drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

# Toegepaste Wiskunde
# voor het hoger beroepsonderwijs

## Deel 1
Zesde, herziene druk

# Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 1
# Basisvaardigheden en basistechnieken

**Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 1, paragraaf 1.9**

1a $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

1b $\frac{\left(\frac{2}{a}\right)}{3a}=\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{3a}=\frac{2}{3a^2}$

1c $\frac{a-b}{c}-\frac{2ac-3b}{c^2}=\frac{(a-b)c}{c^2}-\frac{2ac-3b}{c^2}=\frac{ac-bc-2ac+3b}{c^2}=\frac{-ac-bc+3b}{c^2}$

1d $\frac{\frac{3b}{a^2}}{\frac{a}{b}}=\frac{3b}{a^2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{3b^2}{a^3}$

2a $x(x-y)-y(y-x)=x^2-xy-y^2+yx=x^2-y^2$

2b $\frac{1}{2}(a+b-c)-\frac{3}{2}(c-b)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}c+\frac{3}{2}b=\frac{1}{2}a+2b-2c$

2c
$$\begin{aligned}(a-c)^3&=(a-c)^2(a-c)\\&=(a^2-2ac+c^2)(a-c)\\&=a^3-2a^2c+c^2a-a^2c+2ac^2-c^3\\&=a^3-3a^2c+3ac^2-c^3\end{aligned}$$

2d $(a+2b)^2-(a-b)^2=a^2+4ab+4b^2-(a^2-2ab+b^2)=6ab+3b^2$

3a $\left(2a^3\right)^2+\left(3a^2\right)^3=4a^6+27a^6=31a^6$

3b $a^2(a+b)^2(a-b)^{-2}=\frac{a^2(a^2+2ab+b^2)}{(a-b)^2}=\frac{a^4+2a^3b+a^2b^2}{a^2-2ab+b^2}$

3c $(x^3y^2z)^{-1}\cdot(x^2y^0z^{-1})=x^{-3}y^{-2}z^{-1}x^2z^{-1}=x^{-1}y^{-2}z^{-2}=\frac{1}{xy^2z^2}$

3d
$$\begin{aligned}(x+3)(x-2)(x-1)&=(x^2+3x-2x-6)(x-1)\\&=(x^2+x-6)(x-1)\\&=x^3+x^2-6x-x^2-x+6\\&=x^3-7x+6\end{aligned}$$

4a $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{4}{3}}=a^{\frac{11}{6}}$

4b $\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b^3}\cdot c}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}\cdot c^{-1}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}-1}=a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{-1}\cdot c^{-\frac{1}{2}}$

4c $x\sqrt{x}+x\sqrt{x^3}+x^2\sqrt{x}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}+x\cdot x^{\frac{3}{2}}+x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{5}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{5}{2}}$

4d $\sqrt{2^5}+\left(\sqrt{2}\right)^5+2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{5}{2}}+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5+2^{\frac{5}{2}}=3\cdot 2^{\frac{5}{2}}$

5a $x^2-4=(x+2)(x-2)$

5b $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

5c $a^2+6a+5=(a+5)(a+1)$

5d $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

6a $3x+5=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

6b $3x+5a=7a \Rightarrow 3x=2a \Rightarrow x=\frac{2}{3}a$

6c $3x^2-x-10=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-10)}}{2\cdot 3}=\dfrac{1\pm\sqrt{121}}{6} \Rightarrow x=2 \vee x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$

6d $x^2+2x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-5)}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=-1\pm\sqrt{6}$

7a $ax-4b=3x-2a \Rightarrow ax-3x=4b-2a \Rightarrow (a-3)x=4b-2a \Rightarrow x=\dfrac{4b-2a}{a-3}$

7b $2x-\dfrac{a}{x}=b \Rightarrow 2x^2-a=bx \Rightarrow 2x^2-bx-a=0 \Rightarrow$

$x=\dfrac{b\pm\sqrt{(-b)^2-4\cdot 1\cdot(-a)}}{2\cdot 2}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4a}}{4}$

