

drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1

Vijfde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 4

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2011



Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 4, paragraaf 4.12

1 a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 + 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{0^2 + 2} = \frac{1}{2}.$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ bestaat niet, want $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$

c $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{\sin(3x)} = \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{x}{3} \frac{3x}{\sin(3x)} \right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{3}\right) \left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)}\right) = 0 \cdot 1 = 0$

d $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(x^2+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{0+2}{0+4} = \frac{1}{2};$ $y = \sqrt{t}$ is continu voor $t = \frac{1}{2}$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^3+4x}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$

f $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \frac{0 + 3}{0 + 1} = 3$

2 a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2} + 4\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}}{3 + 4\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 4\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - 4\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

c

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^5}{3x^2+1} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^5}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - x^3}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - \infty}{3 + 0} = -\infty$$

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x}{x}$ bestaat niet omdat $\tan x$ voor grote waarden van x niet begrensd is; steeds weer heeft zijn grafiek verticale asymptoten;

e Er geldt: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Voor negatieve x geldt daarom: $\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{-1}{x}$

Bovendien geldt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$.

De insluitstelling gebruikend vinden we $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Omdat de $y = e^t$ continu is voor $t = 0$ geldt nu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\cos x}{x}} = e^0 = 1$.

f $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \sin x$ bestaat niet, want $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ en $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3 a
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

b

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin(5t))^2}{t \tan(3t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5t)}{5t} \cdot \frac{\sin(5t)}{5t} \cdot \frac{3t}{\tan(3t)} \cdot \frac{5 \cdot 5}{3} \right) = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{25}{3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \end{aligned}$$

c Er geldt: $-1 \leq \sin u \leq 1$. Dit geeft: $\frac{-1}{\sqrt{u}} \leq \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$

Bovendien geldt: $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{u}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$.

Met de insluitstelling geeft dit: $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} = 0$

d

$$\lim_{y \uparrow 1} \frac{y^2 - 2}{y^2 - 2y + 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{y \uparrow 1} \frac{y^2 - 2}{(y-1)^2} = \frac{1-2}{(0^-)^2} = -\infty$$

$$\text{En dus } \lim_{y \uparrow 1} \arctan \left(\frac{y^2 - 2}{y^2 - 2y + 1} \right) = \arctan \left(\lim_{y \uparrow 1} \frac{y^2 - 2}{y^2 - 2y + 1} \right) = (\arctan(-\infty)) = -\frac{1}{2}\pi$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 e^{-s} + 3s}{5s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 e^{-s}}{5s^2} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{5s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{-s}}{5} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3}{5s} = 0 + 0 = 0$$

f $\lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{\ln x}$ bestaat niet omdat $\ln x$ niet bestaat voor $x < 0$.

Daarom bestaat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$ ook niet.

4 a
$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$$

hor. asymptoten:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 3 \frac{x}{x^2} + 2 \frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0\end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Dus de lijn $y = 0$ (x -as) is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-2}{0^- \cdot (-1)} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-2}{0^+ \cdot (-1)} \right) = +\infty.$$

Conclusie: de lijn $x = -2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

Bij $x = -1$:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-1}{1 \cdot 0^-} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-1}{1 \cdot 0^+} \right) = -\infty.$$

Conclusie: de lijn $x = -1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

b
$$y = f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

hor. asymptoten:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + 2 \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 3 \frac{x}{x^2} + 2 \frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x^2}}{1 + 3 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0\end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Dus de lijn $y = 0$ (x -as) is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x = -2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow -2} f(x) &= \lim_{x \uparrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \uparrow -2} \frac{x + 2}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = 1$.

Conclusie: $x = -2$ is geen verticale asymptoot. Er is sprake van een ophefbare discontinuïteit; er zit een perforatie in de grafiek.

