



Extra opgaven hoofdstuk 4 Limieten en differentiaalrekening

4.1 Het limietbegrip en 4.2 Het berekenen van limieten

1.

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$.

Bepaal $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Wat betekent dit voor de grafiek van f .

2.

Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten

a. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{x^2 + 9}$

b. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{(2x + 6)^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$

e. $\lim_{x \uparrow -3} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$

f. $\lim_{x \downarrow 3} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$

3.

Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten

a. $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

b. $\lim_{x \uparrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

d. $\lim_{x \downarrow 4} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

e. $\lim_{x \uparrow 4} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$

g. $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

h. $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

i. $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 + 2x}{(x - 2)^2}$

j. $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{(x - 2)^2}$

k. $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)^2}$

l. $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)^2}$

4.

Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten

a. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^3 - 1}{3t^2 + 2}$

b. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4t^3 + 1}{3t^2 - 2}$

c. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 - 1}{3t^2 + 2}$

d. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4t^2 + 1}{3t^2 - 2}$

e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^3 - 1}{3t^4 + 2}$

f. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4t^3 - 1}{3t^4 + 2}$

g. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{u} - 4u^4}{2u^2 + \sqrt{u} + 5}$

h. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3 + 4u^2}{5 - 2u^2 + u\sqrt{u}}$



5.

Bereken de volgende limieten.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-3x)}{5x}$

b. $\lim_{x \uparrow 0} \frac{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{2x}$

c. $\lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{\cos(2x)}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{\tan^2(3x)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin x \cos x}$

f. $\lim_{x \downarrow 0} \frac{5x^2}{(\sin(3x))^2 \tan(2x)}$

6.

Bereken de volgende limieten

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan(3x)}{2x}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(\sin x)^3}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{\sin x}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(3x)}{e^{2x}}$

7

Bereken de eventueel aanwezige horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies. Maak een plot (met de grafische rekenmachine of de computer) om de berekeningen te controleren.

a. $y = f(t) = \frac{2t - 4}{t^2 - 4}$

b. $y = f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$

c. $y = f(x) = \frac{2x - 1}{4x^3 - x}$

d. $y = f(x) = \frac{2x + 3}{4x^3 - x}$

e. $y = f(u) = \frac{2u^3 - 1}{u^3 + 4u}$

f. $y = f(u) = \frac{u^2}{u^3 + 4u}$

4.3 Continuïteit

8.

Bepaal waar de volgende functies discontinu zijn en geef, indien mogelijk, het type discontinuïteit aan.

a. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 5}$

b. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

c. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}$

d. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$



Toegepaste Wiskunde deel 1

9.

Bepaal waar de volgende functies discontinu zijn en geef, indien mogelijk, het type discontinuïteit aan.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2x - 4} & \text{voor } x \neq 2 \\ 2 & \text{voor } x = 2 \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{voor } x \leq -1 \\ \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right)} & \text{voor } -1 < x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$$

10.

Hieronder is steeds het voorschrift van de functie f gegeven. Bepaal zo mogelijk de waarde van de constante a , waarvoor deze functie f continu is.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{5x} & \text{voor } x \neq 0 \\ a & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3x)}{5x} & \text{voor } x \neq 0 \\ a & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{|x|} & \text{voor } x \neq 0 \\ a & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

11.

Bepaal indien mogelijk de volgende limieten.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(1 - e^{-2x})$$

$$\text{b. } \lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{\tan 3x}}{5x}$$

$$\text{c. } \lim_{x \downarrow 0} e^{\frac{\tan 3x}{5x}}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\cos 3x}}{2x}$$

12.

Bepaal indien mogelijk de volgende limieten.

$$\text{a. } \lim_{t \downarrow 0} \ln\left(\frac{\tan 3t}{2t}\right)$$

$$\text{b. } \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left|\frac{\cos 3t}{2t}\right|$$



4.4 Inleiding tot de differentiaalrekening

13.

