Hoofdstuk 7 De Laplacetransformatie

7.10 Herhalingsopgaven

1a

$f(t) = 10t^7 e^{-5t} - 3t^5 e^{-2t}$

Er geldt $\mathcal{L}\{t^7\} = \frac{7!}{s^8} = \frac{5040}{s^8}$ en $\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{s^6} = \frac{120}{s^6}$

Toepassen van de verschuivingseigenschap in het *s*-domeineigenschap geeft

$\mathcal{L}\{t^7 e^{-5t}\} = \frac{5040}{(s+5)^8}$ en $\mathcal{L}\{t^5 e^{-2t}\} = \frac{120}{(s+2)^6}$

De Laplacegetransformeerde $F(s)$ van $f(t) = 10t^7 e^{-5t} - 3t^5 e^{-2t}$ is

$$F(s) = \mathcal{L}\{10 \cdot t^7 e^{-5t} - 3 \cdot t^5 e^{-2t}\} = 10 \cdot \frac{5040}{(s+5)^8} - 3 \cdot \frac{120}{(s+2)^6} = \frac{50400}{(s+5)^8} - \frac{360}{(s+2)^6}$$

1b

$f(t) = 4e^{-5t}\cos(5t) - 7e^{2t}\sin(8t)$

Er geldt $\mathcal{L}\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2+25}$

Toepassen van de verschuivingseigenschap in het *s*-domeineigenschap

$\mathcal{L}\{e^{-5t}\cos(5t)\} = \frac{s+5}{(s+5)^2+25}$

Ook geldt $\mathcal{L}\{\sin(8t)\} = \frac{8}{s^2+8^2} = \frac{8}{s^2+64}$, en dus $\mathcal{L}\{e^{2t}\sin(8t)\} = \frac{8}{(s-2)^2+64}$

En dus

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{4e^{-5t}\cos(5t) - 7e^{2t}\sin(8t)\} \\ &= 4 \cdot \frac{s+5}{(s+5)^2+25} - 7 \cdot \frac{8}{(s-2)^2+64} = \frac{4(s+5)}{s^2+10s+50} - \frac{56}{s^2-4s+68}\end{aligned}$$

2a

$F(s) = \frac{3s+16}{s^4-16s^2}$

Breuksplitsen:

Noemer $s^4 - 16s^2 = s^2(s^2-16) = s^2(s-4)(s+4)$ en dus

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{3s+16}{s^4-16s^2} = \frac{3s+16}{s^2(s-4)(s+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-4} + \frac{D}{s+4} \\ &= \frac{A(s-4)(s+4) + Bs(s-4)(s+4) + Cs^2(s+4) + Ds^2(s-4)}{s^2(s-4)(s+4)}\end{aligned}$$

Tellervergelijking:

$A(s-4)(s+4) + Bs(s-4)(s+4) + Cs^2(s+4) + Ds^2(s-4) = 3s+16$

Invullen van handige waarden van *s:*

$s = 0$: $A(-4)(4) + B \cdot 0 \cdot (-4)(4) + C \cdot 0^2 \cdot (4) + D \cdot 0^2 \cdot (-4) = 3 \cdot 0 + 16 \Rightarrow -16A = 16 \Rightarrow A = -1$

$s=4$: $A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 4^2\cdot(4+4)+D\cdot 0=3\cdot 4+16 \Rightarrow 128C=28 \Rightarrow C=\frac{28}{128}=\frac{7}{32}$

$s=-4$: $A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot(-4)^2\cdot(-8)=3\cdot(-4)+16 \Rightarrow -128D=4 \Rightarrow D=-\frac{1}{32}$

Nog een andere waarde van *s*, namelijk $s=1$ invullen:

$A(-3)(5)+B\cdot 1\cdot(-3)(5)+C\cdot 1^2\cdot(5)+D\cdot 1^2\cdot(-3)=3\cdot 1+16 \Rightarrow -15A-15B+5C-3D=19$

De berekende waarden van *A*, *C* en *D* invullen:

$-15A-15B+5C-3D=19 \Rightarrow$

$-15\cdot(-1)-15B+5\cdot\frac{7}{32}-3\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)=19 \Rightarrow -15B=19-15-\frac{35}{32}-\frac{3}{32} \Rightarrow -15B=\frac{90}{32} \Rightarrow B=-\frac{3}{16}$

Na deze breuksplitsing geldt:

$F(s)=\frac{-1}{s^2}-\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{s}+\frac{7}{32}\frac{1}{s-4}-\frac{1}{32}\frac{1}{s+4}$ en dus $f(t)=-t-\frac{3}{16}+\frac{7}{32}\mathrm{e}^{4t}-\frac{1}{32}\mathrm{e}^{-4t}$

2b

$G(s)=\frac{s-3}{s^3-8s^2+12s}$

Breuksplitsen:

Noemer $s^3-8s^2+12s=s(s^2-8s+12)=s(s-2)(s-6)$ en dus

$G(s)=\frac{s-3}{s^3-8s^2+12s}=\frac{s-3}{s(s-2)(s-6)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-6}=\frac{A(s-2)(s-6)+Bs(s-6)+Cs(s-2)}{s(s-2)(s-6)}$

Tellervergelijking:

$A(s-2)(s-6)+Bs(s-6)+Cs(s-2)=s-3$

Invullen van handige waarden van *s:*

$s=0$: $A(-2)(-6)+B\cdot 0\cdot(-6)+C\cdot 0\cdot(-2)=-3 \Rightarrow 12A=-3 \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$

$s=2$: $A\cdot 0\cdot(-4)+B\cdot 2\cdot(-4)+C\cdot 2\cdot 0=-1 \Rightarrow -8B=-1 \Rightarrow B=\frac{1}{8}$

$s=6$: $A(-4)\cdot 0+B\cdot 6\cdot 0+C\cdot 6\cdot 4=3 \Rightarrow 24C=3 \Rightarrow C=\frac{1}{8}$

Na deze breuksplitsing geldt:

