Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2

Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 3

Uitwerking herhalingsopgaven deel 2

Hoofdstuk 3.10 (Complexe getallen)

1a.
We splitsen het getal in twee delen:

$$e^{-\ln 3+i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)-1} = e^{-\ln 3}e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln 3}}e^{-1}(\cos(-\tfrac{3}{4}\pi)+i\sin(-\tfrac{3}{4}\pi))$$

$$= \frac{1}{3e}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-i\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$3i^{-5} = \frac{3}{i^5} = \frac{3}{i^4 i} = \frac{3}{1\cdot i} = \frac{3i}{i^2} = -3i$$

Samengevoegd levert dit een complex getal op met een reëel deel $\frac{1}{3e}(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{6e}\sqrt{2}$ en een imaginair deel $-\frac{1}{3e}(\frac{1}{2}\sqrt{2})-3 = -\frac{1}{6e}\sqrt{2}-3$:

$$z = -\frac{1}{6e}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{6e}\sqrt{2}+3\right)i$$

1b.

$\left|-2+2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{4+12} = 4$ en $\arg(-2+2i\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$, dus $\left|(-2+2i\sqrt{3})^{10}\right| = 4^{10}$ en

$\arg(-2+2i\sqrt{3})^{10} = 10\arg(-2+2i\sqrt{3}) = \frac{20}{3}\pi = 6\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ (modulo 2π)

$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2$ en $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{1}{6}\pi$, dus $\left|(\sqrt{3}+i)^{18}\right| = 2^{18} = 4^9$ en

$\arg(\sqrt{3}+i)^{18} = 18\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{18}{6}\pi = 3\pi = \pi$ (modulo 2π)

Dus $\left|\frac{(-2+2i\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{18}}\right| = \frac{\left|(-2+2i\sqrt{3})^{10}\right|}{\left|(\sqrt{3}+i)^{18}\right|} = 4$ en $\arg\left(\frac{(-2+2i\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{18}}\right) = \frac{2}{3}\pi-\pi = -\frac{1}{3}\pi$

We kunnen dus schrijven $\frac{(-2+2i\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{18}} = 4\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right) = 2-2\sqrt{3}i$

$\left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2$ en $\arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5}{6}\pi$, dus $\left|(-\sqrt{3}+i)^6\right| = 2^6$ en

$\arg(-\sqrt{3}+i)^6 = 6\arg(-\sqrt{3}+i) = 5\pi = \pi$ (modulo 2π)

$\left|-1-i\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ en $\arg(-1-i) = \frac{5}{4}\pi$, dus $\left|(-1-i)^4\right| = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$ en

$\arg(-1-i)^4 = 4\arg(-1-i) = -5\pi = \pi$ (modulo 2π)

We kunnen dus schrijven

$(-\sqrt{3}+i)^6(-1-i)^4 = 4\cdot 2^6\left(\cos\left(\pi+\pi\right)+i\sin\left(\pi+\pi\right)\right) = 256(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))=256$.

De beide getallen samengevoegd levert dus een complex getal met een reëel deel 258 en een imaginair deel $-2\sqrt{3}$: $z = 258-2\sqrt{3}i$.

2a. Stel $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$

$|2\mathrm{i}z| = |2\mathrm{i}| \cdot |z| = 2r$ en $\arg(2\mathrm{i}z) = \arg 2\mathrm{i} + \arg z = \frac{1}{2}\pi + \varphi$

Dus moet gelden: $4 \le 2r < 6 \Rightarrow 2 \le r < 3$ en $0 < \frac{1}{2}\pi + \varphi < \frac{1}{2}\pi \Rightarrow -\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$

Het gaat hierbij om het gebied in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de twee cirkels met middelpunt O en stralen 2 resp. 3, in het vierde kwadrant ($-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$). Alleen de rand van de cirkel met straal 2 telt mee vanwege het gelijkteken in $2 \le r < 3$.

2b. Stel $\mathrm{Re}(z) = x$ en $\arg(z) = \varphi$

$x = \mathrm{Re}(z) = |3 - 4\mathrm{i}| = 5$

Verder moet gelden $0 < \varphi < \frac{1}{4}\pi$

Het gaat hierbij om het gedeelte van de lijn $x = 5$ in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de x-as ($\varphi = 0$) en de lijn $y = x$ ($\varphi = \frac{1}{4}\pi$).

