drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde
voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1
Zesde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 4
Limieten en differentiaalrekening

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 4, paragraaf 4.12

1 a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3+2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(x^2+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+2}=\dfrac{1}{0^2+2}=\tfrac{1}{2}$.

b $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$ bestaat niet, want $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{\cos x}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ en $\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{\cos x}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$.

c $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{x^2}{\sin(3x)}=\lim\limits_{x\downarrow 0}\left(\dfrac{x}{3}\dfrac{3x}{\sin(3x)}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left(\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{x}{3}\right)\left(\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{3x}{\sin(3x)}\right)=0\cdot 1=0$

d $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^3+4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x\left(x^2+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2+4}=\dfrac{0+2}{0+4}=\tfrac{1}{2}$; $y=\sqrt{t}$ is continu voor $t=\tfrac{1}{2}$, dus $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^3+4x}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{l'Hopital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2$

f $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{0+3}{0+1}=3$

2 a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}+2\frac{1}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2}+4\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{3+4\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{3+0}=\tfrac{1}{3}$$

b

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-4\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-4\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{1-0}=0$$

c

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^5}{3x^2+1}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{x^5}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-x^3}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-\infty}{3+0}=-\infty$$

d $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\tan x}{x}$ bestaat niet omdat $\tan x$ voor grote waarden van x niet begrensd is; steeds weer heeft zijn grafiek verticale asymptoten;

e Er geldt: $-1 \le \cos x \le 1$

Voor negatieve x geldt daarom: $\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{-1}{x}$

Bovendien geldt: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$.

De insluitstelling gebruikend vinden we $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Omdat de $y = e^t$ continu is voor $t = 0$ geldt nu: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{\cos x}{x}} = e^0 = 1$.

f $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \sin x$ bestaat niet, want $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ en $-1 \le \sin x \le 1$.

3 a $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to3} \frac{x}{(x+3)} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$

b

$$\lim_{t\to0} \frac{(\sin(5t))^2}{t\tan(3t)} = \lim_{t\to0}\left(\frac{\sin(5t)}{5t}\cdot\frac{\sin(5t)}{5t}\cdot\frac{3t}{\tan(3t)}\cdot\frac{5\cdot5}{3}\right) =$$

$$= 1\cdot1\cdot1\cdot\frac{25}{3} = \frac{25}{3} = 8\tfrac{1}{3}$$

c Er geldt: $-1 \le \sin u \le 1$. Dit geeft: $\frac{-1}{\sqrt{u}} \le \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \le \frac{1}{\sqrt{u}}$

Bovendien geldt: $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{u}} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$.

Met de insluitstelling geeft dit: $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} = 0$

d

$$\lim_{y\uparrow1} \frac{y^2-2}{y^2-2y+1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\uparrow1} \frac{y^2-2}{(y-1)^2} = \frac{1-2}{(0^-)^2} = -\infty$$

En dus $\lim\limits_{y\uparrow1} \arctan\left(\frac{y^2-2}{y^2-2y+1}\right) = \arctan\left(\lim\limits_{y\uparrow1} \frac{y^2-2}{y^2-2y+1}\right) = (\arctan(-\infty)) = -\frac{1}{2}\pi$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s^2e^{-s}+3s}{5s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2e^{-s}}{5s^2} + \lim_{s\to\infty} \frac{3s}{5s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{e^{-s}}{5} + \lim_{s\to\infty} \frac{3}{5s} = 0+0 = 0$$

f $\lim\limits_{x\uparrow0} \frac{x}{\ln x}$ bestaat niet omdat $\ln x$ niet bestaat voor $x < 0$.

Daarom bestaat $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\ln x}$ ook niet.

4 a $y = f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+3x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}+2\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Dus de lijn $y = 0$ (x-as) is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2+3x+2=0$.

Dit geeft: $(x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x=-2 \vee x=-1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x=-2$:

$$\lim_{x\uparrow-2} f(x) = \lim_{x\uparrow-2} \frac{x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\uparrow-2} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-2}{0^-\cdot(-1)}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x\downarrow-2} f(x) = \lim_{x\downarrow-2} \frac{x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\downarrow-2} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-2}{0^+\cdot(-1)}\right) = +\infty.$$

Conclusie: de lijn $x=-2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

Bij $x=-1$:

$$\lim_{x\uparrow-1} f(x) = \lim_{x\uparrow-1} \frac{x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\uparrow-1} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-1}{1\cdot 0^-}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x\downarrow-1} f(x) = \lim_{x\downarrow-1} \frac{x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\downarrow-1} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-1}{1\cdot 0^+}\right) = -\infty.$$

Conclusie: de lijn $x=-1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

b $\quad y = f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+2\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}+2\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

Op soortgelijke manier: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Dus de lijn $y = 0$ (x-as) is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x+2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \uparrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{-1} = 1 .$$

Op soortgelijke manier: $\lim\limits_{x \downarrow -2} f(x) = 1$.