7c $x^2-ax+b=cx \Rightarrow x^2-ax-cx+b=0 \Rightarrow$

$x^2-(a+c)x+b=0 \Rightarrow x=\dfrac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4b}}{2}$

7d $(x-a)(x-b)=c \Rightarrow x^2-(a+b)x+ab-c=0 \Rightarrow x=\dfrac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4(ab-c)}}{2}$

8a $\dfrac{1}{c}-\dfrac{2c+1}{c^2}=\dfrac{c}{c^2}-\dfrac{2c+1}{c^2}=$

$\dfrac{c-(2c+1)}{c^2}=\dfrac{-c-1}{c^2}=-\dfrac{c+1}{c^2}$

8b $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)^2}-\dfrac{x}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-x-x+1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=1$

8c $\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{2p-1}{p+3}+\dfrac{1-5p}{(p-1)(p+3)}=\dfrac{p(p+3)}{(p-1)(p+3)}-\dfrac{(2p-1)(p-1)}{(p-1)(p+3)}+\dfrac{1-5p}{(p-1)(p+3)}$

$=\dfrac{p^2+3p-(2p^2-2p-p+1)+1-5p}{(p-1)(p+3)}$

$=\dfrac{p^2+3p-2p^2+3p-1+1-5p}{(p-1)(p+3)}=\dfrac{-p^2+p}{(p-1)(p+3)}=\dfrac{-p(p-1)}{(p-1)(p+3)}$

$=-\dfrac{p}{p+3}$

8d $\frac{y}{y+1}+\frac{4}{y-1}+4=\frac{y(y-1)}{(y+1)(y-1)}+\frac{4(y+1)}{(y-1)(y+1)}+\frac{4(y+1)(y-1)}{(y+1)(y-1)}$

$$=\frac{y^2-y+4y+4+4(y^2-1)}{(y+1)(y-1)}$$

$$=\frac{5y^2+3y}{(y+1)(y-1)}$$

$$=\frac{y(5y+3)}{(y+1)(y-1)}$$

9a $2^x=3\Rightarrow x={}^2\log 3=\frac{\log 3}{\log 2}\approx 1,5850$

9b $\frac{1}{2^x}=3\Rightarrow 2^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x={}^2\log\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\log\frac{1}{3}}{\log 2}\approx -1,5850$

9c $2^{-2x}=4^{x+1}\Rightarrow 2^{-2x}=\left(2^2\right)^{x+1}=2^{2x+2}\Rightarrow -2x=2x+2\Rightarrow -4x=2\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

9d

$$2^x+2^{-x}=3\Rightarrow a+\frac{1}{a}=3$$

$$\Rightarrow a^2+1=3a\Rightarrow a^2-3a+1=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2^x=2,6180\vee 2^x=0,3820$$

$$\Rightarrow x={}^2\log 2,6180\vee x={}^2\log 0,3820$$

$$\Rightarrow x=\frac{\log 2,6180}{\log 2}\approx 1,3885\vee x=\frac{\log 0,3820}{\log 2}\approx -1,3885$$

10a $\log x=-2=x=10^{-2}=0,01$

10b $3\cdot {}^2\log x=1\Rightarrow {}^2\log x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

10c $|x|=2\Rightarrow x=2\vee x=-2$

10d $\log\left(|x|\right)=-\sqrt{2}\Rightarrow |x|=10^{-\sqrt{2}}=0,0385\Rightarrow x=\pm 0,0385$

11a $\begin{cases}ax-2y=3\\3x+5y=b\end{cases}$ heeft één oplossing wanneer $\frac{a}{3}\neq\frac{-2}{5}\Rightarrow a\neq-\frac{6}{5}$