$G(s)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s-6}$ en dus $g(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{6t}$

2c

$H(s)=\frac{s-20}{s^3+8s^2+20s}$

Breuksplitsen:

Noemer $s^3+8s^2+20s=s(s^2+8s+20)$; verder ontbinden kan niet, dus

$H(s)=\frac{s-20}{s^3+8s^2+20s}=\frac{s-20}{s(s^2+8s+20)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+8s+20}=\frac{A(s^2+8s+20)+(Bs+C)s}{s(s^2+8s+20)}$

Tellervergelijking:

$A(s^2+8s+20)+(Bs+C)s=s-20$

Uitwerken geeft:

$A\left(s^2+8s+20\right)+\left(Bs+C\right)s=s-20$

$As^2+8As+20A+Bs^2+Cs=s-20$

$\left(A+B\right)s^2+\left(8A+C\right)s+20A=s-20$

De methode van de onbepaalde coëfficiënten geeft:

$$\begin{cases} A+B & = & 0 \\ 8A+C & = & 1 \\ 20A & = & -20 \end{cases}$$

Derde vergelijking: $A=-1$
Invullen in de eerste vergelijking geeft $B=1$
En in de tweede vergelijking $C=1-8A=1+8=9$
Na deze breuksplitsing geldt:

$$H(s)=-\frac{1}{s}+\frac{s+9}{s^2+8s+20}$$

Toewerken naar standaardgetransformeerden:

$$H(s)=-\frac{1}{s}+\frac{s+9}{s^2+8s+20}=-\frac{1}{s}+\frac{(s+4)+5}{(s+4)^2+4}$$

$$=-\frac{1}{s}+\frac{s+4}{(s+4)^2+4}+\frac{5}{(s+4)^2+4}=-\frac{1}{s}+\frac{s+4}{(s+4)^2+2^2}+\tfrac{5}{2}\cdot\frac{2}{(s+4)^2+2^2}$$

en dus $h(t)=-1+\mathrm{e}^{-4t}\cos(2t)+\tfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-4t}\sin(2t)$

2d

$$K(s)=\frac{2s-5}{s^3+6s^2+9s}$$

Breuksplitsen:

Noemer $s^3+6s^2+9s=s\left(s^2+6s+9\right)=s(s+3)^2$ en dus

$$K(s)=\frac{2s-5}{s^3+6s^2+9s}=\frac{2s-5}{s(s+3)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+3)^2}+\frac{C}{s+3}=\frac{A(s+3)^2+Bs+Cs(s+3)}{s(s+3)^2}$$

Tellervergelijking:

$A(s+3)^2+Bs+Cs(s+3)=2s-5$

Waarden van s invullen:

$s=0$: $A\cdot 9+B\cdot 0+C\cdot 0\cdot 3=-5\Rightarrow 9A=-5\Rightarrow A=-\frac{5}{9}$

$s=-3$: $A\cdot 0^2+B(-3)+C(-3)\cdot 0=-6-5\Rightarrow -3B=-11\Rightarrow B=\frac{11}{3}$

$s=1$: $A\cdot 16+B+C\cdot 4=2-5\Rightarrow 16A+B+4C=-3$

Invullen van $A=-\frac{5}{9}$ en $B=\frac{11}{3}$ geeft:

$$16\cdot\left(-\tfrac{5}{9}\right)+\tfrac{11}{3}+4C=-3\Rightarrow 4C=-3+\tfrac{80}{9}-\tfrac{11}{3}\Rightarrow 4C=\tfrac{20}{9}\Rightarrow C=\tfrac{5}{9}$$

Na deze breuksplitsing geldt:

$K(s)=-\frac{5}{9}\cdot\frac{A}{s}+\frac{11}{3}\cdot\frac{B}{(s+3)^2}+\frac{5}{9}\frac{C}{s+3}$ en dus $k(t)=-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}t\cdot\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-3t}$.

3a

Toon aan: $\int_0^\infty t\cos(t)\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \frac{6}{169}$

Definitie van de Laplacegetransformeerde *F* van *f*: $F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

De Laplacegetransformeerde van $f(t) = t\cos(t)$ is dus $F(s) = \int_0^\infty t\cos(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

Voor de bedoelde integraal geldt (kies $s = 5$): $\int_0^\infty t\cos(t)\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = F(5)$

Berekenen van de Laplacegetransformeerde van $f(t) = t\cos(t)$ met behulp van eigenschappen en standaardgetransformeerden.

Er geldt $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$ en $\mathcal{L}\{t\cdot g(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(G(s))$, dus (met $g(t) = \cos(t)$)

$$\mathcal{L}\{t\cdot\cos(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(G(s)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\frac{(s^2+1)\cdot 1 - s\cdot 2s}{(s^2+1)^2} = -\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

Dus voor $f(t) = t\cos(t)$ geldt $F(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ en daarmee

$$F(5) = \frac{5^2-1}{(5^2+1)^2} = \frac{24}{26^2} = \frac{6}{169}$$

Hiermee is aangetoond $\int_0^\infty t\cos(t)\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \frac{6}{169}$

3b.

Toon aan $\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos(3t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 3$

Er geldt $\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos(3t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\cos t - \cos(3t)}{t}\cdot \mathrm{e}^{0t}\,\mathrm{d}t$

Deze integraal is de definitie van Laplacegetransformeerde $F(s)$ van

$f(t) = \frac{\cos t - \cos(3t)}{t}$ voor $s = 0$

Berekenen van $F(s)$ met behulp van eigenschappen en standaardgetransformeerden.