Conclusie: $x = -2$ is geen verticale asymptoot. Er is sprake van een ophefbare discontinuïteit; er zit een perforatie in de grafiek.

Bij $x = -1$:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x+2}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 0^-}\right) = -\infty .$$

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x+2}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 0^+}\right) = +\infty .$$

Conclusie: de lijn $x = -1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

c $\quad y = f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1$$

Op soortgelijke manier: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Dus de lijn $y = 1$ is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x=-2 \vee x=-1$
Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.
Bij $x=-2$:

$$\lim_{x\uparrow -2} f(x) = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x^2+x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x^2+x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{4-2}{0^- \cdot (-1)}\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x\downarrow -2} f(x) = \lim_{x\downarrow -2} \frac{x^2+x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\downarrow -2} \frac{x^2+x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{4-2}{0^+ \cdot (-1)}\right) = -\infty .$$

Conclusie: de lijn $x=-2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)
Bij $x=-1$:

$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = \lim_{x\uparrow -1} \frac{x^2+x}{x^2+3x+2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\uparrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\uparrow -1} \frac{x}{(x+2)} = \left(\frac{-1}{1}\right) = -1$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x\downarrow -1} f(x) = -1$.

Conclusie: $x=-1$ is geen verticale asymptoot. Er is sprake van een ophefbare discontinuïteit; er zit een perforatie in de grafiek.

d $\quad y = f(x) = \dfrac{x^3-6x}{x^2+3x+2}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-6x}{x^2+3x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}+2\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\frac{6}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{\infty+0}{1+0+0} = \infty$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Er is dus geen horizontale asymptoot.

vert. asymptoten.
Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.
We lossen op: $x^2+3x+2=0$.
Dit geeft: $(x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x=-2 \vee x=-1$
Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.
Bij $x=-2$:

$$\lim_{x\uparrow -2} f(x) = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x^3-6x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x^3-6x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-8+12}{0^- \cdot (-1)}\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x\downarrow -2} f(x) = \lim_{x\downarrow -2} \frac{x^3-6x}{x^2+3x+2} = \lim_{x\downarrow -2} \frac{x^3-6x}{(x+2)(x+1)} = \left(\frac{-8+12}{0^+ \cdot (-1)}\right) = -\infty .$$

Conclusie: de lijn $x = -2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)
Bij $x = -1$:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3 - 6x}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1+6}{1 \cdot 0^-} = -\infty .$$

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3 - 6x}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1+6}{1 \cdot 0^+} = \infty$$

Conclusie: de lijn $x = -1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

e $\quad y = f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1 + \frac{1}{x}}{1} = \infty$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.
Er is dus geen horizontale asymptoot.

vert. asymptoten.
Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking. $x = 0$ is dus een kandidaat.
Limietberekening moet zekerheid geven.

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty .$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = \infty .$$

Conclusie: de lijn $x = 0$ (y-as) is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

f $\quad y = f(x) = 3 + \dfrac{1}{x} + 2\mathrm{e}^{-x}$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{1}{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right) = 3 + 0 + 0 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{1}{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right) = (3 + 0 + \infty) = \infty$$

Er is dus een horizontale asymptoot naar rechts, nl de lijn met vergelijking $y = 3$.

vert. asymptoten.
Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. $x = 0$ is dus een kandidaat.
Limietberekening moet zekerheid geven.

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\left(3+\frac{1}{x}+2\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(3+\frac{1}{0^-}+2\cdot 1\right) = -\infty .$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left(3+\frac{1}{x}+2\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(3+\frac{1}{0^+}+2\cdot 1\right) = \infty .$$

Conclusie: de lijn $x = 0$ (y-as) is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

5

a $\quad f(x) = \dfrac{3}{4x-6}$

De noemer is gelijk aan nul als $4x-6=0$, dus voor $x=\frac{3}{2}$.

$$\lim_{x\uparrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\uparrow \frac{3}{2}}\frac{3}{4x-6} = \frac{3}{0^-} = -\infty \text{ en } \lim_{x\downarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\downarrow \frac{3}{2}}\frac{3}{4x-6} = \frac{3}{0^+} = +\infty .$$

Er is dus een oneindige discontinuïteit voor $x=\frac{3}{2}$.

b $\quad f(x) = \dfrac{3-2x}{4x-6}$

De noemer is gelijk aan nul als $4x-6=0$, dus voor $x=\frac{3}{2}$.

$$\lim_{x\uparrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\uparrow \frac{3}{2}}\frac{3-2x}{4x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\uparrow \frac{3}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x\uparrow \frac{3}{2}}\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Op soortgelijke wijze: $\lim_{x\downarrow \frac{3}{2}} f(x) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ bestaat niet,

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x=\frac{3}{2}$.

c $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{2x}$

$f(x)$ bestaat niet voor $x=0$.