11b $\begin{cases}ax-2y=3\\3x+5y=b\end{cases}$ heeft geen oplossing wanneer $\frac{a}{3}=\frac{-2}{5}\Rightarrow a=-\frac{6}{5}$ èn $\frac{3}{b}\neq\frac{-2}{5}\Rightarrow b\neq-\frac{15}{2}$

12a $\begin{cases}x+5y=13\\2x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+10y=26\\2x-y=4\end{cases}\Rightarrow 11y=22\Rightarrow y=2\Rightarrow 2x-2=4\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$

De oplossing is dus: $x=3\wedge y=2$

12b $\begin{cases} 3x+6y=21 \\ 2x-7y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y=21 & \times 2 \\ 2x-7y=3 & \times 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 6x+12y=42 \\ 6x-21y=9 \end{cases} \Rightarrow 33y=33 \Rightarrow y=1$

$\Rightarrow 2x-7\cdot 1=3 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

De oplossing is dus: $x=5 \wedge y=1$

12c $\begin{cases} -x+4y=3 \\ 2x-8y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y=3 & \times 2 \\ 2x-8y=-6 & \times 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+8y=6 \\ 2x-8y=-6 \end{cases} \Rightarrow 0=0$

Dit stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen. We hadden dit ook meteen kunnen zien, immers (zie bladzijde 40): $\frac{-1}{2}=\frac{4}{-8}=\frac{3}{-6}$

12d $\begin{cases} 2x+4y=15 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=15 & \times 1 \\ x+2y=7 & \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=15 \\ 2x+4y=14 \end{cases} \Rightarrow 0=1$

Dit stelsel is dus strijdig, geen oplossingen. We hadden dit ook meteen kunnen zien. Immers (zie bladzijde 40): $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}\neq\frac{15}{7}$

13a $x^2-7x-12\leq 0$

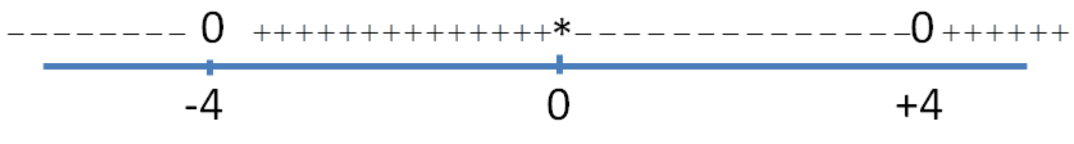
Stel $x^2-7x-12=0 \Rightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{49+48}}{2}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{97}$

Maak nu een tekenoverzicht:


Hieruit volgt: $x^2-7x-12\leq 0$ wanneer $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{97}\leq x\leq\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{97}$

13b $x-\frac{16}{x}\leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-16}{x}\leq 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x}\leq 0$.

Maak weer een tekenoverzicht:




Hieruit volgt dat $x-\frac{16}{x}\leq 0$ wanneer $x\leq -4 \vee 0<x\leq 4$

13c $2x^2-3x+10\geq 0$

Stel $2x^2-3x+10=0$. De discriminant van $2x^2-3x+10$ is

$2x^2-3x+10=0 D=3^2-4\cdot 2\cdot 10<0$. De vergelijking heeft dus geen oplossingen.

Aangezien de coëfficiënt van $x^2$ positief is (2) is de vorm $2x^2-3x+10$ altijd positief.

De oplossing van de ongelijkheid is dus: voor alle (reële) waarden van *x*.

13d $\sqrt{2x-5} \le \sqrt{x-2}$

Voordat we aan beide kanten van het ongelijkheidsteken kwadrateren stellen we dat zowel $2x-5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2\frac{1}{2}$ als $x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$. Conclusie: Voorwaarde is dat $x \ge 2\frac{1}{2}$.

Nu kunnen we kwadrateren: $2x-5 \le x-2 \Rightarrow x \le 3$.

De oplossing van de ongelijkheid is dus: $2\frac{1}{2} \le x \le 3$.