−17	−28,9	+22,4	+8	−12	−28,9	+2,8	+26	0

Staaf	11	12	13	14	15	16	17	18
Kracht	−26,1	−0,9	+26	−12	−26,1	+28,3	0	−19

Opdracht 6

Analyse
Het gaat om een statisch bepaald vakwerk. Voor het berekenen van de staafkrachten is het niet nodig de reactiekrachten te berekenen. Werkend vanaf de rechterzijde kunnen achtereenvolgens sneden worden aangebracht tussen de knopen. Door het evenwicht van deel rechts van de snede te beschouwen kunnen de staafkrachten worden berekend.
De berekende staafkrachten zijn gegeven in onderstaande tabel.

Staaf	1	2	3	4	5	6	7	8
Kracht	−13,33	−16,67	+26,67	+10	+13,33	−8,33	−6,67	+8,83



Figuur 4.2

Opdracht 7

Het gaat om een statisch bepaald vakwerk. De reactiekrachten kunnen worden berekend met behulp van de evenwichtsvoorwaarden ($A_V = 40{,}37$ kN; $B_V = 49{,}63$ kN; $B_H = 20$ kN).
De gevraagde staafkrachten kunnen worden berekend door doelmatige sneden aan te brengen en het evenwicht van een deel te beschouwen.
Voor de berekening van N_2 kan een snede door de staven 1 en 2 worden aangebracht.
Met behulp van de goniometrie is vast te stellen dat de afstand van F tot de staven 2 en 6 gelijk is aan 1,802 m. Met de momentensom om F krijgt men dan:

$$\sum T_{(F)} = 0 \;\rightarrow\; -A_V \cdot 5 - N_2 \cdot 1{,}802 = 0 \;\rightarrow\; N_2 = -113{,}0 \text{ kN}$$

Voor N_6 kan een snede door 4, 5 en 6 worden aangebracht. Met de momentensom om F:

$$\sum T_{(F)} = 0 \;\rightarrow\; -A_V \cdot 5 - N_6 \cdot 1{,}802 - 10 \cdot 1{,}41 + 30 \cdot 1{,}15 = 0 \;\rightarrow\; N_6 = -100{,}7 \text{ kN}$$

Met de momentensom om D:

$$\sum T_{(D)} = 0 \rightarrow -A_V \cdot 8 + 10 \cdot 2{,}59 + 30 \cdot 4{,}15 + N_4 \cdot 4$$
$$= 0 \rightarrow N_4 = +43{,}1 \text{ kN}$$

Met een snede door 7, 8 en 4, waarbij het rechterdeel wordt beschouwd:

$$\sum T_{(G)} = 0 \rightarrow B_V \cdot 5 + N_8 \cdot 1{,}802 - 20 \cdot 1 - 30 \cdot 1{,}15$$
$$= 0 \rightarrow N_8 = -107{,}5 \text{ kN}$$

Met een snede door 10 en 11:

$$\sum T_{(G)} = 0 \rightarrow B_V \cdot 5 + N_{11} \cdot 1{,}802 - 20 \cdot 1$$
$$= 0 \rightarrow N_{11} = -126{,}6 \text{ kN}$$

Opdracht 8

Vervolg van opdracht 7
Je kunt de overige staafkrachten berekenen met behulp van het evenwicht van knopen. Met een krachtenveelhoek van knoop A kan N_1 worden berekend. Vervolgens kan N_3 met knoop C worden bepaald, N_5 met Knoop F, N_7 met knoop D en de staafkrachten N_9 en N_{10} met het evenwicht van knoop G.
In onderstaande tabel zijn de staafkrachten nogmaals weergegeven.

Staaf	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kracht	96,7	−112,0	−31,5	+43,1	+56	−100,7	+50	−107,5	−25	+88,8	−126,3

Uiteraard is het veel eenvoudiger om dit vakwerk in een FRAME-programma in te voeren en daarmee de staafkrachten te bepalen.