Bereken het differentiequotient van de functie met voorschrift $y = f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ als

- x toeneemt van 0 tot 1.
- x toeneemt van 0 tot 0,1.
- x afneemt van 4 tot 3,9.
- x afneemt van 1 tot 0,9.

14.

Bereken het differentiequotient van de functie met voorschrift $y = f(x) = 3 - 2x$ als

- x toeneemt van 0 tot 1.
- als x toeneemt van -3 tot -2 .
- als x afneemt van a tot $a - 1$.
- als x toeneemt van a tot $a + \Delta a$.

15.

Bereken het differentiequotient van de volgende functies

- $y = f(t) = 2t^2 - 3t$
- $z = f(u) = (u + 1)^2$

16.

Gegeven is de functie met voorschrift $y = f(t) = t^2 - 3t$. Bepaal met behulp van de definitieformule de volgende afgeleiden..

- $f'(1)$
- $f'(t)$

4.5 De afgeleide van een aantal standaardfuncties; rekenregels en 4.6 De kettingregel

17.

Differentieer de volgende functies.

- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4$
- $f(x) = x^4\sqrt{x^3} - \frac{8}{3}\sqrt{x} + 3x - 1$
- $f(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3\sqrt{x} + \sqrt{5}$
- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi^3}$

18.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

- $f(x) = -4 \tan x + \sin x + 2x$
- $g(x) = \tan x - \frac{1}{\cos x}$
- $f(t) = \sin t \tan t$
- $h(t) = x \sin t + x^2 \sqrt{t}$



Toegepaste Wiskunde deel 1

19.

Differentieer

a. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{3}}$

b. $g(y) = \frac{3y^4}{4} + \frac{2}{5y^5}$

c. $h(t) = (3t^3 - 2t + 5)(4 - 7t)$

d. $k(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

20.

Differentieer

a. $h(t) = \frac{t^2}{\tan t}$

b. $g(t) = \frac{t + \tan t}{\cos t}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt{x} - x^2\sqrt{3}$

d. $h(x) = x^2 \sin x \tan x$

21.

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$.

- Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 1.
- Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 0.
- Bepaal het punt op de grafiek van f waar de raaklijn horizontaal loopt.

22.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Herleid de antwoorden zoveel mogelijk daar waar het voor de hand ligt.

a. $f(x) = (2x^2 - 3x + 5)^7$

b. $f(t) = (t^4 + 3t^2 - 1)^{-2}$

c. $g(t) = (t^3 + 2(t^2 - 4)^{-3})^5$

d. $f(x) = (x^5 - 3x)^5 \cdot (1 + 3x^3)^3$

23.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Herleid de antwoorden zoveel mogelijk daar waar het voor de hand ligt.

a. $h(u) = \frac{3u^2 + 2u + 1}{5u - 4}$

b. $k(t) = \frac{t^2 + 1}{(t^2 - 1)^2}$

c. $g(t) = \left(\frac{t^2 + 6^3}{5 - 3t}\right)^{-5}$

d. $f(x) = \frac{(x^2 + 1)^3}{(5 - 3x)^4}$

24.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4 + 2}}$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - 5}}$

c. $g(t) = \frac{t}{\sqrt{6t^4 + 5}}$

d. $g(t) = \sqrt{2t - \sqrt{3t}}$



25.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies en herleid waar mogelijk het antwoord tot de eenvoudigste vorm

a. $f(x) = \frac{\tan^4 x}{\cos^3 x}$

b. $f(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}}$

c. $f(t) = \sin^3(2t) + \cos^3(2t)$

d. $f(t) = \tan^4(2t) + \frac{1}{\cos(2t)}$

4.7 De afgeleide van exponentiële en logaritmische functies en 4.9 De afgeleide van de cyclometrische functies

26.