Bij $x = -1$:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x + 2}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 0^-} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x + 2}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 0^+} \right) = +\infty.$$

Conclusie: de lijn $x = -1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

c
$$y = f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$$

hor. asymptoten:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 + 0} = 1\end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Dus de lijn $y = 1$ is horizontale asymptoot naar rechts en naar links.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x^2 + x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{4 - 2}{0^- \cdot (-1)} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x^2 + x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{4 - 2}{0^+ \cdot (-1)} \right) = -\infty.$$

Conclusie: de lijn $x = -2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

Bij $x = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow -1} f(x) &= \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \uparrow -1} \frac{x(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x}{x + 2} = \left(\frac{-1}{1} \right) = -1 \end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = -1$.

Conclusie: $x = -1$ is geen verticale asymptoot. Er is sprake van een ophefbare discontinuïteit; er zit een perforatie in de grafiek.

d
$$y = f(x) = \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2}$$

hor. asymptoten:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - \frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{6}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\infty + 0}{1 + 0 + 0} = \infty \end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Er is dus geen horizontale asymptoot.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking.

We lossen op: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Dit geeft: $(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -1$

Limietberekening moet zekerheid geven over de aanwezigheid van verticale asymptoten.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x^3 - 6x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-8 + 12}{0^- \cdot (-1)} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -2} \frac{x^3 - 6x}{(x + 2)(x + 1)} = \left(\frac{-8 + 12}{0^+ \cdot (-1)} \right) = -\infty.$$

Conclusie: de lijn $x = -2$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

Bij $x = -1$:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3 - 6x}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1 + 6}{1 \cdot 0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3 - 6x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3 - 6x}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1 + 6}{1 \cdot 0^+} = \infty$$

Conclusie: de lijn $x = -1$ is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

e
$$y = f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x}$$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 + \frac{1}{x}}{1} = \infty$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Er is dus geen horizontale asymptoot.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. Dus de nulpunten van de noemer komen in aanmerking. $x = 0$ is dus een kandidaat.

Limietberekening moet zekerheid geven.

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^3 - x + 1}{x} = \left(\frac{1}{0^+} \right) = \infty.$$

Conclusie: de lijn $x = 0$ (y-as) is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

f
$$y = f(x) = 3 + \frac{1}{x} + 2e^{-x}$$

hor. asymptoten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} + 2e^{-x} \right) = 3 + 0 + 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x} + 2e^{-x} \right) = (3 + 0 + \infty) = \infty$$

Er is dus een horizontale asymptoot naar rechts, nl de lijn met vergelijking $y = 3$.

vert. asymptoten.

Kandidaten zijn de waarden van x waarvoor $f(x)$ niet bestaat. $x = 0$ is dus een kandidaat.

Limietberekening moet zekerheid geven.

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \left(3 + \frac{1}{x} + 2e^{-x} \right) = \left(3 + \frac{1}{0^-} + 2 \cdot 1 \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \left(3 + \frac{1}{x} + 2e^{-x} \right) = \left(3 + \frac{1}{0^+} + 2 \cdot 1 \right) = \infty.$$

Conclusie: de lijn $x = 0$ (y-as) is inderdaad verticale asymptoot (zowel van links als van rechts)

5

a
$$f(x) = \frac{3}{4x - 6}$$

De noemer is gelijk aan nul als $4x - 6 = 0$, dus voor $x = \frac{3}{2}$.

$$\lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} \frac{3}{4x - 6} = \frac{3}{0^-} = -\infty \text{ en } \lim_{x \downarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \downarrow \frac{3}{2}} \frac{3}{4x - 6} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

Er is dus een oneindige discontinuïteit voor $x = \frac{3}{2}$.

b
$$f(x) = \frac{3 - 2x}{4x - 6}$$

De noemer is gelijk aan nul als $4x - 6 = 0$, dus voor $x = \frac{3}{2}$.

$$\lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} \frac{3 - 2x}{4x - 6} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} \frac{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \uparrow \frac{3}{2}} \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Op soortgelijke wijze: $\lim_{x \downarrow \frac{3}{2}} f(x) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ bestaat niet,

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x = \frac{3}{2}$.

c
$$f(x) = \frac{|x|}{2x}$$

$f(x)$ bestaat niet voor $x = 0$.