Opdracht 9

Statisch bepaald vakwerk. Je kunt de reacties bepalen met behulp van de evenwichtsvoorwaarden. Vervolgens kun je de staafkrachten bepalen door achtereenvolgens het evenwicht van de knopen te beschouwen.
Hierbij kan begonnen worden met de knopen A en F, omdat daar slechts twee staven aansluiten.
De reactiekracht bij A blijkt nul te zijn, en de reactiekracht bij B 10 kN.
Omdat er in A geen kracht werkt, zijn de staafkrachten 1 en 2 nul.
Uit het evenwicht van knoop C blijkt vervolgens dat ook N_3 en N_4 nul moeten zijn. Er rest nu een symmetrische constructie die bestaat uit twee driehoeken. Uit het evenwicht van achtereenvolgens de knopen F, B en E kunnen de staafkrachten worden berekend.

Staaf	1	2	3	4	5	6	7	9
Kracht	0	0	0	0	+8,33	−6,67	−6,67	8,33

Opdracht 10

Drie statisch bepaalde vakwerken. De reactiekrachten zijn in alle gevallen gelijk (links en rechts $2F$).
Met de snedemethode kunnen de staafkrachten snel worden berekend, omdat er sprake is van evenwijdige boven- en onderregels. In onderstaande tabellen zijn de staafkrachten weergegeven, steeds voor de halve constructie van links naar rechts.

Constructie a

Bovenregel		$-4F$		$-6F$	
Diagonalen	$-2\sqrt{2}F$	$+2\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}F$	$+\sqrt{2}F$	0
Onderregel	$+2F$		$+5F$		$+6F$

Constructie b

Bovenregel		$-2F$	$-4F$	$-5F$	$-6F$
Diagonalen	$-2\sqrt{2}F$	$-2\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}F$	0
Verticalen	$2F$	$2F$	F	F	0
Onderregel	$2F$	$4F$	$5F$	$6F$	$6F$

Constructie c

Bovenregel	$-2F$	$-4F$	$-5F$	$-6F$	$-6F$
Diagonalen	$2\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}F$	0
Verticalen	$-2F$	$-2F$	$-F$	$-F$	0
Onderregel	0	$2F$	$4F$	$5F$	$6F$

Opdracht 11

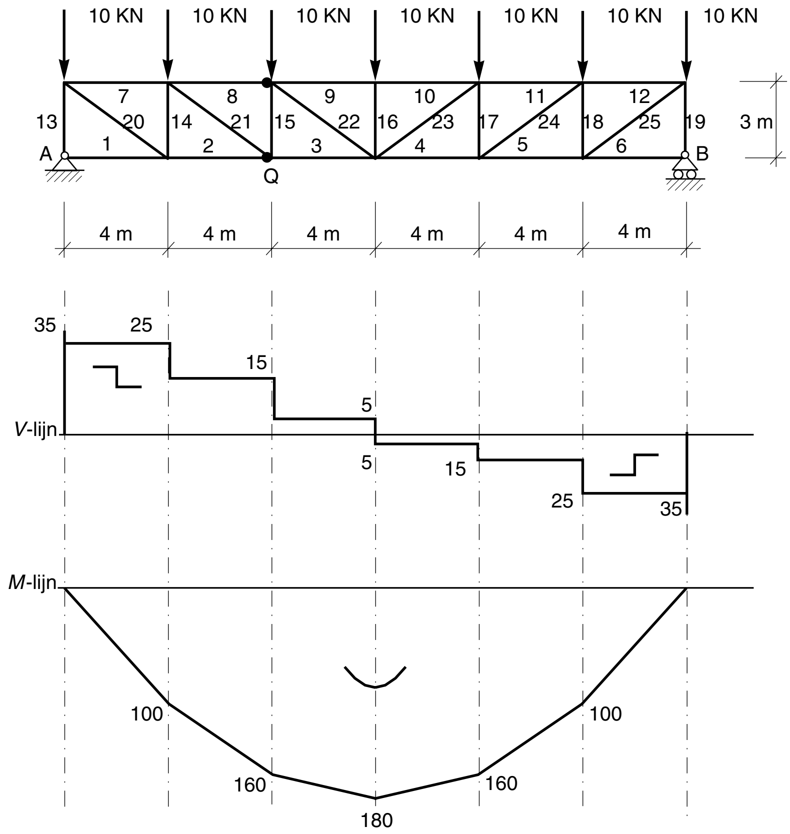
Het gaat om statisch bepaald vakwerk. Uit symmetrie kunnen de reactiekrachten snel worden bepaald (35 kN).

