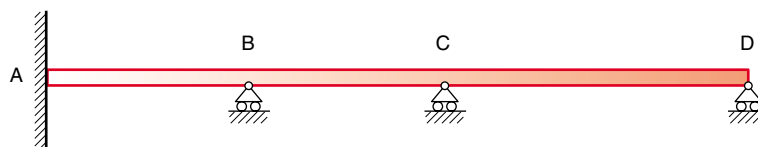


Module 6

Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

De in figuur 6.1 gegeven constructie heeft *vier* punten waar deze is ondersteund.



Figuur 6.1

De onbekende oplegreacties zijn:

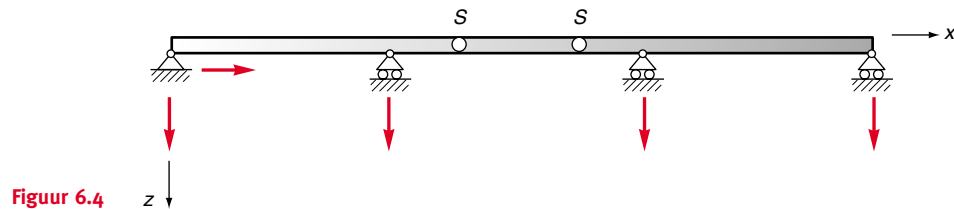
- Moment in punt A
- Verticale oplegreactie in punt A
- Horizontale oplegreactie in punt A
- Verticale oplegreactie in punt B
- Verticale oplegreactie in punt C
- Verticale oplegreactie in punt D

Het aantal onbekende uitwendige krachten is gelijk aan zes ($R = 6$) en het aantal evenwichtsvergelijkingen is gelijk aan drie ($E = 3$). De constructie is dus drievoudig statisch onbepaald ($n = R - E$). Met deze feiten in het achterhoofd kan er begonnen worden aan de beantwoording van de vragen.

- a *Drievoudig* statisch onbepaald houdt in dat er ook *drie statisch onbepaalden* moeten worden gekozen. Dit kunnen drie onbekende uitwendige oplegreacties zijn uit het hierboven weergegeven rijtje. Echter er kan ook gekozen worden uit twee *invendig* nog onbepaalde momenten, namelijk de overgangsmomenten in de ligger t.p.v. punt B en C.

Opdracht 3

De in figuur 6.4 weergegeven ligger heeft *vier* ondersteuningen. Totaal zijn er *vijf* onbekende oplegreacties ($R = 5$). Deze zijn in figuur 6.4 aangegeven.



Figuur 6.4

Uiteraard zijn er *drie* evenwichtsvergelijkingen:

- $\Sigma F_H = 0$
- $\Sigma F_V = 0$
- $\Sigma T = 0$

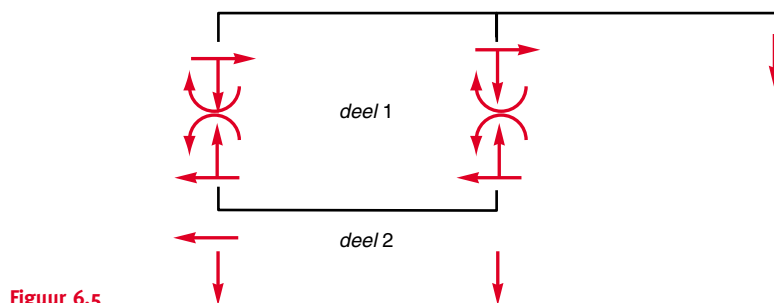
Tevens zijn er *twee scharnieren* aangebracht. In ieder scharnier is het moment bekend, namelijk nul! Dit levert dus per scharnier een extra vergelijking op. Totaal zijn er zodoende *vijf* evenwichtsvergelijkingen ($E = 5$).

Hieruit dat $n = R - E = 5 - 5 = 0$. De ligger is dus statisch bepaald!