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{|x|}{2x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{-x}{2x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{|x|}{2x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{2x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Er is dus bij $x=0$ sprake van een eindige sprong discontinuïteit.

d $\quad f(x) = \dfrac{(\sin(3x))^2}{x}$

$f(x)$ bestaat niet voor $x=0$.

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{(\sin(3x))^2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{ (l´Hopital)}$$

$$= \lim_{x\uparrow 0} \frac{2(\sin(3x))^1 \cdot \cos(3x) \cdot 3}{1} = \lim_{x\uparrow 0}(6\sin(3x)\cos(3x)) = 0$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x = 0$.

e

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{(x-3)^3}$$

$f(x)$ bestaat niet voor $x = 3$.

$$\lim_{x\uparrow 3} f(x) = \lim_{x\uparrow 3} \frac{9 - x^2}{(x-3)^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{ (l´Hopital)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{-2\cdot x}{3(x-3)^2} = \left(\frac{-6}{3\cdot(0^-)^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\downarrow 3} f(x) = \lim_{x\downarrow 3} \frac{9 - x^2}{(x-3)^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{ (l´Hopital)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{-2x}{3(x-3)^2} = \left(\frac{-6}{3\cdot(0^+)^2}\right) = -\infty$$

Er is dus een oneindige discontinuïteit voor $x = 3$.

f

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$$

$f(x)$ bestaat niet als de noemer 0 wordt, dus niet voor $x = -2$ en niet voor $x = 3$.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x\uparrow -2} f(x) = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{ (l´Hopital)} = \lim_{x\uparrow -2} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{-5} = -\tfrac{1}{5}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x\downarrow -2} f(x) = -\tfrac{1}{5}$

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x = -2$.

Bij $x = 3$:

$$\lim_{x\uparrow 3} f(x) = \lim_{x\uparrow 3} \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\downarrow 3} f(x) = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\downarrow 3} \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Bij $x = 3$ is er dus sprake van een oneindige discontinuïteit.

6 a

$$f(x) = x^6 + \frac{1}{x^6} = x^6 + x^{-6} \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6x^{-7} = 6x^5 - \frac{6}{x^7}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} + 2x + 3 = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} + 2x + 3 = x^{-2\frac{1}{2}} + 2x + 3 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-2\tfrac{1}{2}\right)x^{-3\frac{1}{2}} + 2 = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^{3\frac{1}{2}}} + 2 = \frac{-5}{2x^3\sqrt{x}} + 2$$

c

$$f'(t)=\frac{(2t+1)\cdot 3-(3t+5)\cdot 2}{(2t+1)^2}=\frac{6t+3-6t-10}{(2t+1)^2}=\frac{-7}{(2t+1)^2}$$

d

$$\begin{aligned}g'(x)&=(x-4)(x+2)+(x+5)(x+2)+(x+5)(x-4)\\&=x^2-2x-8+x^2+7x+10+x^2+x-20\\&=3x^2+6x-18\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{(t^2-4)(2t+2)-(t^2+2t-3)(2t)}{(t^2-4)^2}\\&=\frac{(2t^3+2t^2-8t-8)-(2t^3+4t^2-6t)}{(t^2-4)^2}=\frac{-2t^2-2t-8}{(t^2-4)^2}=\frac{-2(t^2+t+4)}{(t^2-4)^2}\end{aligned}$$

f

$$g(x)=\begin{cases}-(2x-1) & \text{voor} \quad 2x-1<0\\ 2x-1 & \text{voor} \quad 2x-1>0\end{cases}=\begin{cases}1-2x & \text{voor} \quad x<\frac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{voor} \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}-2 & \text{voor} \quad x<\frac{1}{2}\\ 2 & \text{voor} \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