2c. Stel $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$

$|z^3| = |z|^3 = r^3$ en $\arg(z^4) = 4\arg z = 4\varphi$

Dus moet gelden: $1 < r^3 \le 27 \Rightarrow 1 < r \le 3$ en $-\frac{1}{2}\pi \le 4\varphi < \pi \Rightarrow -\frac{1}{8}\pi \le \varphi < \frac{1}{4}\pi$

Het gaat hierbij om het gebied in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de twee cirkels met middelpunt O en stralen 1 resp. 3, en de lijnen $\varphi = -\frac{1}{8}\pi$ resp. $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Wat de rand van het gebied betreft: Alleen de rand van de cirkel met straal 3 telt mee (vanwege het gelijkteken in $1 < r \le 3$) en het gedeelte van de lijn $\varphi = -\frac{1}{8}\pi$ (vanwege het gelijkteken in $-\frac{1}{8}\pi \le \varphi < \frac{1}{4}\pi$).

2d. Stel $\mathrm{Re}(z) = x$ en $\mathrm{Im}(z) = y$

$|z - 5\mathrm{i}| = |4 + 3\mathrm{i} - z| \Rightarrow |x + \mathrm{i}y - 5\mathrm{i}| = |4 + 3\mathrm{i} - x - \mathrm{i}y| \Rightarrow |x + \mathrm{i}(y-5)| = |4 - x + \mathrm{i}(3 - y)|$

Dus: $\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (3-y)^2} \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = (4-x)^2 + (3-y)^2$

Uitwerken leidt tot

$x^2 + y^2 - 10y + 25 = 16 - 8x + x^2 + 9 - 6y + y^2 \Rightarrow 8x - 4y = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

Het gaat hierbij om de lijn $y = 2x$ in het complexe vlak.

3. Stel $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ en $\arg(z) = \varphi$

$|z + 1 - \mathrm{i}| = 10 \Rightarrow |x + \mathrm{i}y + 1 - \mathrm{i}| = |x + 1 + \mathrm{i}(y-1)| = 10$

Hieruit volgt: $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 10 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 100$ (1).

Ook gegeven is:

$\arg(z^2) = \pi \Rightarrow 2\arg z = 2\varphi = \pi \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\pi$, dus $x = 0$ (2) en $y > 0$ (*z* ligt op de positieve imaginaire as).

(2) ingevuld in (1) levert: $1 + (y-1)^2 = 100 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{99} \Rightarrow y = 3\sqrt{11} + 1$ (alleen de positieve oplossing geldt, omdat $y > 0$).

Conclusie: $z = (3\sqrt{11} + 1)\mathrm{i}$. Het beeldpunt van *z* ligt op de imaginaire as.

3b. Het beeldpunt van $\overline{z}$ is t.o.v het beeldpunt van z gespiegeld t.o.v. de reële as. Het beeldpunt van $\text{i}z$ krijgen we uit het beeldpunt van z door het over een hoek van $\arg(\text{i}) = \frac{1}{2}\pi$ te draaien in positieve richting (het komt dus op de negatieve reële as te liggen). Controle:
$\overline{z} = -(3\sqrt{11}+1)\text{i}$ en $\text{i}z = (3\sqrt{11}+1)\text{i}^2 = -(3\sqrt{11}+1)$.

4a.
$2z^2 + 4\text{i}z - 3 = 0 \Rightarrow z^2 + 2\text{i}z - \frac{3}{2} = 0$
Kwadraatafsplitsen leidt tot:
$(z+\text{i})^2 - \text{i}^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow (z+\text{i})^2 = \frac{1}{2}$
$z = -\text{i} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} - \text{i}$
4b.
Stel $z^3 = w \Rightarrow w^2 + 3\text{i}w + 4 = 0$
Kwadraatafsplitsen leidt tot:
$(w + \frac{3}{2}\text{i})^2 - (\frac{3}{2}\text{i})^2 + 4 = 0 \Rightarrow (w + \frac{3}{2}\text{i})^2 = -\frac{25}{4}$
Hieruit volgt $w + \frac{3}{2}\text{i} = \pm\frac{5}{2}\text{i} \Rightarrow w = \text{i}$ of $w = -4\text{i}$
Dus $w = z^3 = \text{i}$ of $w = z^3 = -4\text{i}$
$z^3 = \text{i} = 1(\cos(\frac{1}{2}\pi + k2\pi) + \text{i}\sin(\frac{1}{2}\pi + k2\pi)) \Rightarrow$
$z = \sqrt[3]{1}(\cos(\frac{1}{6}\pi + k\frac{2}{3}\pi) + \text{i}\sin(\frac{1}{6}\pi + k\frac{2}{3}\pi))$
voor $k = 0,1,2$.
Dus $z_1 = \cos(\frac{1}{6}\pi) + \text{i}\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\text{i}$
$z_2 = \cos(\frac{5}{6}\pi) + \text{i}\sin(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\text{i}$
$z_3 = \cos(\frac{9}{6}\pi) + \text{i}\sin(\frac{9}{6}\pi) = -\text{i}$
$z^3 = -4\text{i} = 4(\cos(\frac{3}{2}\pi + k2\pi) + \text{i}\sin(\frac{3}{2}\pi + k2\pi)) \Rightarrow$
$z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{1}{2}\pi + k\frac{2}{3}\pi) + \text{i}\sin(\frac{1}{2}\pi + k\frac{2}{3}\pi))$
voor $k = 0,1,2$.
Dus $z_4 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{1}{2}\pi) + \text{i}\sin(\frac{1}{2}\pi)\right) = \sqrt[3]{4}\text{i}$
$z_5 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{7}{6}\pi) + \text{i}\sin(\frac{7}{6}\pi)\right) = \sqrt[3]{4}(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\text{i})$
$z_6 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{11}{6}\pi) + \text{i}\sin(\frac{11}{6}\pi)\right) = \sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\text{i})$