Er geldt $\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty G(u)\,\mathrm{d}u$

Kies $g(t)=\cos(t)-\cos(3t)$, dan is $G(s)=\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{s}{s^2+9}$ en $G(u)=\dfrac{u}{u^2+1}-\dfrac{u}{u^2+9}$

$$\int_s^\infty G(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{p\to\infty}\int_s^p \frac{u}{u^2+1}-\frac{u}{u^2+9}\,\mathrm{d}u=\lim_{p\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\tfrac{1}{2}\ln\left(u^2+9\right)\right]_s^p=\lim_{p\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2+1}{u^2+9}\right)\right]_s^p$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+1}{p^2+9}\right)-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+9}\right)\right)=0-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+9}\right)=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+9}\right)$$

Limietberekening in de laatste stap $\lim\limits_{p\to\infty}\tfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p^2+1}{p^2+9}\right)=\tfrac{1}{2}\lim\limits_{p\to\infty}\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{p^2}}{1+\frac{9}{p^2}}\right)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+0}{1+0}\right)=\tfrac{1}{2}\ln 1=0$

Dus voor $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos(3t)}{t}$ geldt $F(s)=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+9}\right)$ en daarmee

$$F(0)=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{0^2+1}{0^2+9}\right)=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{9}\right)=\ln\left(\left(\tfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=\ln 3$$

Hiermee is aangetoond $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos t-\cos(3t)}{t}\,\mathrm{d}t=\ln 3$

4a

$$F(s)=\frac{s-2\mathrm{e}^{-s}}{s^2+2s}=\frac{s}{s^2+2s}-\frac{2}{s^2+2s}\mathrm{e}^{-s}=\frac{s}{s(s+2)}-\frac{2}{s(s+2)}\mathrm{e}^{-s}$$

In de eerste term delen we teller en noemer door *s*.

Voor de breuk in de tweede term geldt (breuksplitsen) $\dfrac{2}{s(s+2)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}$

Dit geeft $F(s)=\dfrac{s}{s(s+2)}-\dfrac{2}{s(s+2)}\mathrm{e}^{-s}=\dfrac{2}{s(s+2)}=\dfrac{1}{s+2}-\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}+\dfrac{1}{s+2}\mathrm{e}^{-s}$

Bekend is $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\}=\mathrm{e}^{-2t}$ en $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=1$

De vermenigvuldiging met e^{-s} hoort bij een zuivere verschuiving over $a=1$ in het *t*-domein. Dit geeft

$$f(t)=\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{Hv}(t-1)\cdot 1+\mathrm{Hv}(t-1)\mathrm{e}^{-2(t-1)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2t} & \text{voor } t<1\\ \mathrm{e}^{-2t}-1+\mathrm{e}^{-2(t-1)} & \text{voor } t>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2t} & \text{voor } t<1\\ \mathrm{e}^{-2t}-1+\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2} & \text{voor } t>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2t} & \text{voor } t<1\\ \left(1+\mathrm{e}^{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}-1 & \text{voor } t>1\end{cases}$$

4b

$$G(s)=\frac{4\mathrm{e}^{-2s}+3s}{s^2+4s+13}=\frac{4}{s^2+4s+13}\mathrm{e}^{-2s}+\frac{3s}{s^2+4s+13}$$

De noemers kunnen niet reëel ontbonden worden. Kwadraat afsplitsen in de noemer en toewerken naar de getransformeerden van sinus en/of cosinus.

Eerste term (zonder e-macht) $\dfrac{4}{s^2+4s+13}=\dfrac{4}{(s+2)^2+9}=\dfrac{4}{3}\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

Tweede term $\dfrac{3s}{s^2+4s+13}=\dfrac{3(s+2)-6}{(s+2)^2+9}=3\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}-2\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

Dus $G(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+13}\cdot e^{-2s}+\dfrac{3s}{s^2+4s+13}=\frac{4}{3}\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}\cdot e^{-2s}+3\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}-2\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

Er geldt $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}=e^{-2t}\sin(3t)$ en $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\}=e^{-2t}\cos(3t)$

Bij de factor e^{-2s} (eerste term) hoort een zuivere verschuiving over $a=2$ in het *t*-domein. Dit alles bij elkaar levert het volgende.

$$g(t)=\tfrac{4}{3}\mathrm{Hv}(t-2)e^{-2(t-2)}\sin(3(t-2))+3\cdot e^{-2t}\cos(3t)-2\cdot e^{-2t}\sin(3t)$$
$$=\begin{cases}0+3\cdot e^{-2t}\cos(3t)-2\cdot e^{-2t}\sin(3t) & \text{voor} \quad t<2\\ \tfrac{4}{3}\cdot 1\cdot e^{-2(t-2)}\sin(3(t-2))+3\cdot e^{-2t}\cos(3t)-2\cdot e^{-2t}\sin(3t) & \text{voor} \quad t>2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}3e^{-2t}\cos(3t)-2e^{-2t}\sin(3t) & \text{voor} \quad t<2\\ \tfrac{4}{3}e^{-2(t-2)}\sin(3(t-2))+3e^{-2t}\cos(3t)-2e^{-2t}\sin(3t) & \text{voor} \quad t>2\end{cases}$$

4c

$H(s)=\dfrac{3se^{-2s}+3}{s^2+4s}=\dfrac{3s}{s^2+4s}\cdot e^{-2s}+\dfrac{3}{s^2+4s}$

Eerste term $\dfrac{3s}{s^2+4s}\cdot e^{-2s}=\dfrac{3s}{s(s+4)}\cdot e^{-2s}=\dfrac{3}{s+4}\cdot e^{-2s}$

Er geldt $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+4}\right\}=3\cdot e^{-4t}$

De factor e^{-2s} geeft een zuivere verschuiving over $a=2$ in het *t*-domein.