Differentieer de volgende functies.

a. $f(x) = e^{-x^3}$

b. $f(x) = xe^{\sin(2x)}$

c. $f(x) = \frac{e^{x+\sin(2x)}}{\tan(3x)}$

d. $f(x) = e^{x^3 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)}$

27.

Bepaal de afgeleide van

a. $g(t) = \ln(t^3)$

b. $g(t) = (\ln t)^3$

c. $g(t) = \ln(\ln(\ln t))$

d. $g(t) = \sqrt{\ln(\sin(3t))}$

28.

Bereken de afgeleide van

a. $f(t) = 7^{2t^3-3t}$

b. $f(t) = 2^{3 \log(4t+5)}$

c. $g(x) = \ln(xe^x)$

d. $h(t) = \frac{\ln(2t^3)}{t^6}$

29.

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a. $g(t) = \arccos(3t) - \arcsin(3t)$

b. $f(x) = \arccos(x^3)$

c. $k(t) = t \arccos(\sqrt{1-t^2})$

30.

Differentieer

a. $g(u) = 2 \arctan\left(\frac{5}{u}\right) + 5 \ln(u^2 + 25)$

b. $f(t) = (t + \arctan(3t))^2$

c. $g(x) = \frac{x^2 + 1}{\arctan x}$



4.8 De differentiaal dy en dx

31.

Bepaal steeds de gevraagde differentiaal.

- Bepaal dx als $y = \frac{1}{4}x^8 - 5x^3 + 2x$.
- Bepaal dx als $x^4y^2 - x^2y^4 = 4x^3y^3$.
- Bepaal dz als $z^2 \cdot t = \sin(z^2 + t)$
- Bepaal dy als $5x^3 \cdot \log y + 3y^5 \cdot \log x = x^2\sqrt{x}$

32.

Bepaal $\frac{dy}{dx}$ voor de volgende krommen.

- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|--|
| a. | $x^3 + 3x^2y + y^3 = 5$ | b. | $x \cdot \tan(5y) = (5y - 4) \cdot 2^{3x}$ |
| e. | $\frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} = 1$ | f. | $y^2 \cdot \log x = \sqrt{x} \cdot 10^y$ |

33.

Gegeven de functie $y = f(x) = \frac{2}{\pi}x + \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$. Benader de functie f in het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, 2\sqrt{3}\right)$ met een rechte lijn

31.

Bepaal steeds de gevraagde differentiaal.

- Bepaal dx als $y = \frac{1}{4}x^8 - 5x^3 + 2x$.
- Bepaal dx als $x^4y^2 - x^2y^4 = 4x^3y^3$.
- Bepaal dz als $z^2 \cdot t = \sin(z^2 + t)$
- Bepaal dy als $5x^3 \cdot \log y + 3y^5 \cdot \log x = x^2\sqrt{x}$

32.

Bepaal $\frac{dy}{dx}$ voor de volgende krommen.

- $x^3 + 3x^2y + y^3 = 5$
- $\frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} = 1$

33.

Gegeven de kromme K met vergelijking $x^2 - y^2 = 6xy - 10$.

- Toon aan: $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{3x + y}$
- Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme K in het punt $P(-3, 19)$
- In welk(e) punt(en) loopt de raaklijn aan K horizontaal?
- In welk(e) punt(en) loopt de raaklijn aan K verticaal?



4.11 De regels van L'Hôpital

34.

Bepaal, indien ze bestaan, de volgende limieten.

a. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^{3u} - 2^{-u}}{\sin(5u)}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$

c. $\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 \cdot e^{3t})$

35.

Bereken zo mogelijk de volgende limieten.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

b. $\lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{3v^4 - 4v + 5}{3v^3 - 2v^5}$

c. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + t^2 \sqrt{t}}{1 + 3t^2}$

36.

Gegeven de limiet $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \sqrt{x+7} - ax + 3}{x - 2}$

- Welke waarde moet a hebben, als gegeven is bovenstaande limiet bestaat?
- Bereken bovenstaande limiet als deze bestaat (zie a.)