7 a

$$f(x)=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\cos x}=(\tan x)^{-1}+(\cos x)^{-1}$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(-1)(\tan x)^{-2}\frac{1}{(\cos x)^2}+(-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x)=\\&=-\frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}\frac{1}{(\cos x)^2}+\frac{\sin x}{(\cos x)^2}\\&=\frac{\sin x}{(\cos x)^2}-\frac{1}{(\sin x)^2}\end{aligned}$$

b

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\cos x)^2}\cdot(-\sin x)=\frac{-\sin x}{1+(\cos x)^2}$$

c

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{\ln(\arcsin x)}}\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\arcsin x\sqrt{\ln(\arcsin x)}\sqrt{1-x^2}}$$

d

$$\begin{aligned}f'(t)&=2^{\sin t}(\ln 2)\cos t+2\cos t+\cos(2t)\cdot 2+2(\sin t)^1\cdot\cos t\\&=\ln 2\cdot 2^{\sin t}\cos t+2\cos t+2\cos(2t)+2\sin t\cdot\cos t\end{aligned}$$

8 a

$$x\ln y+(\sin y)^2=\mathrm{e}^{xy}$$

$$\mathrm{d}\left(x\ln y+(\sin y)^2\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}(x\ln y)+\mathrm{d}\left((\sin y)^2\right)=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}x\cdot\ln y+x\frac{1}{y}\mathrm{d}y+2(\sin y)^1(\cos y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{xy}(\mathrm{d}x\cdot y+x\mathrm{d}y)\Rightarrow$$

$$\left(\ln y-y\mathrm{e}^{xy}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x}{y}-2\sin y\cos y+x\mathrm{e}^{xy}\right)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln y-y\mathrm{e}^{xy}}{-\frac{x}{y}-2\sin y\cos y+x\mathrm{e}^{xy}}=$$

$$=\frac{y\ln y-y^2\mathrm{e}^{xy}}{-x-2y\sin y\cos y+xy\mathrm{e}^{xy}}=\frac{y^2\mathrm{e}^{xy}-y\ln y}{x+2y\sin y\cos y-xy\mathrm{e}^{xy}}$$

b

$$y^2+x^2=1+\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\mathrm{d}\left(y^2+x^2\right)=\mathrm{d}\left(1+\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$\mathrm{d}\left(y^2+x^2\right)=\mathrm{d}\left(1+\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\left(y^2\right)+\mathrm{d}\left(x^2\right)=\mathrm{d}(1)+\mathrm{d}\left(\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)\Rightarrow$$

$$2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x=0+\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow$$

$$2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\Rightarrow$$

$$2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}y-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\right)\Rightarrow$$

$$\left(2x+\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\mathrm{d}x=\left(-2y+\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{-2y+\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{2x^3+y\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{-2x^2y+x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

9 b Controle:

het punt $(-2,1)$ ligt op de kromme, want: $(-2)^2+2\cdot(1)^2=4+2=6$

We bepalen $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in het punt $(-2,1)$.

$x^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow$

$2x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow x\mathrm{d}x = -2y\mathrm{d}y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{2y}$

In het punt $(-2{,}1)$ geldt: $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{(-2{,}1)} = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.

De raaklijn heeft dus vergelijking $y = 1 \cdot x + b$.

Het punt $(-2{,}1)$ geeft: $1 = -2 + b \Rightarrow b = 3$.

De vergelijking van de raaklijn is dus: $y = x + 3$.

10 De vergelijking $y - x = 1$ is te herschrijven tot $y = x + 1$.
De gegeven lijn heeft dus richtingscoëfficiënt 1.
We bepalen de afgeleide van de functie *f*.

$f(x) = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$

De gevraagde raaklijn moet evenwijdig zijn aan de gegeven lijn dus moet gelden: $f'(x) = 1$.

Hieruit volgt: $-\dfrac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = 1$.

We lossen deze vergelijking op:

$\sqrt{2 - x^2} = -x \Rightarrow$

$2 - x^2 = x^2 \Rightarrow$

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$

$x = -1 \vee x = 1$

Ga na dat alleen $x = -1$ voldoet.
Voor de *y*-coördinaat van het punt op de grafiek geldt dan: $y = f(-1) = \sqrt{2 - 1} = 1$
De gevraagde raaklijn heeft vergelijking: $y = 1 \cdot x + b$ en gaat door het punt $(-1{,}1)$.
Het punt invullend vinden we: $y = x + 2$

11 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right)\right) = \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) \cdot \tfrac{1}{4}\pi \cdot \mathrm{d}x$

Voor de gevraagde toename Δy geldt nu:

$\Delta y \approx \mathrm{d}y = \left[\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) \cdot \tfrac{1}{4}\pi \cdot \mathrm{d}x\right]_{x=1,dx=-0{,}02}$

$= \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) \cdot \tfrac{1}{4}\pi \cdot (-0{,}02) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{4}\pi \cdot \left(-\tfrac{2}{100}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{400} \approx 0{,}0114$