Dus $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+4}\cdot e^{-2s}\right\}=3\cdot\mathrm{Hv}(t-2)e^{-4(t-2)}$

Tweede term: breuksplitsen geeft $\dfrac{3}{s^2+4s}=\frac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{s}-\frac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{s+4}$

Terugtransformeren $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+4s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{s}-\frac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{s+4}\right\}=\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{3}{4}\cdot e^{-4t}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-4t}$

Bij elkaar geeft dit

$$h(t)=3\cdot\mathrm{Hv}(t-2)e^{-4(t-2)}+\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{4}e^{-4t}=$$
$$=\begin{cases}3\cdot 0\cdot e^{-4(t-2)}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-4t} & \text{voor} \quad t<2\\ 3\cdot 1\cdot e^{-4(t-2)}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-4t} & \text{voor} \quad t>2\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-4t} & \text{voor} \quad t<2\\ e^{-4(t-2)}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-4t} & \text{voor} \quad t>2\end{cases}$$

4d

$K(s)=\dfrac{5e^{-3s}}{s^3+6s^2+25s}=\dfrac{5}{s^3+6s^2+25s}\cdot e^{-3s}$

Breuksplitsen van de breuk (zonder de e-macht).

$$\frac{5}{s^3+6s^2+25s}=\frac{5}{s(s^2+6s+25)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+6s+25}$$

Tellervergelijking $A\left(s^2+6s+25\right)+\left(Bs+C\right)\cdot s=5 \Rightarrow \left(A+B\right)s^2+\left(6A+C\right)s+25A=5$

Vergelijken van de coëfficiënten van de machten van s in linker- en rechterlid geeft drie vergelijkingen voor A, B en C

$$\begin{cases} A+B & = & 0 \\ 6A+C & = & 0 \\ 25A & = & 5 \end{cases}$$

De laatste vergelijking geeft $A=\frac{1}{5}$

Dit invullen in de eerste en tweede vergelijking geeft

$$\begin{cases} \frac{1}{5} & + & B & = & 0 \\ 6\cdot\frac{1}{5} & + & C & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{5} \\ C=-\frac{6}{5} \end{cases}$$

Na breuksplitsen geldt dus

$$\frac{5}{s^3+6s^2+25s}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}+\frac{-\frac{1}{5}s-\frac{6}{5}}{s^2+6s+25}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{5}\cdot\frac{-s-6}{s^2+6s+25}$$

Kwadraat afsplitsen in de laatste vorm en toewerken naar de getransformeerden van een (co)sinus geeft

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{5}\cdot\frac{-s-6}{s^2+6s+25}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{5}\cdot\frac{-\left(s+3\right)-3}{\left(s+3\right)^2+16}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s+3}{\left(s+3\right)^2+4^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\frac{4}{\left(s+3\right)^2+4^2}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s+3}{\left(s+3\right)^2+4^2}-\frac{3}{20}\frac{4}{\left(s+3\right)^2+4^2}$$

Terugtransformeren geeft

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s+3}{\left(s+3\right)^2+4^2}-\frac{3}{20}\frac{4}{\left(s+3\right)^2+4^2}\right\}=\frac{1}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}\cdot\cos\left(4t\right)\cdot \mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{20}\cdot\sin\left(4t\right)\cdot \mathrm{e}^{-3t}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}\cos\left(4t\right)-\frac{3}{20}\mathrm{e}^{-3t}\sin\left(4t\right)$$

In de oorspronkelijke vorm stond ook nog een vermenigvuldiging met e^{-3s}. Dit zorgt voor een zuivere verschuiving over $a=3$ in het t-domein. Uiteindelijk levert dit het antwoord

$$k\left(t\right)=\mathrm{Hv}\left(t-3\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3(t-3)}\cos\left(4\left(t-3\right)\right)-\frac{3}{20}\mathrm{e}^{-3(t-3)}\sin\left(4\left(t-3\right)\right)\right)=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t<3 \\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3(t-3)}\cos\left(4\left(t-3\right)\right)-\frac{3}{20}\mathrm{e}^{-3(t-3)}\sin\left(4\left(t-3\right)\right) & \text{voor} \quad t>3 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t<3 \\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{9}\mathrm{e}^{-3t}\cos\left(4\left(t-3\right)\right)-\frac{3}{20}\mathrm{e}^{9}\mathrm{e}^{-3t}\sin\left(4\left(t-3\right)\right) & \text{voor} \quad t>3 \end{cases}$$

5a

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=6+3\mathrm{e}^{-2t} \\ y\left(0\right)=1 \end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijking, invullen van de beginvoorwaarde en herschrijven:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=6+3\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow sY(s)-y(0)+2Y(s)=\frac{6}{s}+3\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow sY(s)-1+2Y(s)=\frac{6}{s}+\frac{3}{s+2} \Rightarrow sY(s)+2Y(s)=\frac{6}{s}+\frac{3}{s+2}+1$$

$$\Rightarrow (s+2)Y(s)=\frac{6(s+2)+3s+s(s+2)}{s(s+2)} \Rightarrow Y(s)=\frac{s^2+11s+12}{s(s+2)^2}$$

Breuksplitsen:

$$Y(s)=\frac{s^2+11s+12}{s(s+2)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{s+2}=\frac{A(s+2)^2+Bs+Cs(s+2)}{s(s+2)^2}$$

Tellervergelijking:

$$A(s+2)^2+Bs+Cs(s+2)=s^2+11s+12$$

Invullen van waarden van s:

$s=0$: $A\cdot 4+B\cdot 0+C\cdot 0=12 \Rightarrow A=3$

$s=-2$: $A\cdot 0+B\cdot(-2)+C\cdot 0=4-22+12 \Rightarrow -2B=-6 \Rightarrow B=3$

$s=1$: $9A+B+3C=1+11+12 \Rightarrow 9A+B+3C=24$

Invullen van $A=3$ en $B=3$ geeft $27+3+3C=24 \Rightarrow 3C=-6 \Rightarrow C=-2$

Na deze breuksplitsing geldt:

$$Y(s)=\frac{3}{s}+\frac{3}{(s+2)^2}-\frac{2}{s+2} \Rightarrow y(t)=3+3t\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-2t}=3+(3t-2)\mathrm{e}^{-2t}$$

5b

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=5\mathrm{e}^{-4t}\sin(2t)\\ y(0)=-1\end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijking, invullen van de beginvoorwaarde en herschrijven:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=5\mathrm{e}^{-4t}\sin(2t) \Rightarrow sY(s)-y(0)+3Y(s)=5\cdot\frac{2}{(s+4)^2+2^2}$$

$$\Rightarrow sY(s)+1+3Y(s)=\frac{10}{s^2+8s+20} \Rightarrow sY(s)+3Y(s)=\frac{10}{s^2+8s+20}-1$$

$$\Rightarrow (s+3)Y(s)=\frac{10-(s^2+8s+20)}{s^2+8s+20} \Rightarrow Y(s)=\frac{-s^2-8s-10}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

