Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2

Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 4

Uitwerkingen herhalingsopgaven deel 2

Hoofdstuk 4 (Matrices en determinanten)

Opgave 1

a

$$A^2 - 4A + I = O \Leftrightarrow I = 4A - A^2$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}I = A^{-1}\left(4A - A^2\right)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = 4I - A$$

b

$$A^2 - 4A + I = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4+p & 4p \\ 4 & 4+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4p \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3+p & 0 \\ 0 & -3+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p = 3$$

c

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A|I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} 2 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \text{b} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opmerking
Inderdaad geldt:

$$A^{-1} = 4I - A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

a

Het stelsel is van de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b

Inverse matrix bestaat als $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{array}{|ccc|l} 2 & -3 & 5 & \uparrow \\ 0 & 5 & -p & \\ \boxed{1} & p & 1 & -2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -3-2p & 3 \\ 0 & 5 & -p \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3-2p & 3 \\ 5 & -p \end{vmatrix} = 2p^2 + 3p - 15$$

$$|A| = 0: \; 2p^2 + 3p - 15 = 0.$$

We lossen deze vergelijking op met de abc-formule:

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 129$$

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{129}$$

Inverse matrix bestaat voor $p \neq -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{129}$

c

Inverse matrix berekenen voor $p = 1$:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ \\ -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \uparrow \\ 1 & 3 \\ \downarrow & \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ 5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{10} & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 30 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{ll} -1 & -3 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -3 & -4 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -5 \\ 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & -10 \\ 10 & 0 & 0 & -6 & -8 & 22 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -6 & -8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Er volgt

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & -8 & 22 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

d

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & -8 & 22 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & q & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

b

$$\left(A\,\middle|\,\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & p \\ -1 & q & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ -2\;1 \\ \quad\downarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & 1-2p \\ 1 & 2 & -1 & p \\ 0 & q+2 & -3 & p \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & \boxed{5} & 1-2p \\ 5 & 10 & -5 & p \\ 0 & 5q+10 & -15 & p \end{array}\right)\begin{array}{l} 1\;3 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & 1-2p \\ 5 & 5 & 0 & 1+3p \\ 0 & 5q-5 & 0 & 3-p \end{array}\right)$$

Als $5q-5 \neq 0$, dat is zo als $q \neq 1$ kunnen we de totaalmatrix verder schoonvegen en hebben we precies één oplossing voor elke waarde van p.

Voor $q=1$ en $p=3$ wordt de derde vergelijking in de laatste totaalmatrix

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0,$$

zodat het stelsel dan oneindig veel oplossingen heeft.

Voor $q=1$ en $p \neq 3$ is het stelsel strijdig

Samenvattend hebben we

- één oplossing als $q \neq 1$ en $p \in \mathbb{R}$;
- het stelsel heeft oneindig veel oplossingen voor $q = 1 \wedge p = 3$.
- het stelsel is strijdig als $q = 1 \wedge p \neq 3$.

c

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ \boxed{-1} & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ 1\;2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

Omdat $|A| \neq 0$ is de regel van Cramer toepasbaar.

$$\det\left(\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} 2 \\ \downarrow \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\det\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{a}_3\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=5$$

$$-2 \qquad \rightarrow$$

$$\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ \boxed{-1} & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10$$

$$2 \quad \rightarrow$$

Voor de oplossing vinden we:

$$x_1=\frac{\det\left(\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)}{|A|}=-2,\ x_2=\frac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{a}_3\right)}{|A|}=1 \text{ en } x_3=\frac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}\right)}{|A|}=2\,.$$

d

Voor $q=1$

e

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

a De eigenwaarden zijn oplossingen van

$$0=\left|A-\lambda I\right|=\frac{1}{6^3}\begin{vmatrix}2-6\lambda & 5 & -1\\ 2 & -1-6\lambda & 5\\ \boxed{2} & 2 & 2-6\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \uparrow\\ -1\end{matrix}$$

$$=\frac{1}{6^3}\begin{vmatrix}2-6\lambda & 5 & -1\\ 0 & -3-6\lambda & 3+6\lambda\\ 2 & 2 & 2-6\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)\begin{vmatrix}2-6\lambda & 5 & -1\\ 0 & \boxed{-1} & 1\\ 2 & 2 & 2-6\lambda\end{vmatrix}$$

$$1\rightarrow$$

$$=\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)\begin{vmatrix}2-6\lambda & 5 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 4-6\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)\left(-1\right)\begin{vmatrix}2-6\lambda & 4\\ 2 & 4-6\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)\left\{\left(2-6\lambda\right)\left(4-6\lambda\right)-8\right\}$$

$$=-\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)\left(36\lambda^2-36\lambda\right)$$

$$=-\frac{1}{6^3}\left(3+6\lambda\right)36\lambda\left(\lambda-1\right)$$

zodat de eigenwaarden van A zijn: $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=0$ en $\lambda_3=1$.

