Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2

Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 5
augustus 2009

Toegepaste wiskunde voor het hbo, deel 2
Uitwerking paragraaf 5.13 (Herhalingsopgaven van hoofdstuk 5)

augustus 2009

Opgave 1
Beschrijf en teken in een *xyz*-assenstelsel de volgende oppervlakken.

a $\quad z = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6$

b $\quad x^2 + 4z^2 = y^2$

<u>Uitwerking onderdeel a</u>

$$z = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6$$

Doorsnijden met grondvlak $z = 0$:

$$0 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + \underline{4 - 4} + y^2 + 2y + \underline{1 - 1} + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = -1$$

Omdat de som van twee kwadraten niet negatief kan zijn is er geen enkel punt van het oppervlak dat in het grondvlak ligt.

Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het grondvlak en hoogte minstens 1 geeft een cirkel: bijvoorbeeld snijden met het vlak $z = 5$ geeft via een berekening als hierboven:

$$5 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Dit is een cirkel in het vlak $z = 5$ met middelpunt $(2, -1, 5)$ en straal 2.

Doorsnijden met achtervlak $x = 0$

$$z = 0 + y^2 - 0 + 2y + 6 \Rightarrow z = y^2 + 2y + 6$$

$$z = (y+1)^2 - 1 + 6 \Rightarrow z - 5 = (y+1)^2$$

Dit is een parabool

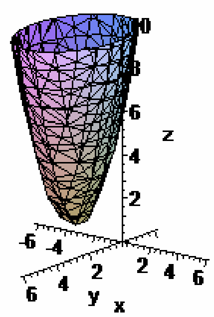
Doorsnijden met zijvlak $y = 0$

$$z = x^2 - 4x + 6$$

$$z = (x-2)^2 - 4 + 6 \Rightarrow z - 2 = (x-2)^2$$

Ook dit is een parabool

Hiernaast staat een Maple-plot van de paraboloïde.
De *x*-as is getekend van -2 tot 6, de *y*-as van -6 tot 6 en de *z*-as van 0 tot 10.



<u>Uitwerking onderdeel b</u>

$$x^2 + 4z^2 = y^2$$

Doorsnijden met grondvlak $z = 0$:

$$x^2 + 0 = y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \text{ of } x = -y$$

Dit zijn twee rechte lijnen in het grondvlak.

Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het grondvlak geeft een hyperbool, kies bijv. $z=1$:

$$x^2+4=y^2 \Rightarrow x^2-y^2=-4$$

Doorsnijden met achtervlak $x=0$ geeft twee rechte lijnen:

$$0+4z^2=y^2 \Rightarrow y=2z \text{ of } y=-2z$$

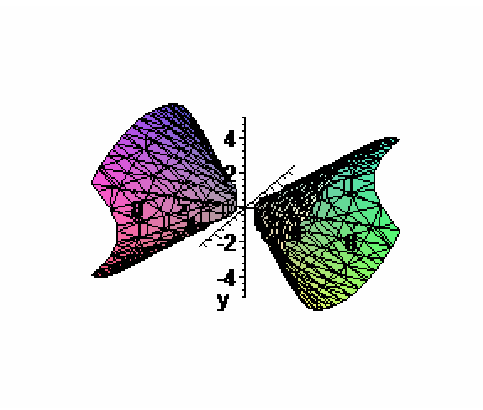
Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het achtervlak geeft een hyperbool, kies bijv. $x=4$:

$$16+4z^2=y^2 \Rightarrow 4z^2-y^2=-16 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{4^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$$

Doorsnijden met zijvlak $y=0$:

$$x^2+4z^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ én } z=0,$$

Dit geeft slechts één punt, namelijk $\mathrm{O}(0,0,0)$



Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het zijvlak geeft een ellips, kies bijv. $y=2$:

$$x^2+4z^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{z^2}{1^2}=1$$

Hiernaast staat een Maple-plot van de paraboloïde.
De *x*-as is getekend van -6 tot 6, de *y*-as van -8 tot 8 en de *z*-as van -5 tot 5.

Opgave 2

Gegeven: $u=\mathrm{e}^x(x-y)$. Toon aan dat $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u$.

<u>Uitwerking</u>

$u=\mathrm{e}^x(x-y)$, dus

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x)\cdot(x-y)+\mathrm{e}^x\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=\mathrm{e}^x\cdot(x-y)+\mathrm{e}^x\cdot 1=\mathrm{e}^x\cdot(x-y+1)$$

en

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cdot(-1)=-\mathrm{e}^x$$

Dus geldt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cdot(x-y+1)+(-\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\cdot(x-y)=u$$

Hiermee is aangetoond wat aangetoond moest worden.