Opdracht 4

- a Een statisch onbepaalde constructie is een constructie waarvan de krachtsverdeling in de constructie, dus de momenten, dwarskrachten en normaalkrachten, niet kan worden bepaald uit het evenwicht. Om de krachtsverdeling in de constructie te bepalen moet gebruikgemaakt worden van het vervormingsgedrag van de constructie.
- b Statisch onbepaalde constructies kunnen een *groter reserve draagvermogen* hebben. Dit kan inhouden dat indien een constructie zwaar wordt overbelast, een statisch onbepaalde constructie minder snel bezwijkt dan een soortgelijke statisch bepaalde constructie. Omgekeerd geldt dan in feite ook dat statisch onbepaalde constructies veelal *lichter uitgevoerd* kunnen worden. Aangezien deze constructies veelal stijver zijn dan statisch bepaalde constructies kan er dus geconstrueerd worden met profielen met een kleiner traagheidsmoment.

c Invullen van de rekenregel levert: $n = 6 \times 5 + 4 - 3 \times 5 - 3 \times 5 = 4$
 Een andere methode is weergegeven in figuur 6.5.



Figuur 6.5

deel 1: aantal onbekenden : 7
 aantal evenwichtsvergelijkingen : 3

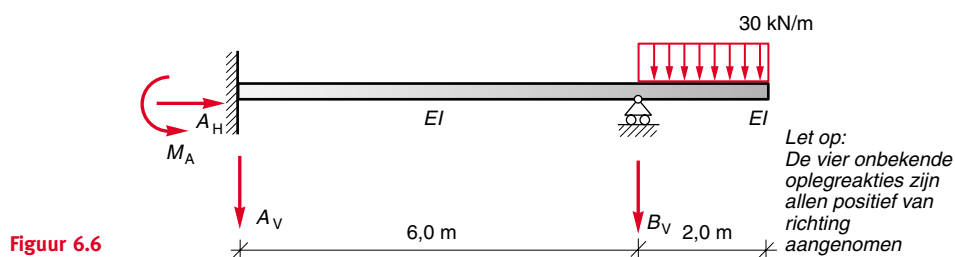
deel 2: aantal onbekenden : 9
 aantal evenwichtsvergelijkingen : 3

De nog onbekende snedekrachten zijn natuurlijk paarsgewijs aan elkaar gelijk. Dit vermindert het aantal onbekenden met $2 \cdot 3 = 6$.
 Ga dit zelf na!

totaal: aantal onbekenden : $7 + 9 - 6 = 10$
 aantal evenwichtsvergelijkingen : 6
 graad van onbepaaldheid : $n = R - E = 4$

Opdracht 5

De in figuur 6.6 weergegeven constructie is *uitwendig enkelvoudig statisch onbepaald*.



Figuur 6.6

In deze figuur zijn de vier onbekende *oplegreacties* weergegeven ($R = 4$). Het aantal evenwichtsvergelijkingen is drie ($E = 3$). De graad van onbepaaldheid is dus $n = R - E = 1$.

De oplossingsstrategie bestaat uit de volgende onderdelen:

- 1 Deel de constructie op in statisch bepaalde onderdelen
- 2 Breng de nog onbekende snedekrachten als uitwendige belasting aan op de delen
- 3 Stel de vormveranderingsvoorwaarde op
- 4 Los de statisch onbepaalde op

Dit recept zal nu stap voor stap worden doorlopen.

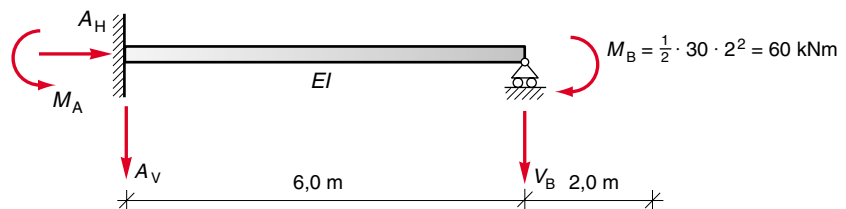
Stap 1,2:

Door de ligger statisch bepaald te maken en het onbekende steunpuntmoment als statisch onbepaalde aan te nemen ontstaat de schematisering van figuur 6.7.

Let op:

De overstek wordt als een uitwendig moment in punt B geschematiseerd!