a De V- en M-lijn kunnen getekend worden (figuur 4.3) waarmee de staafkrachten kunnen worden bepaald.

b De krachten in de randstaven kunnen worden berekend met de momentenlijn. Welk moment moet nu gekozen worden?
Voorbeeld: Voor de berekening van N_8 met de snedemethode zou punt Q (figuur 4.3) als momentenpunt gekozen worden. Het moment op de plaats van punt Q is 160 kNm. Voor de staafkracht N_8 geldt dan:

$$N_8 = \frac{M}{h} = \frac{160}{3} = 53{,}33 \text{ kN}$$

Voor de berekening van N_3 kan punt P als momentenpunt worden gekozen. Voor P geldt hetzelfde moment als voor Q, zodat ook N_3 gelijk is aan N_8. Aan de buigingsvorm is te zien of de berekende staaf op druk of op trek wordt belast.



Figuur 4.3

c De verticale component van de diagonaalkracht is gelijk aan de dwarskracht ter plaatse. Uit de helling van de diagonalen blijkt dat voor de diagonaalkracht geldt:

$$N_{\text{diag.}} = \frac{5}{3} \cdot V$$

Voorbeeld: $N_{21} = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ kN. De diagonaal snijdt het afschuifteken drie keer, waaruit blijkt dat het een trekkracht is.

d De verticale staafkrachten kunnen worden berekend door een zodanige snede aan te brengen dat de gevraagde verticaal de enige verticale onbekende is.
Voorbeeld: Voor het berekenen van staafkracht N_{14} kan een snede worden aangebracht door de staven 7, 14 en 2. N_{14} kan dan worden bepaald met het verticale evenwicht van het linkerdeel:

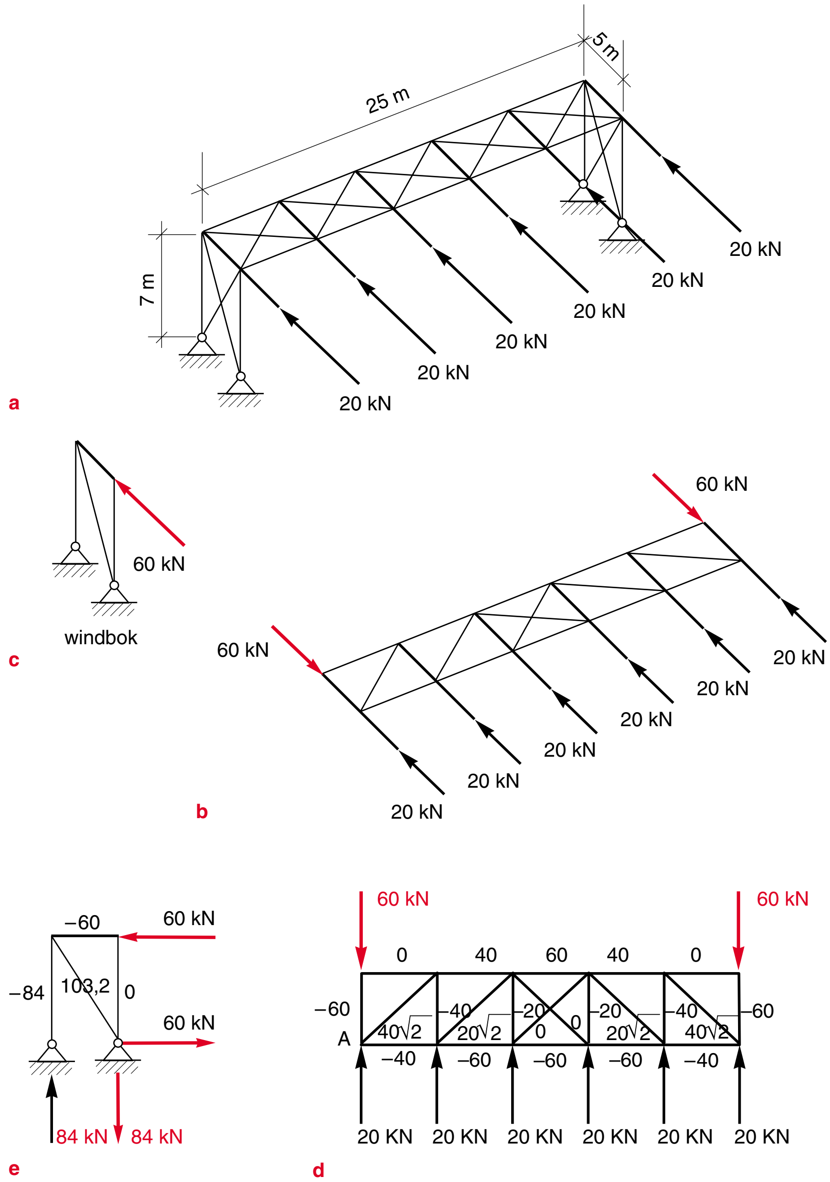
$$\sum F_{\text{V}} = 0 \;\rightarrow\; -35 + 10 - N_{14} = 0 \;\rightarrow\; N_{14} = -25 \text{ kN}$$