Breuksplitsen:

$$Y(s)=\frac{-s^2-8s-10}{(s+3)(s^2+8s+20)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+8s+20}=\frac{A(s^2+8s+20)+(Bs+C)(s+3)}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

Tellervergelijking:

$$A(s^2+8s+20)+(Bs+C)(s+3)=-s^2-8s-10$$

Invullen van $s=-3$: $A(9-24+20)+(-3B+C)\cdot 0=-9+24-10 \Rightarrow 5A=5 \Rightarrow A=1$

Invullen van $A=1$ in de tellervergelijking:

$$1\cdot(s^2+8s+20)+(Bs+C)(s+3)=-s^2-8s-10 \Rightarrow$$

$$s^2+8s+20+Bs^2+3Bs+Cs+3C=-s^2-8s-10 \Rightarrow Bs^2+(3B+C)s+3C=-2s^2-16s-30$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten van de machten van s in linker- en rechterlid geeft:

$$\begin{cases} B=-2 \\ 3B+C=-16 \\ 3C=-30 \end{cases}$$

We hebben één vergelijking te veel omdat A al op een andere manier is berekend.
De eerste vergelijking geeft $B=-2$
De laatste vergelijking geeft $C=-10$
Dit invullen in de tweede vergelijking geeft: $-6-10=-16$ en dat is correct.
De breuksplitsing is nu:

$$Y(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+8s+20}=\frac{1}{s+3}+\frac{-2s-10}{s^2+8s+20}$$

Kwadraat afsplitsen in de laatste vorm en toewerken naar de getransformeerden van een (co)sinus geeft:

$$Y(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{-2s-10}{s^2+8s+20}=\frac{1}{s+3}+\frac{-2(s+4)-2}{(s+4)^2+4}=\frac{1}{s+3}-2\cdot\frac{s+4}{(s+4)^2+2^2}-\frac{2}{(s+4)^2+2^2}$$

Terugtransformeren:

$$y(t)=\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\cos(2t)-\mathrm{e}^{-4t}\sin(2t)=\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t}(2\cos(2t)+\sin(2t)$$

6a

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=4\mathrm{e}^{t}+4\mathrm{e}^{-t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijking, invullen van de beginvoorwaarden en herschrijven:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=4\cdot\frac{1}{s-1}+4\cdot\frac{1}{s+1}\Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-s\cdot 1-0+2\big(sY(s)-1\big)+Y(s)=\frac{4}{s-1}+\frac{4}{s+1}\Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-s+2sY(s)-2+Y(s)=\frac{4}{s-1}+\frac{4}{s+1}\Rightarrow\left(s^2+2s+1\right)Y(s)=\frac{4}{s-1}+\frac{4}{s+1}+s+2\Rightarrow$$

$$\left(s^2+2s+1\right)Y(s)=\frac{4(s+1)+4(s-1)+(s+2)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+1)}\Rightarrow Y(s)=\frac{s^3+2s^2+7s-2}{\left(s^2+2s+1\right)(s-1)(s+1)}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s^3+2s^2+7s-2}{(s+1)^2(s-1)(s+1)}\Rightarrow Y(s)=\frac{s^3+2s^2+7s-2}{(s+1)^3(s-1)}$$

Breuksplitsen:

$$Y(s)=\frac{s^3+2s^2+7s-2}{(s+1)^3(s-1)}=\frac{A}{(s+1)^3}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s-1}$$

$$=\frac{A(s-1)+B(s+1)(s-1)+C(s+1)^2(s-1)+D(s+1)^3}{(s+1)^3(s-1)}$$

Tellervergelijking:

$$A(s-1)+B(s+1)(s-1)+C(s+1)^2(s-1)+D(s+1)^3=s^3+2s^2+7s-2$$

Invullen van handige waarden van s:
$s=-1$: $-2A+0+0+0+0=-1+2-7-2\Rightarrow -2A=-8\Rightarrow A=4$
$s=1$: $0+0+0+8D=1+2+7-2\Rightarrow 8D=8\Rightarrow D=1$
Andere waarden van s invullen:

$s=0$: $-A-B-C+D=0+0+0-2 \Rightarrow A+B+C-D=2$
Invullen van $A=4$ en $D=1$ geeft $4+B+C-1=2 \Rightarrow B+C=-1$
$s=2$: $A+3B+9C+27D=8+8+14-2 \Rightarrow A+3B+9C+27D=28$
Invullen van $A=4$ en $D=1$ geeft $4+3B+9C+27=28 \Rightarrow 3B+9C=-3 \Rightarrow B+3C=-1$
Uit de vergelijkingen voor *B* en *C*, namelijk $B+C=-\frac{5}{2}$ en $B+3C=-\frac{7}{2}$ volgt $C=0$ en $B=-1$
Dus geldt:

$$Y(s)=\frac{A}{(s+1)^3}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s-1}=\frac{4}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s-1}$$

Terugtransformeren:

$$y(t)=2t^2\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}$$

6b

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}-4v=\cos t\\ v(0)=1, v'(0)=2\end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijking, invullen van de beginvoorwaarden en herschrijven:

$$s^2V(s)-sv(0)-v'(0)-4V(s)=\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$s^2V(s)-s\cdot 1-2-4V(s)=\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow s^2V(s)-4V(s)=\frac{s}{s^2+1}+s+2 \Rightarrow$$

$$(s^2-4)V(s)=\frac{s+(s+2)(s^2+1)}{s^2+1} \Rightarrow V(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+2}{(s^2-4)(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$V(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+2}{(s-2)(s+2)(s^2+1)}$$