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x}{2x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{2x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Er is dus bij $x = 0$ sprake van een eindige sprong discontinuïteit.

d
$$f(x) = \frac{(\sin(3x))^2}{x}$$

$f(x)$ bestaat niet voor $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow 0} f(x) &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{(\sin(3x))^2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(l'Hopital)} \\ &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{2(\sin(3x))^1 \cdot \cos(3x) \cdot 3}{1} = \lim_{x \uparrow 0} (6 \sin(3x) \cos(3x)) = 0\end{aligned}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x = 0$.

e
$$f(x) = \frac{9 - x^2}{(x - 3)^3}$$

$f(x)$ bestaat niet voor $x = 3$.

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{9 - x^2}{(x - 3)^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(l'Hopital)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-2 \cdot x}{3(x - 3)^2} = \left(\frac{-6}{3 \cdot (0^-)^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{9 - x^2}{(x - 3)^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(l'Hopital)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{-2x}{3(x - 3)^2} = \left(\frac{-6}{3 \cdot (0^+)^2}\right) = -\infty$$

Er is dus een oneindige discontinuïteit voor $x = 3$.

f
$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$$

$f(x)$ bestaat niet als de noemer 0 wordt, dus niet voor $x = -2$ en niet voor $x = 3$.

Bij $x = -2$:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(l'Hopital)} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

Op soortgelijke manier: $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -\frac{1}{5}$

Er is dus een ophefbare discontinuïteit voor $x = -2$.

Bij $x = 3$:

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{x + 2}{(x - 3)(x + 2)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{1}{(x - 3)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x + 2}{(x - 3)(x + 2)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{1}{(x - 3)} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Bij $x = 3$ is er dus sprake van een oneindige discontinuïteit.

6 a

$$f(x) = x^6 + \frac{1}{x^6} = x^6 + x^{-6} \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6x^{-7} = 6x^5 - \frac{6}{x^7}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} + 2x + 3 = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} + 2x + 3 = x^{-2\frac{1}{2}} + 2x + 3 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-2\frac{1}{2}\right)x^{-3\frac{1}{2}} + 2 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{2}}} + 2 = \frac{-5}{2x^3 \sqrt{x}} + 2$$

c

$$f'(t) = \frac{(2t+1) \cdot 3 - (3t+5) \cdot 2}{(2t+1)^2} = \frac{6t+3-6t-10}{(2t+1)^2} = \frac{-7}{(2t+1)^2}$$

d

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-4)(x+2) + (x+5)(x+2) + (x+5)(x-4) \\ &= x^2 - 2x - 8 + x^2 + 7x + 10 + x^2 + x - 20 \\ &= 3x^2 + 6x - 18 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(t^2-4)(2t+2) - (t^2+2t-3)(2t)}{(t^2-4)^2} \\ &= \frac{(2t^3+2t^2-8t-8) - (2t^3+4t^2-6t)}{(t^2-4)^2} = \frac{-2t^2-2t-8}{(t^2-4)^2} = \frac{-2(t^2+t+4)}{(t^2-4)^2} \end{aligned}$$

f

$$g(x) = \begin{cases} -(2x-1) & \text{voor } 2x-1 < 0 \\ 2x-1 & \text{voor } 2x-1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-2x & \text{voor } x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{voor } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -2 & \text{voor } x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{voor } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

7

a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cos x} = (\tan x)^{-1} + (\cos x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1)(\tan x)^{-2} \frac{1}{(\cos x)^2} + (-1)(\cos x)^{-2} (-\sin x) = \\ &= -\frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2} \frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{\sin x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x}{(\cos x)^2} - \frac{1}{(\sin x)^2} \end{aligned}$$

b

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\cos x)^2} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{1+(\cos x)^2}$$

c

$$f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{\ln(\arcsin x)}} \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\arcsin x \sqrt{\ln(\arcsin x)} \sqrt{1-x^2}}$$

d

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2^{\sin t} (\ln 2) \cos t + 2 \cos t + \cos(2t) \cdot 2 + 2(\sin t)^1 \cdot \cos t \\ &= \ln 2 \cdot 2^{\sin t} \cos t + 2 \cos t + 2 \cos(2t) + 2 \sin t \cdot \cos t \end{aligned}$$

