Formulekaart behorende bij Toegepaste Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs, Deel 2 ISBN 978 90 06 95228 5

Rijen en reeksen

Eindige meetkundige reeks:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ als } r \neq 1.$$

Limiet van een oneindige meetkundige reeks:

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}, \text{ mits } -1 < r < 1.$$

Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Taylorreeksen rond $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-(n-1))}{n!}x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

Vectorrekening

Het *inwendig product* van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$, notatie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, is gedefinieerd als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Het *uitwendig product* $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$ kan berekend worden volgens:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & a_1 & b_1 \\ \vec{e_2} & a_2 & b_2 \\ \vec{e_3} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Complexe getallen

Drie schrijfwijzen voor een complex getal:

1 $z = x + iy$

2 $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

3 $z = re^{i\varphi}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (formule van Euler)

Rekenen met complexe getallen

1 Met de vorm $x + iy$. Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$. $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$	2 Met de exponentiële vorm. Stel $z_1 = re^{i\varphi_1}$ en $z = r_2 e^{i\varphi_2}$. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$

1 Het oplossen van $az^2 + bz + c = 0$, waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.
Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

a Als $D \geq 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

b Als $D < 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

2 Er zijn n oplossingen van $z^n = c$, waarbij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en $c \in \mathbb{C}$:

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} e^{i\left(\frac{\arg(c)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \text{ voor } k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Matrixrekening

Product van matrices
Als A een $m \times n$-matrix en B een $n \times q$-matrix dan is het product $C = AB$ de $m \times q$-matrix, waarvan de elementen zijn:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

voor $i = 1, 2, \ldots, m$ en $j = 1, 2, \ldots, q$.

Determinanten

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, dan is $|A|$ als volgt te berekenen:

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$: ontwikkeling naar de j-de kolom, waarbij $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

of $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$: ontwikkeling naar de i-de rij, waarbij $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

waarbij A_{ij} de cofactor en M_{ij} de minor van het element a_{ij} is.

Functies van twee variabelen
Totale differentiaal
De totale differentiaal van $z = f(x, y)$ is gedefinieerd als:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Totale afgeleide
Als $z = f(x,y)$ en x en y zijn functies van t, dan is de totale afgeleide:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

De herhaalde integraal
De herhaalde integraal van $f(x,y)$ over het gebied G is gedefinieerd door:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}A$$

In rechthoekscoördinaten: $\iint_G f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

In poolcoördinaten: $\iint_G f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

De inhoud van het lichaam onder de grafiek van een positieve functie $z = f(x,y)$ boven het gebied G is gelijk aan: $V = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}A$.

Differentiaalvergelijkingen
Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten

De standaardvorm is: $a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = r(x)$.
Oplossingsmethode:
1 Maak de differentiaalvergelijking homogeen.
2 Los de karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ op.

Geval	Voor de oplossingen λ_1 en λ_2 van $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ geldt:	De algemene oplossing van $a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = 0$ is:
1	λ_1 en λ_2 reëel en $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{hom} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
2	λ_1 en λ_2 reëel en gelijk: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$	$y_{hom} = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
3	λ_1 en λ_2 complex, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y_{hom} = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$

3 Bepaal y_p met de methode van de onbepaalde coëfficiënten..
4 De algemene oplossing is: $y = y_{hom} + y_p$

Numerieke oplossing van differentiaalvergelijkingen
Methode van Euler:

$$\begin{cases} y_0^{\mathrm{E}} = y_0 \; (y_0 \text{ is gegeven}) \\ y_{k+1}^{\mathrm{E}} = y_k^{\mathrm{E}} + h \cdot f\left(x_k, y_k^{\mathrm{E}}\right), \text{voor } k = 0, 1, 2, \ldots n-1. \end{cases}$$

Methode van Euler-Heun:

$$\begin{cases} y_0^{\mathrm{E}} = y_0^{\mathrm{H}} = y_0 \; (y_0 \text{ is gegeven}) \\ y_{k+1}^{\mathrm{E}} = y_k^{\mathrm{H}} + h \cdot f\left(x_k, y_k^{\mathrm{H}}\right) \\ y_{k+1}^{\mathrm{H}} = y_k^{\mathrm{H}} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_k, y_k^{\mathrm{H}}\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\mathrm{E}}\right)\right), \text{voor } k = 0, 1, 2, \ldots n-1 \end{cases}$$