Opgave 3

Door een weerstandsdraad met gemeten weerstand $R=(1,5\pm 0,5)\ \Omega$ gaat een elektrische stroom met een gemeten sterkte $I=(2,5\pm 0,05)\ \mathrm{A}$. Gedurende een tijdsduur $t=(10\pm 0,5)\ \mathrm{s}$ ontwikkelt zich een hoeveelheid warmte $Q=RI^2t$. Geef een schatting van de maximale relatieve fout in *Q*.

<u>Uitwerking</u>

Voor de gevraagde maximale relatieve fout geldt:

$$\frac{|\Delta Q|}{|Q|}=\frac{\left|\frac{\partial Q}{\partial R}\Delta R\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial I}\Delta I\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial t}\Delta t\right|}{|Q|}=\frac{|I^2t\Delta R|+|2RIt\Delta I|+|RI^2\Delta t|}{|RI^2t|}=$$

$$=\frac{|I^2t\Delta R|}{|RI^2t|}+\frac{|2RIt\Delta I|}{|RI^2t|}+\frac{|RI^2\Delta t|}{|RI^2t|}=\frac{|\Delta R|}{|R|}+2\frac{|\Delta I|}{|I|}+\frac{|\Delta t|}{|t|}=$$

$$=\frac{0,5}{1,5}+2\cdot\frac{0,05}{2,5}+\frac{0,5}{10}=\frac{1}{3}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}=\frac{127}{300}\approx 0,4233$$

Opgave 4

Twee lichamen met massa *M* en *m* hebben een massamiddelpuntsafstand *r*. Voor de aantrekkingskracht tussen deze lichamen geldt $F=\gamma\frac{Mm}{r^2}$, waarbij γ de gravitatieconstante is. Geef een schatting van de maximale relatieve fout in *F* op grond van de volgende meetgegevens:
$M=(7,0\pm 0,05)$ kg , $m=(2,0\pm 0,02)$ kg en $r=(5,0\pm 0,05)$ m .

Uitwerking

Voor de gevraagde maximale relatieve fout geldt:

$$\frac{|\Delta F|}{|F|}=\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial M}\Delta M\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial m}\Delta m\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial r}\Delta r\right|}{|F|}=\frac{\left|\gamma\frac{m}{r^2}\Delta M\right|+\left|\gamma\frac{M}{r^2}\Delta m\right|+\left|-2\gamma\frac{Mm}{r^3}\Delta r\right|}{\left|\gamma\frac{Mm}{r^2}\right|}=$$

$$=\frac{|\gamma mr\Delta M|+|\gamma Mr\Delta m|+|2\gamma Mm\Delta r|}{|\gamma Mmr|}=\frac{|\gamma mr\Delta M|}{|\gamma Mmr|}+\frac{|\gamma Mr\Delta m|}{|\gamma Mmr|}+\frac{|2\gamma Mm\Delta r|}{|\gamma Mmr|}=$$

$$=\frac{|\Delta M|}{|M|}+\frac{|\Delta m|}{|m|}+2\frac{|\Delta r|}{|r|}=\frac{0,05}{7,0}+2\cdot\frac{0,02}{2,0}+2\cdot\frac{0,05}{5,0}=\frac{1}{140}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}=\frac{33}{700}\approx 0,04714$$

Opgave 5

Bepaal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, uitgedrukt in *x* en *y*, van de impliciet geschreven functie.

a $(\sin x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}=0$

b $\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}=0$

Uitwerking onderdeel a

De impliciet gegeven functie $(\sin x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}=0$ is te schrijven als

$F(x,y)=0$, met $F(x,y)=(\sin x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}$.

Voor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ geldt dan: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Hieruit volgt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{(\cos x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}\cdot y}{(\sin x)(\cos y)-\mathrm{e}^{xy}\cdot x}$$

Uitwerking onderdeel b

De impliciet gegeven functie $\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}=0$ is te schrijven als

$F(x,y)=0$, met $F(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}$.