Deze waarde is in de dwarskrachtenfiguur terug te vinden. Het is namelijk de dwarskracht **links** van de verticale staaf. Let op: dit is geen algemene regel. Vanwege symmetrie is bekend dat N_{18} gelijk is aan N_{14}. Ook de dwarskrachtenlijn is puntsymmetrisch ten opzichte van het midden.

Voor staaf 18 geldt dus dat de staafkracht gelijk is aan de dwarskracht **rechts** van de verticale staaf.
In onderstaande tabel worden de staafkrachten weergegeven.

Bovenregel staaf	7 en 12	8 en 11	9 en 10	
Kracht	–33,33	–53,33	–60	
Diagonaal staaf	20 en 25	21 en 24	22 en 23	
Kracht	41,67	25	8,33	
Verticale staaf	13 en 19	14 en 18	15 en 17	16
Kracht	–25	–15	–5	0
Onderregel staaf	1 en 6	2 en 5	3 en 4	
Kracht	0	33,33	53,33	

Opdracht 12



Figuur 4.4

De hal van figuur 3.15 bevat twee windverbanden. De getekende krachten belasten het verband met de lange overspanning. In figuur 4.4b en 4.4c zijn alleen de diagonalen getekend die op trek worden belast. In het middenveld is het niet duidelijk welke diagonaal op trek wordt belast. Vanwege symmetrie zijn de staafkrachten in de beide diagonalen gelijk. Dit kan alleen als de diagonaalkrachten nul zijn, want ze kunnen niet beide op druk of beide op trek worden belast. Maar als er een kleine verstoring van de symmetrie in belasting optreedt, wordt één van de beide diagonalen op trek belast. In de berekening zijn het nulstaven.
In de figuren 4.4d en 4.4e zijn de aanzichten van de vakwerken getekend met de erop werkende belastingen. Tevens zijn de staafkrachten bij de staven vermeld.

Opdracht 13

Het gaat om een inwendig statisch onbepaald vakwerk. Als de op druk belaste diagonalen buiten beschouwing worden gelaten, ontstaat er een statisch bepaald vakwerk. Met behulp van de dwarskrachtenlijn kan bepaald worden welke diagonalen op trek worden belast. Vervolgens kunnen de staafkrachten worden berekend met behulp van de V-lijn en de M-lijn.
In figuur 4.5a zijn de reactiekrachten aangegeven en in figuur 4.5b en 4.5c de V-lijn en de M-lijn.
In figuur 4.5d zijn alleen de op trek belaste diagonalen getekend en zijn de staafkrachten vermeld.