Breuksplitsen:

$$V(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+2}{(s-2)(s+2)(s^2+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$=\frac{A(s+2)(s^2+1)+B(s-2)(s^2+1)+(Cs+D)(s-2)(s+2)}{(s-2)(s+2)(s^2+1)}$$

Tellervergelijking:

$$A(s+2)(s^2+1)+B(s-2)(s^2+1)+(Cs+D)(s-2)(s+2)=s^3+2s^2+2s+2$$

Invullen van handige waarden van *s*.
$s=2$: $A\cdot 4\cdot 5+0+0=8+8+4+2 \Rightarrow 20A=22 \Rightarrow A=\frac{22}{20} \Rightarrow A=\frac{11}{10}$
$s=-2$: $0+B(-4)\cdot 5+0=-8+8-4+2 \Rightarrow -20B=-2 \Rightarrow B=\frac{1}{10}$
Andere waarden van *s* invullen:
$s=0$: $A\cdot 2\cdot 1+B(-2)\cdot 1+D(-2)\cdot 2=0+0+0+2 \Rightarrow 2A-2B-4D=2 \Rightarrow A-B-2D=1$
Invullen van $A=\frac{11}{10}$ en $B=\frac{1}{10}$ geeft: $\frac{11}{10}-\frac{1}{10}-2D=1 \Rightarrow -2D=0 \Rightarrow D=0$
$s=1$: $A\cdot 3\cdot 2+B(-1)\cdot 2+(C+D)(-1)\cdot 3=1+2+2+2 \Rightarrow 6A-2B-3C-3D=7$
Invullen van $A=\frac{11}{10}$, $B=\frac{1}{10}$ en $D=0$ geeft

$6\cdot\frac{11}{10}-2\cdot\frac{1}{10}-3C-3\cdot 0=7\Rightarrow -3C=7-\frac{66}{10}+\frac{2}{10}\Rightarrow -3C=\frac{6}{10}\Rightarrow C=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$

Dus $V(s)=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1}$

Terugtransformeren: $v(t)=\frac{11}{10}\cdot e^{2t}+\frac{1}{10}\cdot e^{-2t}-\frac{1}{5}\cos(t)$

7a

$$\begin{cases} x'(t)=6x(t)+4y(t) \\ y'(t)=-4x(t)-2y(t) \\ x(0)=A \text{ en } y(0)=B \end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijkingen en invullen van de beginvoorwaarden

$$\begin{cases} sX(s)-x(0)=6X(s)+4Y(s) \\ sY(s)-y(0)=-4X(s)-2Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s)-A=6X(s)+4Y(s) \\ sY(s)-B=-4X(s)-2Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-6)X(s)-4Y(s)=A \\ 4X(s)+(s+2)Y(s)=B \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden door eliminatie van $Y(s)$.

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met $(s+2)$ en de tweede vergelijking met 4 en tel dan de vergelijkingen op. Dit geeft

$(s+2)(s-6)X(s)+4\cdot 4X(s)=(s+2)\cdot A+4B\Rightarrow$

$(s^2-4s-12+16)X(s)=As+2A+4B\Rightarrow X(s)=\frac{As+2A+4B}{s^2-4s+4}=\frac{As+2A+4B}{(s-2)^2}$

Breuksplitsen: $X(s)=\frac{As+2A+4B}{(s-2)^2}=\frac{P}{(s-2)^2}+\frac{Q}{s-2}=\frac{P+Q(s-2)}{(s-2)^2}$

Tellervergelijking: $P+Q(s-2)=As+2A+4B$

Twee waarden van s invullen:

$s=2$: $P+0=2A+2A+4B\Rightarrow P=4A+4B$

$s=0$: $P-2Q=0+2A+4B\Rightarrow P-2Q=2A+4B$

Invullen van $P=4A+4B$ in de laatste vergelijking geeft:

$$P-2Q=2A+4B\Rightarrow (4A+4B)-2Q=2A+4B$$

$$\Rightarrow -2Q=2A+4B-4A-4B\Rightarrow -2Q=-2A\Rightarrow Q=A$$

Dus $X(s)=\frac{P}{(s-2)^2}+\frac{Q}{s-2}=\frac{4A+4B}{(s-2)^2}+\frac{A}{s-2}$

Terugtransformeren:

$$x(t)=(4A+4B)te^{2t}+Ae^{2t}.$$

Het is mogelijk $y(t)$ op dezelfde manier te berekenen als $x(t)$. Alleen moet nu $X(s)$ geëlimineerd worden. Het kan ook anders, omdat de eerste vergelijking in het stelsel vrij eenvoudig is.

Herschrijven van de eerste vergelijking van het stelsel

$x'(t)=6x(t)+4y(t)\Rightarrow 4y(t)=x'(t)-6x(t)$

Invullen van $x(t)=(4A+4B)te^{2t}+Ae^{2t}$ en dus

$$x'(t)=(4A+4B)e^{2t}+(4A+4B)t\cdot 2e^{2t}+2Ae^{2t}=(8A+8B)te^{2t}+(6A+4B)e^{2t}$$

geeft

$$4y(t)=x'(t)-6x(t)\Rightarrow$$

$$4y(t)=\left((8A+8B)t\mathrm{e}^{2t}+(6A+4B)\mathrm{e}^{2t}\right)-6\left((4A+4B)t\mathrm{e}^{2t}+A\mathrm{e}^{2t}\right)\Rightarrow$$

$$4y(t)=(8A+8B-24A-24B)t\mathrm{e}^{2t}+(6A+4B-6A)\mathrm{e}^{2t}\Rightarrow$$

$$4y(t)=(-16A-16B)t\mathrm{e}^{2t}+4B\mathrm{e}^{2t}\Rightarrow y(t)=(-4A-4B)t\mathrm{e}^{2t}+B\mathrm{e}^{2t}$$

De oplossing is dus

$$\begin{cases} x(t)=(4A+4B)t\mathrm{e}^{2t}+A\mathrm{e}^{2t} \\ y(t)=(-4A-4B)t\mathrm{e}^{2t}+B\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