Voor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ geldt dan: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

We bepalen eerst $\frac{\partial F}{\partial x}$ en $\frac{\partial F}{\partial y}$ afzonderlijk:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x-\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{y}{y^2+x^2}=\frac{2x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y-\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{x}{y^2+x^2}=\frac{2y-x}{x^2+y^2}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\frac{2x+y}{x^2+y^2}}{\frac{2y-x}{x^2+y^2}}=-\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{2x+y}{x-2y}$$

Opgave 6

Gegeven de functie $z=3x^2+2y^2$. LET OP: er staat een foutje in de opgave!
Het punt (x,y) doorloopt de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 3 in het *xy*-vlak. Differentieer *z* naar de hoek φ, die de voerstraal maakt met de positieve richting van de *x*-as.

Uitwerking

Omdat (x,y) de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 3 doorloopt geldt:

$x=3\cos\varphi$ en $y=3\sin\varphi$.

Voor de afgeleide van $z=3x^2+2y^2$ naar de hoek φ geldt:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=6x\cdot(-3\sin\varphi)+4y\cdot(3\cos\varphi)=$$

$$=6\cdot 3\cos\varphi\cdot(-3\sin\varphi)+4\cdot(3\sin\varphi)\cdot(3\cos\varphi)=$$

$$=-54\sin\varphi\cos\varphi+36\sin\varphi\cos\varphi=-18\sin\varphi\cos\varphi=-9\sin(2\varphi)$$

Opgave 7
Bepaal de stationaire kritieke punten en hun aard (lokale maximum, minimum of zadelpunt) van de functie $f(x,y)=x^3-y^3-6xy+2$

Uitwerking
Voor de stationaire punten (x,y) geldt dat de beide partiële afgeleiden gelijk moeten zijn aan 0.
Er geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-0-6y+0=3x^2-6y \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2-0-6x+0=-3y^2-6x$$

Nulstellen levert twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\Rightarrow 3x^2-6y=0\Rightarrow y=\tfrac{1}{2}x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow -3y^2-6x=0\Rightarrow x=-\tfrac{1}{2}y^2$$

De tweede vergelijking invullen in de eerste geeft:

$$y=\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}y^2\right)^2\Rightarrow y^4-8y=0\Rightarrow y\left(y^3-8\right)=0\Rightarrow y=0 \text{ of } y^3=8\Rightarrow y=0 \text{ of } y=2$$

$y=0$ invullen in de tweede vergelijking levert: $x=0$
$y=2$ invullen in de tweede vergelijking levert: $x=-2$
Er zijn dus twee stationaire punten $(x,y)=(0,0)$ en $(x,y)=(-2,2)$
Voor het bepalen van de aard van de stationaire punten hebben we de tweede afgeleiden nodig:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\,,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6 \text{ en } C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y\,.$$

Voor de Hessiaan H geldt dan:

$$H=AC-B^2=6x\cdot(-6y)-(-6)^2=-36xy-36$$

In het punt $(x,y)=(0,0)$ geldt dan: $H=-36\cdot 0\cdot 0-36=-36<0$. Hier is dus sprake van een zadelpunt. Voor de *z*-coördinaat geldt: $z=f(0,0)=0-0-0+2=2$.
In het punt $(x,y)=(-2,2)$ geldt dan: $H=-36\cdot(-2)\cdot 2-36=144-36=108>0$. Bovendien geldt: $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6\cdot(-2)=-12<0$. Hier is dus sprake van een lokaal maximum. Voor de *z*-coördinaat geldt: $z=f(-2,2)=(-2)^3-2^3-6\cdot(-2)\cdot 2+2=-8-8+24+2=10$.

Opgave 8
Bepaal met de kleinste kwadratenmethode de eerstegraadsfunctie die de punten $(-2;7,7)$, $(-1;4,2)$, $(0;1,8)$, $(1;-1,3)$ en $(2;-5,0)$ het best benadert.

Uitwerking

$$\sum x=(-2)+-1+0+1+2=0$$

$$\sum x^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$$

$$\sum y=7,7+4,2+1,8+(-1,3)+(-5,0)=7,4$$

$$\sum xy=(-2)\cdot 7,7+(-1)\cdot 4,2+0\cdot 1,8+1\cdot(-1,3)+2\cdot(-5,0)=-30,9$$

aantal waarnemingen: 5

Normaalvergelijkingen van Gauss:

$$\begin{cases} a\cdot 10+b\cdot 0=-30,9 \\ a\cdot 0+b\cdot 5=7,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a=-30,9 \\ 5b=7,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3,09\approx -3,1 \\ b=1,48\approx 1,5 \end{cases}$$

Gevraagde eerstegraadsfunctie:

$$y=-3,1x+1,5$$

Opgave 9

Benader met behulp van de kleinste kwadratenmethode de meetpunten $(0;1,9)$, $(1;2,5)$, $(2;4,1)$, $(3;6,4)$, $(4;10,0)$ door een parabool van het type $y=a+bx^2$.