Opdracht 14

De twee staven worden op druk belast. Vanwege symmetrie zal punt C zich verticaal verplaatsen. De staafkrachten kunnen worden bepaald door het evenwicht van knoop C te beschouwen. De verkorting van de staven kan worden berekend met de wet van Hooke, waarna de verplaatsing kan worden bepaald.
De lengte van de staven

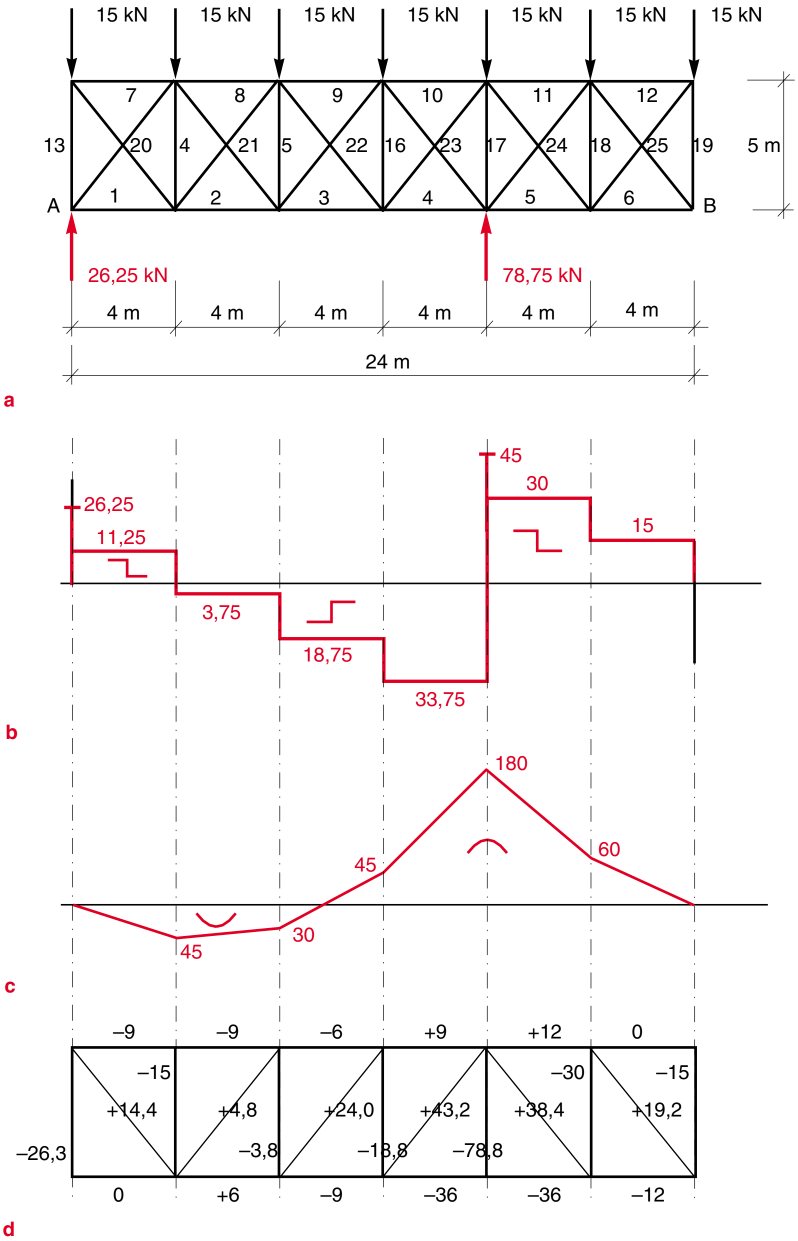
$$l = \frac{\sqrt{5}}{1} \cdot 4000 = 8944 \text{ mm}$$

De staafkrachten zijn:

$$N = \frac{\sqrt{5}}{1} \cdot 150 = 335 \text{ kN}$$

De oppervlakte van de doorsnede is:

$$A = 100^2 - 80^2 = 3600 \text{ mm}^2$$



Figuur 4.5

Met:

$$E = 2{,}1 \cdot 10^5 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

wordt de verkorting:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{335 \cdot 10^3 \cdot 8944}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 3600} = 3{,}96 \text{ mm}$$

