

Rekenen-wiskunde op de basisschool

Reken-wiskundedidactiek

Marc van Zanten



3 Vakdidactiek rekenen-wiskunde

Vakdidactiek rekenen-wiskunde bestaat uit een verzameling samenhangende ideeën over en principes voor het vormgeven van onderwijs in rekenen-wiskunde. Deze geven aan hoe in reken-wiskundeonderwijs rekening kan worden gehouden met ideeën en theorieën over hoe kinderen rekenen-wiskunde leren (zoals in de vorige paragraaf beschreven). Vakdidactiek is geen statisch geheel; uitwerkingen in reken-wiskundemethodes verschillen en in de onderwijspraktijk van alledag kunnen wisselende accenten worden gelegd. Ook op ‘theoretisch’ niveau is vakdidactiek in ontwikkeling onder invloed van nieuw onderzoek en nieuwe ideeën over (reken-wiskunde) onderwijs.

3.1 Onderwijsleerprincipes rekenen-wiskunde

Een vijftal belangrijke principes van vakdidactiek rekenen-wiskunde worden samen wel aangeduid als realistisch reken-wiskundeonderwijs. Deze benaming is afgeleid van het *zich realiseren*, wat bij het leren van rekenen-wiskunde zo belangrijk is.

1 Mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit

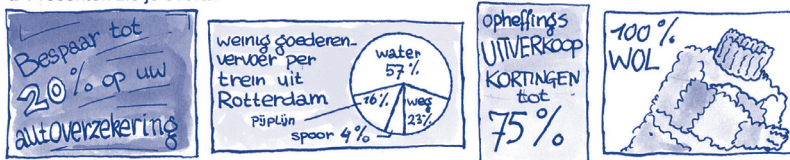
Om te zorgen dat kinderen zich kunnen realiseren wat getallen en bewerkingen betekenen, wordt in het reken-wiskundeonderwijs gebruik gemaakt van contexten. Contexten zijn voor kinderen betekenisvolle problemen en situaties; kinderen moeten zich er iets bij voor kunnen stellen. Contexten kunnen afgeleid zijn van de realiteit in de zin van de alledaagse werkelijkheid. Maar ook fantasie en, in de loop van de basisschool, de formele getallenwereld horen bij de betekenisvolle realiteit van kinderen en kunnen in de vorm van contexten worden benut. Overigens is ‘betekenisvol’ relatief; wat voor de één betekenisvol is, daar kan de ander zich niets bij voorstellen. Contexten kunnen op verschillende manieren worden ingezet. Op de eerste plaats kunnen ze worden gebruikt als bron voor het onderwijs: bijvoorbeeld om een nieuw probleem of domein te introduceren. Het mathematiseren gaat dan om het begrijpen van rekenen-wiskunde door de realiteit erbij te betrekken. Ten tweede worden ze gebruikt om eerder geleerde reken-wiskundige kennis en vaardigheden toe te passen. Dan werkt het mathematiseren als het ware de andere kant op; hierbij gaat het om het begrijpen (aanpakken, interpreteren) van de realiteit met rekenen-wiskunde als gereedschap.

realistisch reken-wiskundeonderwijs

contexten



a Procenten zie je overal.



b Hoeveel procent van de chips is al verkocht?



Werkblad 12: Teken en kleur de zakken chips.

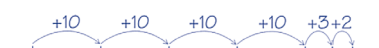
Een context als bron voor begripsvorming bij procenten. Uit *De Wereld in getallen*, leerlingenboek groep 7.

2 Modelleren en formaliseren

De (figuurlijke) afstand tussen contexten en formeel rekenen-wiskunde is soms groot. Om kinderen te helpen deze afstand te overbruggen worden hulpmiddelen gebruikt als modellen, schema's en (structuur-)materialen. Deze ondersteunen ook het verticaal mathematiseren, bijvoorbeeld als ondersteuning bij redeneren en rekenen. Ook hulnotaties en het (mogen) opschrijven van deelstappen en tussenantwoorden zijn hierbij van belang.

modellen
schema's
materialen

$$37 + 45 =$$



37



37



37

$$83 - 35 =$$



83



83



83

$37 + 45$ en $83 - 35$ op de lege getallenlijn, een veelgebruikt model. Uit *Rekenrijk*, leerlingenboek 4b.