7b

$$\begin{cases} x''(t)-y'(t)=0 \\ y''(t)+x'(t)=0 \\ x(0)=a,\ x'(0)=0,\ y(0)=0 \text{ en } y'(0)=b \end{cases}$$

Transformeren van de differentiaalvergelijkingen en invullen van de beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} x''(t)-y'(t)=0 \\ y''(t)+x'(t)=0 \\ x(0)=a,\ x'(0)=0,\ y(0)=0 \text{ en } y'(0)=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} s^2X(s)-s\cdot x(0)-x'(0)-\left(sY(s)-y(0)\right)=0 \\ s^2Y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)+sX(s)-x(0)=0 \\ x(0)=a,\ x'(0)=0,\ y(0)=0 \text{ en } y'(0)=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} s^2X(s)-as-0-\left(sY(s)-0\right)=0 \\ s^2Y(s)-0-b+sX(s)-a=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} s^2X(s)-sY(s)=as \\ sX(s)+s^2Y(s)=a+b \end{cases}$$

Elimineren van $X(s)$. Vermenigvuldig de tweede vergelijking met *s*:

$$\begin{cases} s^2X(s)-sY(s)=as \\ s^2X(s)+s^3Y(s)=as+bs \end{cases}$$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken en herschrijven:

$$-sY(s)-s^3Y(s)=as-(as+bs)\Rightarrow -sY(s)-s^3Y(s)=-bs\Rightarrow$$

$$Y(s)+s^2Y(s)=b\Rightarrow\left(1+s^2\right)Y(s)=b\Rightarrow Y(s)=\frac{b}{1+s^2}\Rightarrow Y(s)=b\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

Terugtransformeren:

$$y(t)=b\sin t$$

Nu $x(t)$ berekenen door in het stelsel $Y(s)$ te elimineren. De eerste vergelijking met *s* vermenigvuldigen:

$$\begin{cases} s^2X(s)-sY(s)=as \\ sX(s)+s^2Y(s)=a+b \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} s^3X(s)-s^2Y(s)=as^2 \\ sX(s)+s^2Y(s)=a+b \end{cases}$$

De vergelijkingen optellen, herschrijven en breuksplitsen:

$$s^3 X(s) + sX(s) = as^2 + (a+b) \Rightarrow$$
$$(s^3 + s) X(s) = as^2 + a + b \Rightarrow$$
$$X(s) = \frac{as^2 + a + b}{s^3 + s} = \frac{as^2 + a + b}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{A(s^2+1) + (Bs + C)s}{s(s^2+1)}$$

Tellervergelijking:

$$A(s^2+1) + (Bs+C)s = as^2 + a + b$$

Uitwerken:

$$(A+B)s^2 + Cs + A = as^2 + a + b$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A + B = a \\ C = 0 \\ A = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = a + b \\ B = -b \\ C = 0 \end{cases}$$

Dit wordt bereikt door de derde vergelijking in de eerste in te vullen:

$$A + B = a \Rightarrow a + b + B = a \Rightarrow B = a - a - b \Rightarrow B = -b$$

Dus:

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{a+b}{s} + \frac{-bs + 0}{s^2 + 1} = \frac{a+b}{s} - b\frac{s}{s^2+1}$$

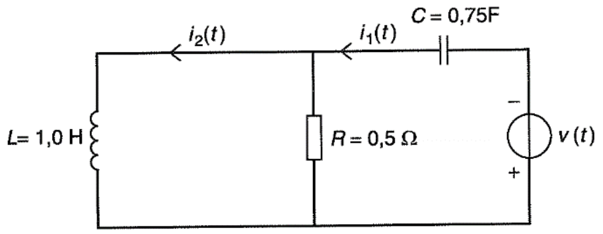
Terugtransformeren:

$$x(t) = a + b - b\cos t$$

De oplossing is dus:

$$\begin{cases} x(t) = a + b - b\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

8



$R = 0,5\ \Omega$, $L = 1,0$ H, $C = 0,75$ F en $v(t) = 65\mathrm{Hv}(t) \cdot \sin(t)$ V

Uitwerking

Vergelijking van de linkermaas in *s*-notatie:

$$R \cdot (I_1(s) - I_2(s)) - Ls \cdot I_2(s) = 0$$

Invullen van de gegeven waarden en herschrijven:

$$0,5 \cdot (I_1(s) - I_2(s)) - 1 \cdot s \cdot I_2(s) = 0$$
$$\Rightarrow I_1(s) - I_2(s) - 2sI_2(s) = 0 \Rightarrow I_1(s) - (2s+1)I_2(s) = 0$$

Vergelijking van de rechtermaas in *s*-notatie (rechtsom):

$$R \cdot (I_2(s) - I_1(s)) - \frac{1}{Cs} \cdot I_1(s) - V(s) = 0$$

Invullen van de gegeven waarden en herschrijven:

$$0,5\cdot\left(I_2(s)-I_1(s)\right)-\frac{1}{0,75s}\cdot I_1(s)-V(s)=0\Rightarrow$$

$$3sI_2(s)-3sI_1(s)-8I_1(s)-6sV(s)=0\Rightarrow(-3s-8)I_1(s)+3sI_2(s)=6sV(s)$$

Uit $v(t)=65\mathrm{Hv}(t)\cdot\sin(t)$ volgt $V(s)=65\cdot\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{65}{s^2+1}$

Het netwerk wordt dus beschreven door het stelsel

$$\begin{cases} I_1(s)-(2s+1)I_2(s)=0 \\ (-3s-8)I_1(s)+3sI_2(s)=6s\cdot\dfrac{65}{s^2+1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} I_1(s)-(2s+1)I_2(s)=0 \\ (-3s-8)I_1(s)+3sI_2(s)=\dfrac{390s}{s^2+1} \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $I_1(s)=(1+2s)I_2(s)$