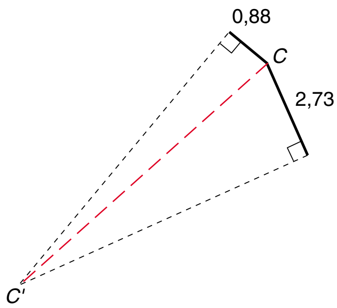
Door de verkorting van de staven uit te zetten en vervolgens de einden weer naar elkaar toe te brengen, ontstaat er een figuur waar weer dezelfde driehoek in te herkennen is als in de constructie. De verplaatsing van C kan worden berekend met:

$$w_C = \frac{\sqrt{5}}{1} \cdot 3{,}96 = 8{,}86 \text{ mm}$$

Opdracht 15

Een statisch bepaalde constructie belast met een verticale kracht. De staaflengten zijn te berekenen met meetkunde waarbij gebruik kan worden gemaakt van de verhoudingen in een rechthoekige driehoek met hoeken van 30 en 60 graden. De kracht kan worden ontbonden in de staafrichtingen, waarbij ook gebruik kan worden gemaakt van dezelfde driehoeken. Vervolgens kunnen de lengteveranderingen worden uitgerekend en als laatste de verplaatsing van punt C.
De berekeningsgegevens staan vermeld in onderstaande tabel.

	Lengte [m]	Oppervlakte [mm²]	Kracht [kN]	Verlenging [mm]
AC	$3\sqrt{3}$	314	$20\sqrt{3}$	2,73
BC	3	564	$-20\sqrt{3}$	−0,88



Figuur 4.6

De verplaatsing van punt C wordt gegeven in figuur 4.6.

Opdracht 16

Deze constructie lijkt op die van opdracht 15.
Maar nu is echter een steunpunt vervangen door een roloplegging. Daardoor kan deze een verplaatsing ondergaan.
De staafkrachten kunnen worden berekend zoals in figuur 4.7 is aangegeven. Hieruit kan een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden (a en b) worden afgeleid, waarmee de krachten kunnen worden berekend:
Horizontaal evenwicht: $10a - b = 100$
Verticaal evenwicht: $6a - b = 0$
Oplossing van dit stelsel levert: $a = 25$ en $b = 150$.

De staafkrachten:

$$N_{AC} = 11{,}66 \cdot 25 = 291{,}5 \text{ kN}$$

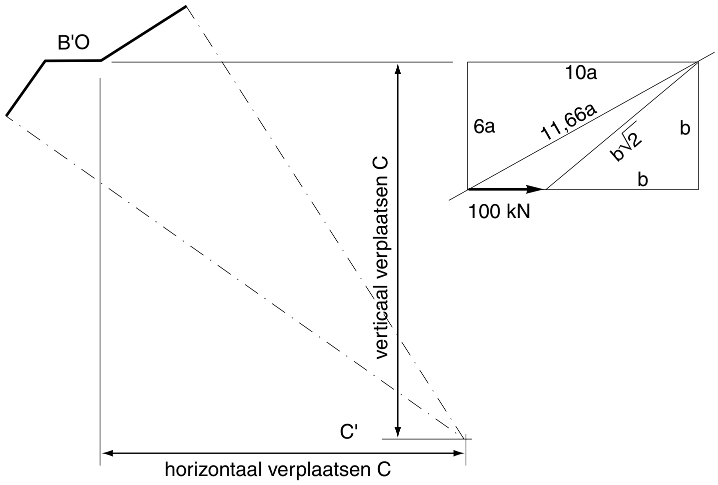
$$N_{BC} = \sqrt{2} \cdot 150 = 212{,}1 \text{ kN}$$

Uit het evenwicht van knoop B blijkt vervolgens dat in staaf AB een drukkracht van 150 kN moet werken.

De overige uitkomsten van de berekening staan in onderstaande tabel.

	Lengte [m]	Oppervlakte [mm²]	Kracht [kN]	Lengteverandering [mm]
AB	4	500	−150	−6
AC	11,66	1500	291,5	11,3
BC	10,39	1000	−212,1	−11,0

De verplaatsing van punt C is ook in figuur 4.7 weergegeven.