Voor $\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{2}$ wordt het op te lossen stelsel:

$$\begin{cases}5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0\end{cases}$$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & \boxed{-1} & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 5\;5 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 27 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 27 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \qquad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\,-5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix:

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

Kies $x_1 = \alpha$ dan is $x_2 = -\alpha$, zodat de algemene oplossing is

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Voor $\lambda = \lambda_2 = 0$ wordt het op te lossen stelsel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \qquad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\,-1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1\,-1 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix:

$$\begin{cases} \quad -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Kies $x_3 = \alpha$ dan is $x_2 = \alpha$ en $x_1 = -2\alpha$, zodat de algemene oplossing is

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Voor $\lambda = \lambda_3 = 1$ wordt het op te lossen stelsel:

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\ 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1\ -1 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Kies $x_3 = \alpha$ dan is $x_2 = \alpha$ en $x_1 = \alpha$, zodat de algemene oplossing is

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b

$$\det\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \uparrow \\ 1 \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Omdat $\det\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right) \neq 0$ is het stelsel een basis.

c

Het inwendig product van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ is niet nul: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -3$. Dit betekent dat de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ niet loodrecht op elkaar staan, en dat de eigenvectoren dus niet onderling loodrecht op elkaar staan.

d

We schrijven $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$. Het op te lossen stelsel is

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \qquad\quad \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \uparrow \\ \uparrow & \\ -3 & -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Er volgt: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ en $\alpha_3 = 1$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_v$

Opgave 5

A is een symmetrische matrix, en daarmee diagonaliseerbaar.

We berekenen een matrix V van eigenvectoren zodat $D = V^{-1}AV$ en vervolgens A^5 volgens $A^5 = VD^5V^{-1}$.

De eigenwaarden zijn oplossingen van

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \boxed{2} & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-1 \rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1+\lambda \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & \boxed{1} \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$= (1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & 7-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\left(-\lambda(7-\lambda)-8\right) = -(1+\lambda)\left(\lambda^2 - 7\lambda - 8\right)$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda - 8)(\lambda + 1)$$

De eigenwaarden van A zijn: $\lambda_{1,2} = -1$ en $\lambda_3 = 8$.

Voor $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ wordt het op te lossen stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met de vergelijking:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \ .$$

Kies $x_2 = \alpha$ en $x_3 = \beta$, dan is $x_1 = -2\alpha - 2\beta$ en geldt voor de algemene oplossing:

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Voor $\lambda_3 = 8$ wordt het op te lossen stelsel:

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \quad\;\uparrow \\ \uparrow \\ -1\;4 \end{array} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} 1\;-4 \\ \downarrow \\ \quad\;\downarrow \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix:

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad\;\; - x_3 = 0 \end{cases}$$

Kies $x_3 = 2\alpha$ dan is $x_2 = 2\alpha$ en $x_1 = \alpha$, zodat de algemene oplossing is

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De matrix van eigenvectoren is $V = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3\right) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Opmerking: De eigenvectoren staan niet paarsgewijs loodrecht op elkaar, zodat de matrix van eigenvectoren geen orthogonale matrix kan worden, en we dus de inverse van V moeten berekenen.

We berekenen de inverse van V:

$$\left(V\,|\,I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\uparrow\\ 2\\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -2 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\uparrow\\ \\ 2\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ 9\\ 9\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & \boxed{9} & 1 & 2 & 2\\ 9 & 0 & 18 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 9 & 18 & 0 & 0 & 9\end{array}\right)\begin{array}{cc}-2 & -2\\ \downarrow & \\ & \downarrow\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\\ 9 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4\\ 0 & 9 & 0 & -2 & -4 & 5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4\\ 0 & 9 & 0 & -2 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\end{array}\right)$$

Er volgt

$$V^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=V^{-1}AV=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Ten slotte berekenen we A^5:

$$A^5=VD^5V^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^5 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^5 & 0\\ 0 & 0 & 8^5\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 8^5\\ -1 & 0 & 2\cdot 8^5\\ 0 & -1 & 2\cdot 8^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3640 & 7282 & 7282\\ 7282 & 14563 & 14564\\ 7282 & 14564 & 14563\end{pmatrix}$$

Opgave 6

$I_1=4\text{ A}\,;I_2=2\text{ A}\,;I_3=1\text{ A}\,;I_4=1\text{ A}$