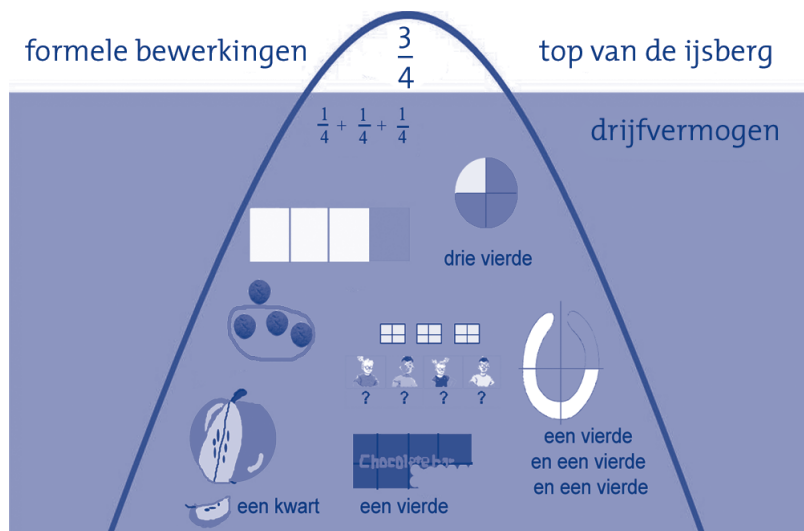
niveaus van abstractie
semi-formeel
formeel

Grofweg worden er bij het formaliseren drie niveaus van abstractie doorlopen: van (1) informeel, contextgebonden redeneren en rekenen, via (2) semi-formeel, modelondersteund redeneren en rekenen, tot (3) formeel, vakmatig redeneren en rekenen. Dit proces van formaliseren kan zich, afhankelijk van de leerstof, afspelen binnen kortere of langere tijd, van een les tot aan enkele jaren toe (bijvoorbeeld bij het rekenen met breuken). Op de basisschool wordt herhaaldelijk teruggerepen op het informele en semi-for-



drijfvermogen ijsbergmodel

mele niveau. Deze vormen het zogenaemde drijfvermogen voor het formele niveau, zoals het ijsbergmodel weergeeft.



Het ijsbergmodel. Uit *Speciaal Rekenen*, map *Breuken*.

model van kinderen model voor de wiskunde

Niet alle modellen passen goed bij elke context of elke bewerking. Bij een goede inzet van modellen en materialen zijn de onderlinge verbanden voor kinderen logisch. In het ideale geval is een model daarom zowel een model van kinderen als een model voor de wiskunde. Dat houdt in dat:

- vanuit een concrete context kinderen zelf een modelmatige tekening (mogen) bedenken;
- deze modelmatige weergave het latere formele redeneren en rekenen ondersteunt.

In reken-wiskundemethodes staan modellen en schema's veelal voorge-drukt in de leerlingboeken. Ook daarbij is van belang dat deze modellen zowel aansluiten op het denken van de leerlingen als op het formele reken-wiskunde.

3 Ruimte voor eigen inbreng van leerlingen

Vanuit de gedachte dat kinderen zelf kennis en inzicht opbouwen, is bij het leren van rekenen-wiskunde actieve en productieve inbreng van de kinderen zelf nodig. Het wiskundig denken moet bij de leerling zelf liggen. Er zijn verschillende manieren waarop dit kan worden bereikt, van relatief eenvoudig tot meer complex.



gericht oefenen productief oefenen

Het meest eenvoudig te realiseren is om naast het reguliere, gerichte oefenen ook ruimte te maken voor productief oefenen. Dat wil zeggen dat het oefenen op een open, niet voorgestructureerde manier plaatsvindt, bijvoorbeeld door kinderen te vragen zelf opgaven te verzinnen waar steeds 10 uitkomt.

eigen producties

Een hierop aansluitende werkwijze is het laten maken van eigen producties. Bijvoorbeeld door leerlingen bij een bepaalde lesinhoud te vragen zelf een erg moeilijke en een erg makkelijke opgave te verzinnen. Zo'n vraag dwingt kinderen tot wiskundig nadenken over de lesstof. Tegelijk krijgt de leerkracht hiermee inzicht in de beheersing van de kinderen.

informele aanpak

Een derde invalshoek ten slotte is de eigen, informele aanpakken en oplossingswijzen van kinderen als startpunt te nemen van het leerproces en van daaruit te komen tot formele, verkorte werkwijzen. Dit kan door contexten en problemen te gebruiken die kinderen echt aan het denken zetten, door open vragen te stellen en door steeds de inbreng van de leerlingen te betrekken bij het verdere verloop van de les. Dit vraagt van de leerkracht inzicht in het denken en redeneren van kinderen, inzicht in het lange termijn perspectief van verschillende oplossingsstrategieën en bovendien overzicht op (langlopende) leerlijnen.