Figuur 6.7



Stap 3:

Stel de vormveranderingsvoorwaarde op.

Het zal duidelijk zijn dat in dit geval de *hoekverandering* bij de *inklemming* nul moet zijn!

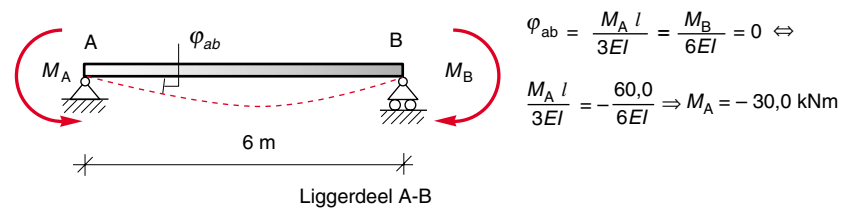
$$\varphi_{ab} = 0$$

Voor het uitwerken van deze vergelijking zal gebruik worden gemaakt van de al eerder afgeleide *vergeet-mij-nietjes*. Verder kan op voorhand al worden vastgesteld dat de horizontale oplegreactie nul moet zijn aangezien er verder geen horizontale belasting op de ligger werkt.

Steunpunt A:

In figuur 6.8 is de opgestelde v.v.v. uitgewerkt en is de *statisch onbepaalde* opgelost.

Figuur 6.8



Nu kan de *krachtsverdeling* worden bepaald. Daartoe worden eerst de oplegreacties bepaald waarna de *V*-lijn en de *M*-lijn kan worden bepaald. De oplegreacties volgen uit:

$$A_V + \frac{M_A}{6,0} - \frac{M_B}{6,0} = 0 \Rightarrow A_V = 5 + 10$$

$$= 15,0 \text{ kN (omlaag)}$$

$$A_V + B_V + 30 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow B_V = -15,0 - 60$$

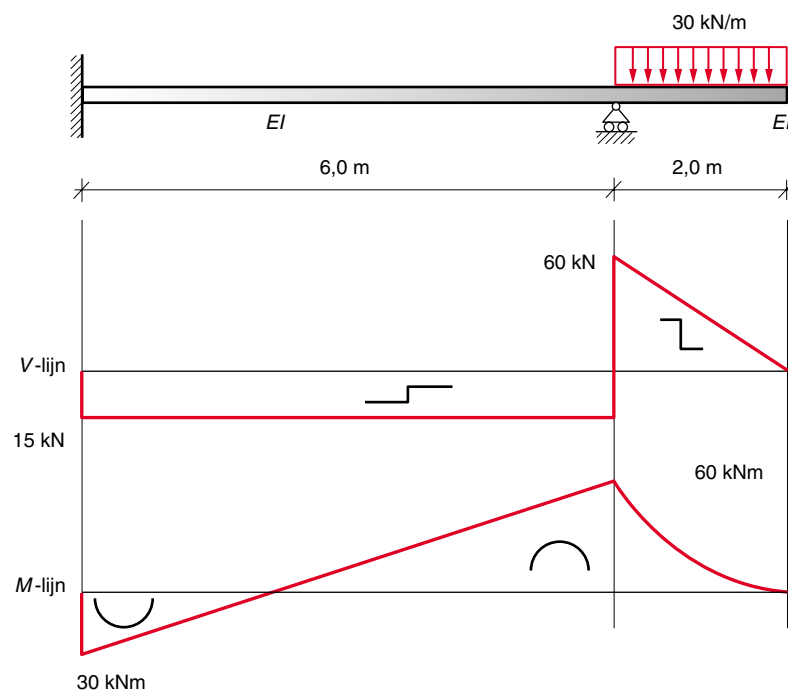
$$= -75,0 \text{ kN (omhoog)}$$

Het inwendige moment ter plaatse van steunpunt B is reeds bekend en is $-60,0 \text{ kNm}$.

Let op:

Denk eraan dat bij een overstek het steunpuntmoment nooit een statisch onbepaalde kan zijn. Immers het moment wordt veroorzaakt door het overstek en is uit het evenwicht te bepalen!