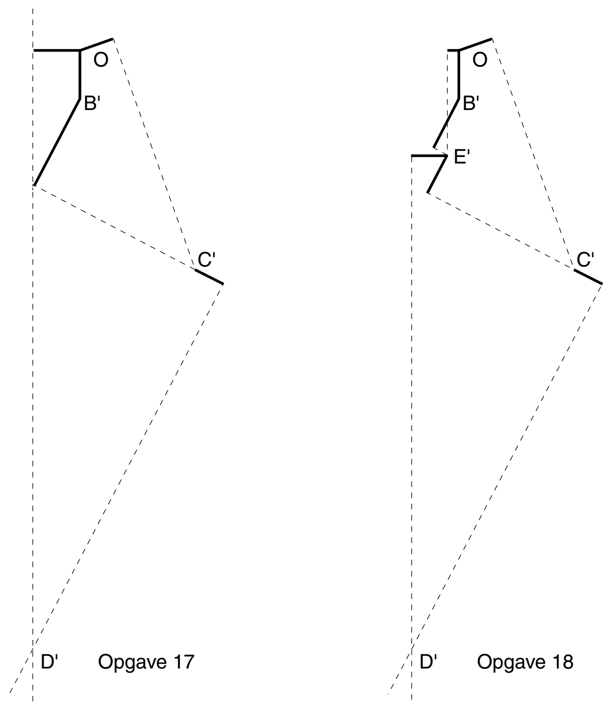


Figuur 4.7

Opdracht 17 en 18

De resultaten van de berekeningen staan in de onderstaande tabel. De vervormingdiagrammen zijn getekend in figuur 4.8. Om de uitkomsten te bepalen dienen de diagrammen nauwkeurig op schaal te worden getekend. De gevraagde antwoorden kunnen dan in de figuur worden opgemeten.

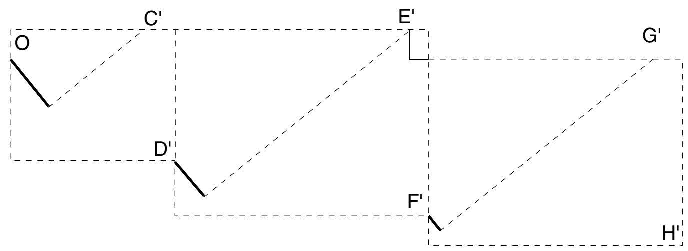
	Lengte [m]	A.E [kN]	Kracht [kN]	Lengteverandering [mm]
AB	3	65 000	$10\sqrt{3}$	0,80
AC	3	65 000	20	0,92
AD (AE + ED)	$3\sqrt{3}\ (\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$	50 000	$-5\sqrt{3}$	−0,90 (−0,30 − 0,60)
BC (BE + EC)	$3\sqrt{3}\ (2\sqrt{3} + \sqrt{3})$	50 000	$-10\sqrt{3}$	−1,80 (−1,20 − 0,60)
CD	3	65 000	10	0,46



Figuur 4.8

Opdracht 19

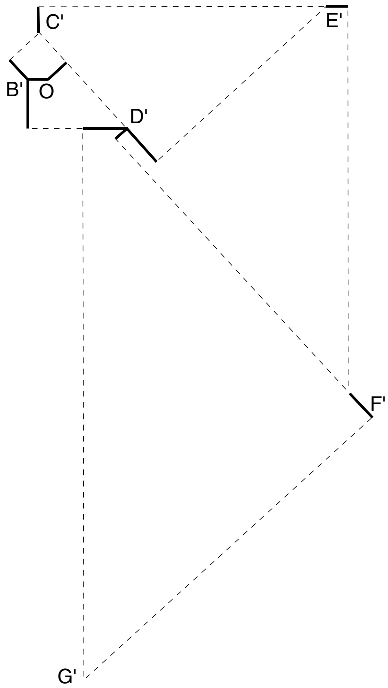
Het Williot-diagram is getekend in figuur 4.9.



Figuur 4.9

Opdracht 20

Het Williot-diagram is getekend in figuur 4.10.



Figuur 4.10