formele werkwijze

interactie

4 Interactie en reflectie

Leren van rekenen-wiskunde vindt mede plaats in interactie met anderen. In het reken-wiskundeonderwijs is veel aandacht voor het uitwisselen van ideeën en oplossingsstrategieën. Interactie tussen leerkracht en leerlingen en tussen leerlingen onderling is aan de orde bij het bespreken van een opgave, het verkennen van een nieuw onderwerp, het nadenken over een rekenprobleem en het bespreken van oplossingen. Kinderen worden zo gestimuleerd om hun aanpakken te vergelijken en de voordelen en nadelen van een aanpak op een rijtje te zetten. Door zodanige reflectie op doorlopen oplossingswijzen van jezelf en van anderen kan worden gekomen tot verkorting, abstrahering en het doorzien van wiskundige relaties tussen verschillende aanpakken. Interactie verloopt niet vanzelf vlekkeloos. Als de leerkracht over de hoofden van de leerlingen heen praat is geen sprake van echte interactie. Kinderen proberen dan al snel te raden wat de leerkracht in zijn of haar hoofd heeft in plaats van kritisch na te denken over een vraag. Of de leerkracht is zo gericht op het gewenste verloop van het gesprek dat hij of zij onverwachte, maar correcte inbreng van leerlingen niet als zodanig herkent.

reflectie

verstrengeling leerlijnen

5 Verstrengeling van leerlijnen

Veel reken-wiskunde inhouden hebben met elkaar te maken, zoals optellen en aftrekken, of verhoudingen en meetkunde. Leerlijnen worden ten behoeve van begripsvorming en toepasbaarheid met elkaar vervlochten: er is sprake van verstrengeling. Verbanden en overeenkomsten tussen verschillende leerinhouden worden expliciet gemaakt.



▶▶ 3.2 Ontwikkelingen in reken-wiskundedidactiek

In de loop der tijd veranderen vakdidactische inzichten onder invloed van nieuw onderzoek en nieuwe ideeën over leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Dat was zo in het verleden en zal ook altijd wel zo blijven. Inzicht in dergelijke ontwikkelingen kan je helpen om straks in je eigen onderwijspraktijk je eigen visie op reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen.

Historisch perspectief

In de aanloop naar de realistische reken-wiskundedidactiek, zijn enkele andere didactische benaderingen te onderscheiden. De voornaamste is (achteraf) wel benoemd als het mechanisme. Deze benaming is afgeleid van het gegeven dat leerlingen als het ware op een mechanistische wijze leerden rekenen. Dat wil zeggen dat de aandacht zich vooral richtte op het inslijpen van rekenregels en procedures, meer dan op het verwerven van inzicht. Uitgangspunt was dat procedurele kennis vooral verworven zou kunnen worden door veelvuldig te oefenen met opgaven op formeel niveau. Contexten speelden een ondergeschikte rol en werden voornamelijk gebruikt als toepassing.

Deze didactische stroming was tot in de jaren '70 van de twintigste eeuw de leidende aanpak in het reken-wiskundeonderwijs. In de loop van de jaren '80 en '90 maakten mechanistische reken-wiskundemethodes steeds verder plaats voor realistische methodes.

Evenals binnen het latere realisme, werden binnen het mechanisme door reken-wiskundemethodes verschillende keuzes gemaakt en accenten gelegd. De voornaamste betrof het verschil tussen een éénsporige of een meersporige benadering. Bij de éénsporige benadering was slechts aandacht voor één bepaalde aanpak of oplossingswijze, terwijl bij de meersporige benadering wel aandacht werd geschonken aan verschillende aanpakken en oplossingsstrategieën en de onderlinge samenhang daartussen.

Andere didactische stromingen waren het structuralisme, waarbinnen het accent lag op het benutten van wiskundige structuren, en het empirisme, waarbij veel aandacht was voor de manieren waarop wiskunde in de realiteit (de empirie) voorkomt. Beide stromingen hebben in Nederland weinig invloed gehad, al komen de hier genoemde kenmerken wel terug in de realistische stroming.

Nuanceringen en kanttekeningen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs

Rond het einde van het eerste decennium van de 21^e eeuw, worden enkele kanttekeningen en nuanceringen geplaatst bij (deelaspecten van) realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zo wordt opgemerkt dat soms wordt

mechanisme

éénsporige benadering
meersporige
benadering

structuralisme
empirisme



oefenen

doorgeschoten in bepaalde uitgangspunten, bijvoorbeeld dat door het belang dat wordt gehecht aan inzicht, soms gedacht wordt dat oefenen niet meer belangrijk is.