De *V*- en *M*-lijn zijn in figuur 6.9 weergegeven. Ga zelf na of deze lijnen kloppen.



Figuur 6.9

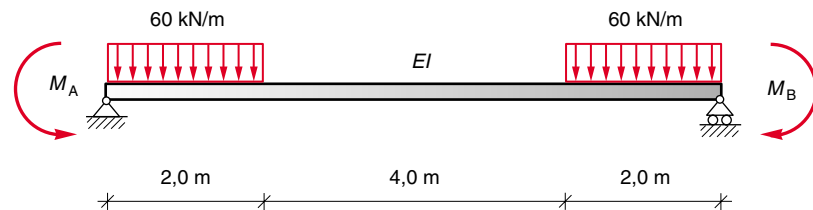
Opdracht 6

De invloed van de normaalkracht wordt verwaarloosd en aangezien er geen horizontale belasting aanwezig is, zijn daarmee de horizontale oplegreacties gelijk aan nul. Zodoende resteren er vier onbekende oplegreacties en zijn er twee bruikbare evenwichtsvergelijkingen. De constructie is daarmee dus *tweevoudig* statisch onbepaald. Er zijn voor het oplossen dan ook *twee statisch onbepaalden* noodzakelijk. De beide nog onbekende inklemmingsmomenten worden als statisch onbepaalden aangenomen.

Stap 1,2:

Maak de constructie statisch bepaald en breng de statisch onbepaalden aan.

In figuur 6.10 is dat weergegeven.



Figuur 6.10

Merk op:

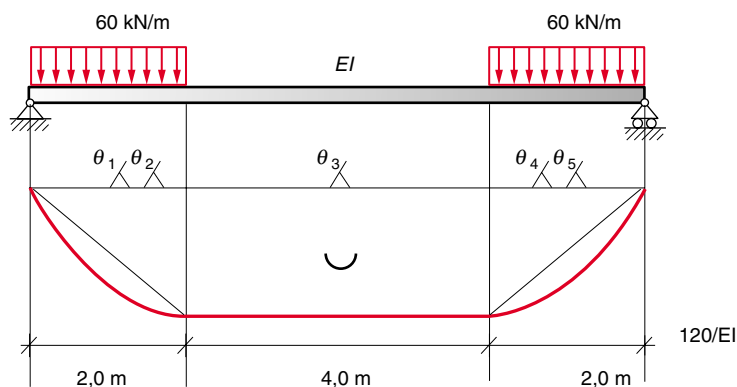
Bij de bovenstaande schematisering is gebruikgemaakt van het feit dat we eigenlijk al wel weten dat de inklemmingsmomenten links en rechts even groot maar tegengesteld van richting zijn. Immers dit is een symmetrische constructie met een symmetrische belasting.

$$\varphi_{ab} = 0$$

$$\varphi_{ba} = 0$$

Stap 3:

Stel de *v.v.v.* op. In dit geval zijn er twee statisch onbepaalden en dus moeten er ook twee vormveranderingsvoorwaarden worden opgesteld. De *v.v.v.*'s moeten verband houden met de vrijheidsgraad (verplaatsing) die behoort bij de gekozen statisch onbepaalden. In dit geval zijn dat de hoekveranderingen bij de opleggingen A en B. Deze behoren nul te zijn, immers het gaat hier om inklemmingen! De twee vormveranderingsvoorwaarden luiden dan ook: Voor het uitwerken van deze voorwaarden wordt nu eens geen gebruik gemaakt van de *vergeet-mij-nietjes*. Als alternatief wordt nu een berekening gemaakt waarbij met behulp van de stellingen van het gereduceerde momentenvlak direct de vormveranderingsvoorwaarden worden opgelost. In figuur 6.11 is de gereduceerde *M*-lijn van het *statisch bepaalde* systeem weergegeven en in figuur 6.12 is de *gereduceerde M*-lijn t.g.v. de statisch onbepaalden afgebeeld.



$$\theta_1 = \frac{2}{3} \cdot 2.0 \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot 60 \cdot 2.0^2}{EI} = \frac{40}{EI} \text{ (parabool)}$$