8

a

$$x \ln y + (\sin y)^2 = e^{xy}$$

$$\begin{aligned}
d(x \ln y + (\sin y)^2) &= d(e^{xy}) \Rightarrow \\
d(x \ln y) + d((\sin y)^2) &= d(e^{xy}) \Rightarrow \\
dx \cdot \ln y + x \frac{1}{y} dy + 2(\sin y)^1 (\cos y) dy &= e^{xy} (dx \cdot y + x dy) \Rightarrow \\
(\ln y - ye^{xy}) dx &= \left(-\frac{x}{y} - 2 \sin y \cos y + xe^{xy} \right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\ln y - ye^{xy}}{-\frac{x}{y} - 2 \sin y \cos y + xe^{xy}} = \\
&= \frac{y \ln y - y^2 e^{xy}}{-x - 2y \sin y \cos y + xye^{xy}} = \frac{y^2 e^{xy} - y \ln y}{x + 2y \sin y \cos y - xye^{xy}}
\end{aligned}$$

b $y^2 + x^2 = 1 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
d(y^2 + x^2) &= d\left(1 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
d(y^2 + x^2) &= d\left(1 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow \\
d(y^2) + d(x^2) &= d(1) + d\left(\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow \\
2ydy + 2xdx &= 0 + \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \\
2ydy + 2xdx &= \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} \Rightarrow \\
2ydy + 2xdx &= \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx\right) \Rightarrow \\
\left(2x + \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx &= \left(-2y + \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\right) dy \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x + \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right)}{-2y + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{2x^3 + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)}{-2x^2 y + x \cos\left(\frac{y}{x}\right)}
\end{aligned}$$

9 b Controle:

het punt $(-2, 1)$ ligt op de kromme, want: $(-2)^2 + 2 \cdot (1)^2 = 4 + 2 = 6$

We bepalen $\frac{dy}{dx}$ in het punt $(-2, 1)$.

$$x^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow$$

$$2xdx + 4ydy = 0 \Rightarrow xdx = -2ydy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

In het punt $(-2,1)$ geldt: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,1)} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$

De raaklijn heeft dus vergelijking $y = 1 \cdot x + b.$

Het punt $(-2,1)$ geeft: $1 = -2 + b \Rightarrow b = 3.$

De vergelijking van de raaklijn is dus: $y = x + 3.$

10 De vergelijking $y - x = 1$ is te herschrijven tot $y = x + 1.$

De gegeven lijn heeft dus richtingscoëfficiënt 1.

We bepalen de afgeleide van de functie $f.$

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

De gevraagde raaklijn moet evenwijdig zijn aan de gegeven lijn dus moet gelden:

$$f'(x) = 1.$$

Hieruit volgt: $-\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = 1.$

We lossen deze vergelijking op:

$$\sqrt{2 - x^2} = -x \Rightarrow$$

$$2 - x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x = -1 \vee x = 1$$

Ga na dat alleen $x = -1$ voldoet.

Voor de y -coördinaat van het punt op de grafiek geldt dan: $y = f(-1) = \sqrt{2 - 1} = 1$

De gevraagde raaklijn heeft vergelijking: $y = 1 \cdot x + b$ en gaat door het punt $(-1,1).$

Het punt invullend vinden we: $y = x + 2$

11 $dy = d\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot dx$

Voor de gevraagde toename Δy geldt nu:

$$\Delta y \approx dy = \left[\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot dx \right]_{x=1, dx=-0,02}$$

$$= \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (-0,02) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \left(-\frac{2}{100}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{400} \approx 0,0114$$