4c.
$\text{i}z^2 + (2-2\text{i})z + 3\text{i} = 0 \Rightarrow z^2 + \dfrac{2-2\text{i}}{\text{i}}z + 3 = 0 \Rightarrow$
$z^2 + (-2-2\text{i})z + 3 = 0 \Rightarrow z^2 - (2+2\text{i})z + 3 = 0$
Kwadraatafspitsen leidt tot:
$(z-(1+i))^2 - (1+\text{i})^2 + 3 = 0 \Rightarrow (z-(1+\text{i}))^2 = 1 + 2\text{i} - 1 - 3 = -3 + 2\text{i}$
$-3 + 2\text{i} = \sqrt{9+4}(\cos(\arg(-3+2\text{i}) + \text{i}\sin(\arg(-3+2\text{i})) = \sqrt{13}(\cos(2,55359005) + \text{i}\sin(2,55359005))$
dus
$z - (1+\text{i}) = \sqrt[4]{13}(\cos\frac{1}{2}(2,55.. + k2\pi) + i\sin\frac{1}{2}(2,55.. + k2\pi))$ voor $k = 0,1$

Conclusie:

$$z_1 = 1+\mathrm{i}+1{,}898828(\cos 1{,}276795+\mathrm{i}\sin 1{,}276795)$$
$$= 1+\mathrm{i}+1{,}898828\cdot 0{,}289784+1{,}898828\cdot 0{,}957092\mathrm{i}$$
$$= 1{,}5502+2{,}81735\mathrm{i}$$
$$z_2 = 1+\mathrm{i}+1{,}898828(\cos(1{,}276795+\pi)+\mathrm{i}\sin(1{,}276795+\pi))$$
$$= 1+\mathrm{i}+1{,}898828\cdot(-0{,}289784)+1{,}898828\cdot(-0{,}957092)\mathrm{i}$$
$$= 0{,}44975-0{,}817353\mathrm{i}$$

4d.

Stel $z^3 = w \Rightarrow w^2+(1-\mathrm{i})w-\mathrm{i}=0$

Kwadraatafsplitsen leidt tot:

$$(w+\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2-(\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2-\mathrm{i}=0 \Rightarrow (w+\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2=\tfrac{1}{4}(1-2\mathrm{i}-1)+\mathrm{i}=\tfrac{1}{2}\mathrm{i}$$
$$\tfrac{1}{2}i=\tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{1}{2}\pi+k2\pi)+i\sin(\tfrac{1}{2}\pi+k2\pi))$$

Hieruit volgt $w+\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})=\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\cos(\tfrac{1}{4}\pi+k\pi)+i\sin(\tfrac{1}{4}\pi+k\pi))$ voor $k=0,1$

Dus $w=z^3=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{4}\pi)$

$$=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}+(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2+\mathrm{i}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2=\mathrm{i}$$

of $w=z^3=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\tfrac{5}{4}\pi)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{4}\pi)$

$$=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}-(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2-\mathrm{i}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2=-1$$

Splitsen we op:

$$z^3=\mathrm{i}=1(\cos(\tfrac{1}{2}\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{2}\pi+k2\pi))\Rightarrow$$
$$z=\sqrt[3]{1}(\cos(\tfrac{1}{6}\pi+k\tfrac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{6}\pi+k\tfrac{2}{3}\pi))$$

voor $k=0,1,2$.