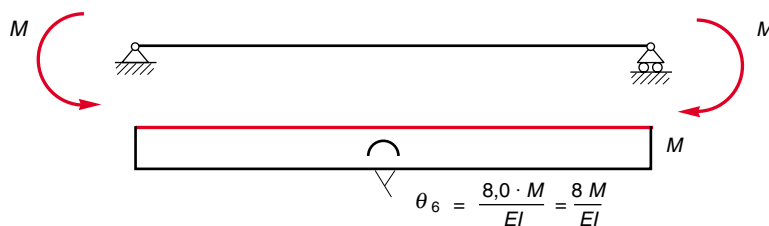
$$\theta_2 = \frac{1}{2} \cdot 2.0 \cdot \frac{120}{EI} = \frac{120}{EI} \text{ (driehoek)}$$

$$\theta_3 = \frac{4.0 \cdot 120}{EI} = \frac{480}{EI} \text{ (rechthoek)}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2} \cdot 2.0 \cdot \frac{120}{EI} = \frac{120}{EI} \text{ (driehoek)}$$

$$\theta_5 = \frac{2}{3} \cdot 2.0 \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot 60 \cdot 2.0^2}{EI} = \frac{40}{EI} \text{ (parabool)}$$

Figuur 6.11



Figuur 6.12

Stap 4:
Los de statisch onbepaalden op

Het nog onbekende moment is op te lossen door de eerste stelling van het momentenvlak toe te passen. De eerste stelling van het momentenvlak luidt namelijk:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

De hoekveranderingen in zowel punt A als punt B zijn nul. Hieruit volgt dat de som van alle hoekjes θ gelijk moet zijn aan nul!

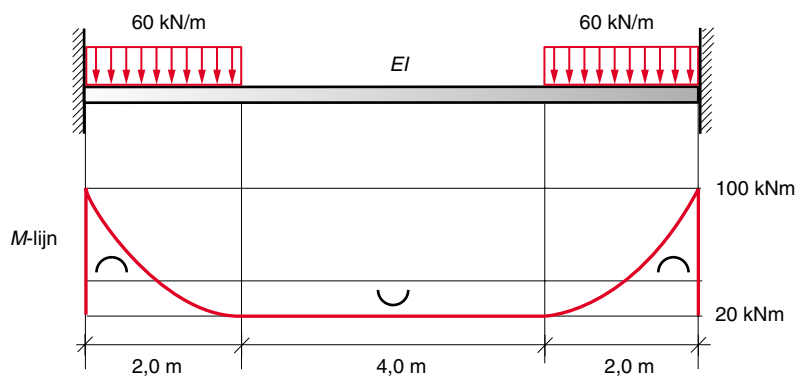
$$\sum \theta_i = \frac{40 + 120 + 480 + 120 + 40 - 8M}{EI} = 0 \Rightarrow$$

$$M = 100 \text{ kNm}$$

Opmerking:

De aangenomen richtingen van de inklemmingsmomenten waren kennelijk in overeenstemming met de positieve afspraak. Dit houdt tevens in dat de inwendige momenten in de ligger t.p.v. de inklemmingen negatief moeten zijn! Ga dat zelf na met een schetsje van het evenwicht t.p.v. beide inklemmingen!

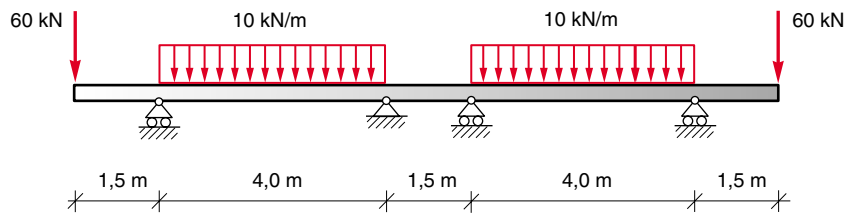
Op deze wijze zijn de *statisch onbepaalden* bepaald. De momentenlijn is nu te construeren. Immers de *M*-lijn voor het statisch bepaalde systeem kan eenvoudig in verticale richting over 100 kNm worden verschoven. Dit resultaat is in figuur 6.13 weergegeven.