Dit invullen in de tweede vergelijking geeft

$$(-3s-8)(2s+1)I_2(s)+3sI_2(s)=\frac{390s}{s^2+1}\Rightarrow\left(-6s^2-3s-16s-8+3s\right)I_2(s)=\frac{390s}{s^2+1}\Rightarrow$$

$$\left(-6s^2-16s-8\right)I_2(s)=\frac{390s}{s^2+1}\quad\Rightarrow\quad I_2(s)=\frac{390s}{\left(-6s^2-16s-8\right)\left(s^2+1\right)}$$

Breuksplitsen om terug te kunnen transformeren.

$$I_2(s)=\frac{390s}{\left(-6s^2-16s-8\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{390s}{-6\left(s^2+\frac{8}{3}s+\frac{4}{3}\right)\left(s^2+1\right)}$$

$$=\frac{-65s}{\left(s^2+\frac{8}{3}s+\frac{4}{3}\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{-65s}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+\frac{2}{3}}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$=\frac{A\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)+B(s+2)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}$$

Tellervergelijking:

$$A\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)+B(s+2)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)=-65s$$

Handige waarden van s invullen:

$$s=-2:\ A\left(-2+\frac{2}{3}\right)(4+1)+0+0=-65\cdot(-2)\Rightarrow-\frac{20}{3}A=130\Rightarrow A=-\frac{39}{2}$$

$$s=-\frac{2}{3}:\ 0+B\left(-\frac{2}{3}+2\right)\left(\frac{4}{9}+1\right)+0=-65\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\frac{4}{3}\cdot\frac{13}{9}B=\frac{130}{3}\Rightarrow B=\frac{45}{2}$$

Andere waarde van s invullen:

$$s=0:\ A\left(\frac{2}{3}\right)(1)+B(2)(1)+(0+D)(2)\left(\frac{2}{3}\right)=0\Rightarrow 2A+6B+4D=0$$

De berekende waarden $A=-\frac{39}{2}$ en $B=\frac{45}{2}$ invullen:

$$2A+6B+4D=0\Rightarrow-39+135+4D=0\Rightarrow 4D=-96\Rightarrow D=-24$$

Nog een andere waarde van s invullen:

$$s=1:\ A\left(1+\frac{2}{3}\right)(1+1)+B(1+2)(1+1)+(C+D)(1+2)\left(1+\frac{2}{3}\right)=-65$$

$$\Rightarrow 10A+18B+15C+15D=-195$$

De berekende waarden $A=-\frac{39}{2}$, $B=\frac{45}{2}$ en $D=-24$ invullen:

$$10A+18B+15C+15D=-195$$

$$\Rightarrow-195+405+15C-360=-195\Rightarrow 15C=-45\Rightarrow C=-3$$

De breuksplitsing is dus:

$$I_2(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+\frac{2}{3}}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=-\frac{39}{2}\frac{1}{s+2}+\frac{45}{2}\frac{1}{s+\frac{2}{3}}-3\frac{s}{s^2+1}-24\frac{1}{s^2+1}$$

Terugtransformeren geeft:

$$i_2(t)=-\frac{39}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{45}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}-3\cos(t)-24\sin(t)$$

Nu de berekening van $i_1(t)$

Hierboven berekend in de linkermaas:

$$I_1(s)-(1+2s)I_2(s)=0\Rightarrow I_1(s)=(2s+1)I_2(s)$$

Hierboven voor $I_2(s)$ berekend:

$$I_2(s)=\frac{-65s}{\left(s^2+\frac{8}{3}s+\frac{4}{3}\right)\left(s^2+1\right)}$$

Dit invullen in de uitdrukking voor $I_1(s)$:

$$I_1(s)=(2s+1)I_2(s)=(2s+1)\frac{-65s}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{-65s(2s+1)}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}$$

Breuksplitsen om terug te kunnen transformeren:

$$I_1(s)=\frac{-65s(2s+1)}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+\frac{2}{3}}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$=\frac{A\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)+B(s+2)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)}$$

De berekening van de coëfficiënten A, B, C en D verloopt op dezelfde manier als voor $I_2(s)$.

Tellervergelijking:

$$A\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s^2+1\right)+B(s+2)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)=-65s(2s+1)$$

Handige waarden van *s* invullen:

$$s=-2:\ A\left(-2+\frac{2}{3}\right)(4+1)+0+0=-65\cdot(-2)(-3)\Rightarrow-\frac{20}{3}A=-390\Rightarrow A=\frac{117}{2}$$

$$s=-\frac{2}{3}:\ 0+B\left(-\frac{2}{3}+2\right)\left(\frac{4}{9}+1\right)+0=-65\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\frac{4}{3}\cdot\frac{13}{9}B=\frac{-130}{9}\Rightarrow B=-\frac{15}{2}$$

Andere waarde van *s* invullen:

$$s=0:\ A\left(\frac{2}{3}\right)(1)+B(2)(1)+(0+D)(2)\left(\frac{2}{3}\right)=0\Rightarrow 2A+6B+4D=0$$

De berekende waarden $A=\frac{117}{2}$ en $B=-\frac{15}{2}$ invullen:

$$2A+6B+4D=0\Rightarrow 117-45+4D=0\Rightarrow 4D=-72\Rightarrow D=-18$$

Nog een andere waarde van *s* invullen:

$$s=1:\ A\left(1+\frac{2}{3}\right)(1+1)+B(1+2)(1+1)+(C+D)(1+2)\left(1+\frac{2}{3}\right)=-65\cdot 3$$

$$\Rightarrow 10A+18B+15C+15D=-585$$

De berekende waarden $A=\frac{117}{2}$, $B=-\frac{15}{2}$ en $D=-18$ invullen:

$$10A+18B+15C+15D=-585$$

$$\Rightarrow 585-135+15C-270=-585\Rightarrow 15C=-765\Rightarrow C=-51$$

De breuksplitsing is dus:

$$I_1(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+\frac{2}{3}} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{117}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{15}{2}\frac{1}{s+\frac{2}{3}} - 51\frac{s}{s^2+1} - 18\frac{1}{s^2+1}$$

Terugtransformeren geeft:

$$i_1(t) = \frac{117}{2}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{15}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t} - 51\cos(t) - 18\sin(t)$$