Dus $z_1=\cos(\tfrac{1}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{6}\pi)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$$z_2=\cos(\tfrac{5}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{6}\pi)=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}$$
$$z_3=\cos(\tfrac{9}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{9}{6}\pi)=-\mathrm{i}$$

en

$$z^3=-1=1(\cos(\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi+k2\pi))\Rightarrow$$
$$z=1(\cos(\tfrac{1}{3}\pi+k\tfrac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi+k\tfrac{2}{3}\pi))$$

voor $k=0,1,2$.

Dus $z_4=\cos(\tfrac{1}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{1}{3}\pi)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$

$$z_5=\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)=-1$$
$$z_6=\cos(\tfrac{5}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{3}\pi)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$$

5a.

De fasevector van $f(t)$ is $\alpha_f=1\cdot e^{i(-\frac{1}{3}\pi)}=\cos(-\tfrac{1}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(-\tfrac{1}{3}\pi)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$

De fasevector van $g(t)=3\sin(2t+\tfrac{1}{4}\pi)=3\cos(\tfrac{1}{2}\pi-2t-\tfrac{1}{4}\pi)=3\cos(-2t+\tfrac{1}{4}\pi)=3\cos(2t-\tfrac{1}{4}\pi)$

is $\alpha_g=3\cdot e^{i(-\frac{1}{4}\pi)}=3\left(\cos(-\tfrac{1}{4}\pi)+\mathrm{i}\sin(-\tfrac{1}{4}\pi)\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}$

De fasevector van $h(t) = -4\cos(2t + \frac{1}{6}\pi) = 4\cos(\pi - 2t - \frac{1}{6}\pi)$=$4\cos(-2t + \frac{5}{6}\pi) = 4\cos(2t - \frac{5}{6}\pi)$

is $\alpha_h = 4 \cdot e^{i(-\frac{5}{6}\pi)} = 4\left(\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6}\pi)\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$

5b. $\alpha_s = \alpha_f + \alpha_g + \alpha_h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}i + 2\sqrt{3} - 2i$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) + i(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)$$

$$= -0{,}84278 - 4{,}987345i$$

Hiervan is de modulus $|\alpha_s| = \sqrt{(-0{,}84278)^2 + (-4{,}987345)^2} = 5{,}05805$

en het argument $\arg(\alpha_s) = \arctan\left(\dfrac{-4{,}987345}{-0{,}84278}\right) - \pi = -1{,}738198$ (we moeten π aftrekken want α_s ligt in het derde kwadrant).

Voor $f(t) + g(t) + h(t)$ is het reële deel van $f_c(t) + g_c(t) + h_c(t) = \alpha_s e^{i2t}$

$f_c(t) + g_c(t) + h_c(t) = 5{,}05805e^{i(-1{,}738198)}e^{i2t} = 5{,}05805e^{i(2t-1{,}738198)}$

Het reële deel hiervan is

$\mathrm{Re}\left(5{,}05805e^{i(2t-1{,}738198)}\right) = 5{,}05805\cos(2t - 1{,}738198)$

6a.

$v(t) = \dfrac{du}{dt} = -\frac{10}{3}\sin\left(\frac{1}{3}t\right)$

$= \frac{10}{3}\sin\left(-\frac{1}{3}t\right)$

$= \frac{10}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{3}t)\right)$

$= \frac{10}{3}\cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\pi\right)$ cm/s

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -\frac{10}{3}\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}t\right)$

$= \frac{10}{9}\cos\left(\pi - \frac{1}{3}t\right)$

$= \frac{10}{3}\cos\left(\frac{1}{3}t - \pi\right)$ cm/s^2 of $\frac{10}{3}\cos\left(\frac{1}{3}t + \pi\right)$ cm/s^2

6b.

De fasevector van *u(t)* is $\alpha_u = 10e^0 = 10$ (op de positieve reële as)

De fasevector van *v(t)* is $\alpha_v = \frac{10}{3}e^{i(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{10}{3}i$ (op de positieve imaginaire as, over $\frac{1}{2}\pi$ gedraaid t.o.v de fasevector α_u en met een factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd)

De fasevector van *a(t)* is $\alpha_a = \frac{10}{9}e^{i\pi t} = -\frac{10}{9}$ (op de negatieve reële as, weer over $\frac{1}{2}\pi$ gedraaid en met een factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd, maar nu t.o.v de fasevector α_v.