Figuur 6.13

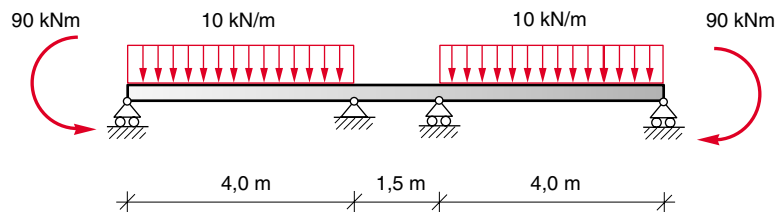
Opdracht 7

De in figuur 6.14 weergegeven opgave betreft ook een symmetrische constructie.



Figuur 6.14

De puntlasten op de overstekten kunnen worden vervangen door uitwendige momenten die in de punten A en D werken zoals in figuur 6.15 is weergegeven.

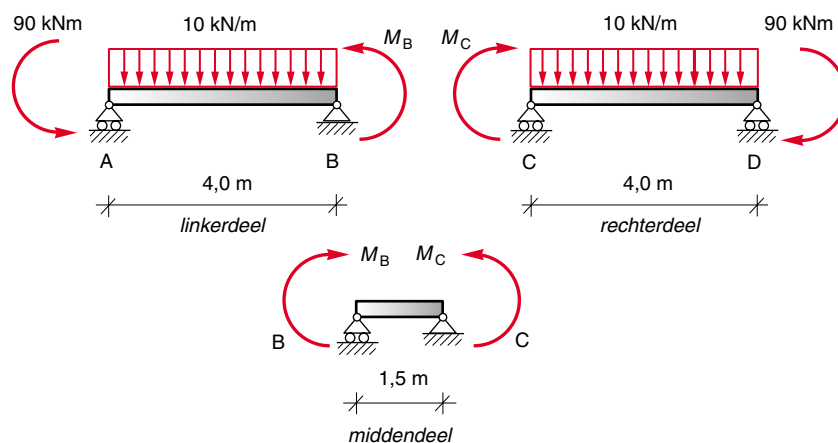


Figuur 6.15

Deze constructie heeft vijf onbekende oplegreacties en er zijn drie evenwichtsvoorwaarden. De constructie is dus tweevoudig statisch onbepaald. Om de oplossing te kunnen vinden moeten er dus **twee statisch onbepaalden** worden gekozen en *twee vormveranderingsvoorwaarden* worden opgesteld.

Stap 1,2:

Maak de constructie statisch bepaald en breng de statisch onbepaalden aan. De doorgaande ligger is eenvoudig op te splitsen in drie statisch bepaalde liggers. De *inwendige* momenten t.p.v. de steunpunten worden als statisch onbepaalden gekozen. Deze nog *onbekende inwendige momenten* worden *positief van richting* aangenomen zoals in figuur 6.16 is weergegeven.



Figuur 6.16

Let op:

De tekenafpraak voor positieve *inwendige* momenten geldt niet voor positieve *uitwendige* momenten. M_B en M_C zijn dus *inwendig* en *positief* aangenomen, *uitwendig* werken in $A + 90 \text{ kNm}$ en in $D - 90 \text{ kNm}$. Lees anders module 5, hoofdstuk 2 er nog eens op na.

Stap 3:

Stel de vormveranderingsvoorwaarden op. De op te stellen vormveranderingsvoorwaarden moeten betrekking hebben op de vrijheidsgraad (verplaatsing) die te maken heeft met de gekozen statisch onbepaalde. In het geval van een moment als statisch onbepaalde is de vrijheidsgraad een *hoekverandering* of rotatie, terwijl in geval van een kracht de vrijheidsgraad een *zakking* is.

In dit geval moeten we dus twee *v.v.v.*'s opstellen m.b.t. de *hoekverandering* t.p.v. de ondersteuning. Met deze vormveranderingsvoorwaarden eisen we dat de gaping in de ligger t.p.v. de steunpunten nul moet zijn. Deze *v.v.v.*'s zijn dus van het type *gapingvergelijking*.