Over oefenen wordt zowel gedacht dat veel oefenen vanzelf leidt tot inzicht, als dat inzichtelijk verworven kennis niet hoeft te worden geoefend. Dit zijn allebei misverstanden; zowel inzichtelijk leren als oefenen zijn belangrijk en kunnen eigenlijk niet los van elkaar worden gezien. Verschillende deskundigen pleiten daarom voor een vernieuwde balans tussen inzicht en oefenen.

oplossingsstrategieën

Een ander punt waarover wordt gediscussieerd is de aandacht voor verschillende oplossingsstrategieën. Het benutten van eigen, informele aanpakken van kinderen schiet soms door in aandacht voor veel verschillende strategieën waarbij weinig reflectie plaatsvindt op de effectiviteit ervan. Vooral zwakke rekenaars zien dan door de bomen het bos niet meer, is de gedachte. Helaas schiet de reactie daarop soms ook weer door, als bijvoorbeeld wordt gekozen om standaard nog maar één strategie aan te bieden voor alle leerlingen. Daarmee worden leerlingen die wel verbanden tussen verschillende rekenmanieren aankunnen tekort gedaan. Bovendien wordt dan niet voldaan aan de Kerndoelen en het Referentiekader.

cijferen

In realistische reken-wiskundemethodes is meer dan vroeger aandacht voor schatten en schattend rekenen, en minder aandacht voor cijferend rekenen. Niet verrassend zijn de prestaties van leerlingen de laatste jaren op het gebied van schatten sterk vooruit gegaan, maar op het gebied van cijferen sterk achteruit. Bovendien lijkt het erop dat leerlingen vaak fouten maken doordat zij, ook bij complexe opgaven, geen gebruik maken van uitrekenpapier. Als reactie hierop wordt gepleit voor (weer) meer aandacht voor cijferen, en – bij verschillende rekenvormen – voor het leren maken en benutten van hulpnotaties.

taligheid

Een laatste punt van kritiek dat wel wordt gehoord is dat taalzwakke leerlingen last hebben van contexten, omdat deze het rekenonderwijs te talig zouden maken. Door contexten weg te laten en zoveel mogelijk kaal en formeel te rekenen, wordt het deze leerlingen makkelijker gemaakt om te kunnen rekenen, zo wordt wel geredeneerd. Een tegenargument hierbij is dat zo voorbij wordt gegaan aan het belang van horizontaal mathematiseren voor begrip en voor het leren toepassen. Bovendien, zo benadrukken taalkundigen, moeten taalzwakke leerlingen juist als het ware worden ondergedompeld in taal om er veel van te leren. Met andere woorden; als taalzwakke leerlingen nooit worden geconfronteerd met talige opgaven bij rekenen-wiskunde, zullen ze zéker niet leren ermee om te gaan.



▶▶ 3.3 Tegemoetkomen aan verschillen bij rekenen-wiskunde

Kinderen verschillen bij reken-wiskundeonderwijs in veel opzichten, zoals tempo, inzicht, abstractievermogen, geautomatiseerde en gememoriseerde kennis, en het aantal denkstappen dat ze nog kunnen overzien. Onder deskundigen zijn veel verschillende opvattingen over hoe het beste om kan worden gegaan met zulke verschillen tussen kinderen bij rekenen-wiskunde. Toch vallen er wel enkele zaken aan te geven waar de meesten het wel over eens zijn.

instructiebehoefte

Sommige ideeën van realistisch rekenen-wiskunde – het gebruik van betekenisvolle contexten, modellen, schema's en (structuur)materialen – komen goed tegemoet aan de instructiebehoefte van zwakke rekenaars. Op het gebied van interactie en reflectie hebben zwakkere rekenaars echter juist extra ondersteuning nodig, omdat zij vaak moeite hebben hun denken en werkwijze onder woorden te brengen.

convergente differentiatie

Over het algemeen wordt aanbevolen gebruik te maken van convergente differentiatie. Dat houdt kort gezegd in dat niet wordt gedifferentieerd door niveaugroepen te maken die verschillen in tempo (en daardoor steeds verder uiteen gaan lopen), maar dat de hele groep juist bij elkaar wordt gehouden. De kinderen werken dan in de lessen aan dezelfde lesstof. Binnen de les vindt differentiatie plaats naar instructie door zwakkere rekenaars na de reguliere instructie, verlengde instructie aan te bieden. Deze kan, in vergelijking met de reguliere instructie, meer sturend van aard zijn. Ook kan worden gevarieerd in de hoeveelheid opgaven die binnen een les worden gemaakt. Bij verlengde instructie en extra hulp kan waar nodig worden gewisseld tussen concreet, modelondersteund en formeel niveau. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van verschillende of meerdere contexten, modellen, materialen en oplossingsstrategieën. Dit wordt methodische differentiatie genoemd. Verder kan het werkgeheugen worden ontlast door nadrukkelijk meer tussenstappen en deelantwoorden te laten noteren. Zowel voor zwakkere als sterkere rekenaars moet de reguliere stof worden aangepast in hoeveelheid en moeilijkheid. Het Referentiekader met fundamentele doelen en streefdoelen komt tegemoet aan het onderscheid tussen zwakkere rekenaars en (de meeste) andere rekenaars. Vrijwel alle reken-wiskundemethodes die rond 2011 verschijnen hebben dit onderscheid verwerkt. Sommige methodes geven bovendien aan welke stof specifiek voor sterke rekenaars is.

instructie

verlengde instructie

methodische differentiatie