Uitwerking

We leiden eerst de formules af waarmee *a* en *b* te bepalen zijn. Dat gaat op dezelfde manier als de afleiding van de normaalvergelijkingen van Gauss voor het bepalen van een rechte lijn met de kleinste kwadratenmethode. We kiezen een parabool, zodanig dat de som van de kwadraten van de afwijkingen ten opzichte van deze parabool zo klein mogelijk is. Met afwijking bedoelen we de verticale afstand tussen een punt op de parabool met dezelfde *x*-coördinaat en het meetpunt. De waarden van *y* op de parabool $y=a+bx^2$ krijgen we door invullen van de *x*-waarde. Bij x_k hoort voor iedere waarde van *k* de *y*-waarde $y(x_k)=a+bx_k^{\,2}$

Voor *n* meetpunten is de genoemde som van de kwadraten: $f(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\left(a+bx_k^{\,2}-y_k\right)^2$

Dit is een functie is van twee onafhankelijke variabelen *a* en *b*. We willen een minimale waarde van $f(a,b)$ bepalen. Het is dan noodzakelijk dat de partiële afgeleiden van de eerste orde gelijk zijn aan nul. Dus moet gelden $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ en $\frac{\partial f}{\partial b}=0$.

Op vergelijkbare wijze als in paragraaf 5.12 leiden we twee vergelijkingen af. Let op: er staat nu $x_k^{\,2}$ in plaats van x_k en de rol van *a* en *b* is verwisseld. De vergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} b\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,4}+a\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,2}=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{\,2}y_k\right) \\ b\sum_{k=1}^{n}x_k^{\,2}+na=\sum_{k=1}^{n}y_k \end{cases} \text{, oftewel } \begin{cases} a\sum x_k^{\,2}+b\sum x_k^{\,4}=\sum\left(x_k^{\,2}y_k\right) \\ na+b\sum x_k^{\,2}=\sum y_k \end{cases}$$

In de gegeven situatie van de opgave geldt:

$$\sum x_k^{\,2}=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2=30$$
$$\sum x_k^{\,4}=0^4+1^4+2^4+3^4+4^4=354$$
$$\sum y_k=1,9+2,5+4,1+6,4+10,0=24,9$$
$$\sum x_k^{\,2}y_k=0^2\cdot 1,9+1^2\cdot 2,5+2^2\cdot 4,1+3^2\cdot 6,4+4^2\cdot 10,0=236,5$$

aantal waarnemingen: $n=5$

We bepalen *a* en *b* met behulp van bovenstaand stelsel en vinden:

$$\begin{cases} a\cdot 30+b\cdot 354=236{,}5 \\ 5a+b\cdot 30=24{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\approx 1{,}98 \\ b\approx 0{,}50 \end{cases}$$

De gevraagde vergelijking van de parabool is daarmee:

$$y=1{,}98+0{,}50x^2$$

Opgave 10

Driehoek *ABC* heeft twee vastehoekpunten $A(0,0)$ en $B(3,0)$. Hoekpunt *C* beweegt zich langs een rechte lijn met parametervoorstelling $x=3t$ en $y=2+2t$. Bereken snelheid waarmee hoek *A* verandert op tijdstip $t=1$.

Uitwerking

Het punt C beweegt zich in een rechte lijn. Op $t=0$ bevindt C zich in het punt $(0,2)$, op $t=1$ ligt C in het punt $(3,4)$. Maak een tekening van de situatie.

Voor de hoek A, die we α noemen, geldt: $\tan(\alpha)=\frac{y_C}{x_C}=\frac{2+2t}{3t}$.

Hieruit volgt: $\alpha=\arctan\left(\frac{2+2t}{3t}\right)$

De gevraagd snelheid is $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

Er geldt:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\left(\frac{2+2t}{3t}\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{2+2t}{3t}\right)^2}\cdot\frac{3t\cdot 2-(2+2t)\cdot 3}{(3t)^2}$$

$$=\frac{9t^2}{9t^2+(2+2t)^2}\cdot\frac{-6}{9t^2}=\frac{-6}{13t^2+8t+4}$$

Op $t=1$ geldt dus: $\left[\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1}=\left[\frac{-6}{13t^2+8t+4}\right]_{t=1}=-\frac{6}{25}\,\text{rad/s}=-0{,}24\,\text{rad/s}$