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc} \quad \varphi_{cb} = \varphi_{cd}$$

Deze twee vergelijkingen zullen verder worden uitgewerkt met behulp van de bekende *vergeet-mij-nietjes*.

Stap 4:

Oplossen van de statisch onbepaalden. Door de *gaapvergelijkingen* uit te werken ontstaat: (ga dit na!!)

$$-\frac{90,0 \cdot 4,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 4,0}{3EI} + \frac{10,0 \cdot 4,0^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 1,5}{3EI} - \frac{M_C \cdot 1,5}{6EI}$$

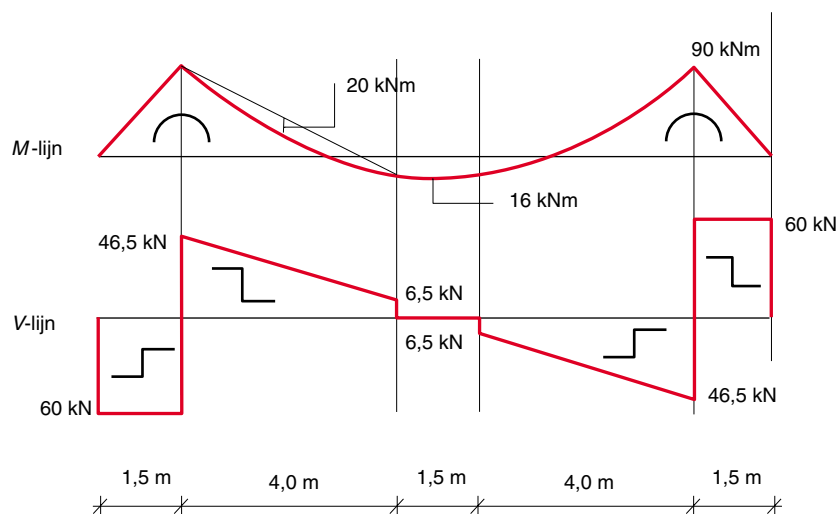
$$\frac{M_B \cdot 1,5}{6EI} + \frac{M_C \cdot 1,5}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 4,0}{3EI} + \frac{90,0 \cdot 4,0}{6EI} - \frac{10,0 \cdot 4,0^3}{24EI}$$

Hieruit volgt:

$$11M_B + \frac{2}{3}M_C = 200$$

$$\frac{3}{2}M_B + 11M_C = 200 \Rightarrow M_B = M_C = 16 \text{ kNm}$$

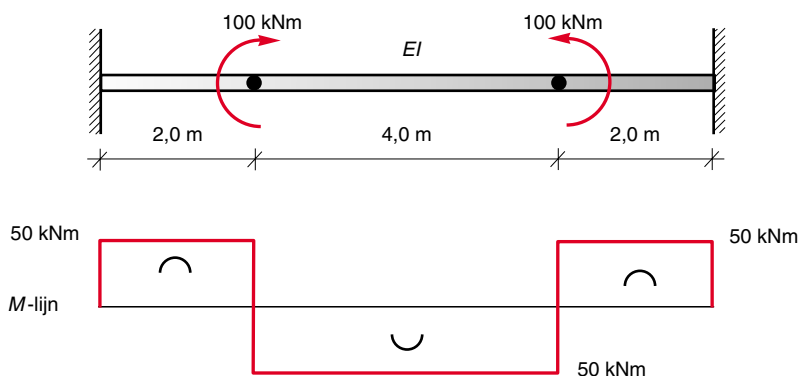
Hiermee zijn de twee statisch onbepaalden bepaald en kunnen de oplegreacties worden bepaald. Vervolgens kunnen de in figuur 6.17 weergegeven *V*- en de *M*-lijnen worden geconstrueerd.



Figuur 6.17

Opdracht 8

Ook deze symmetrische constructie kan statisch bepaald worden gemaakt. Neem de inklemmingsmomenten als statisch onbekenden aan. De hoekverdraaiingen bij de inklemmingen moeten nul zijn. Dit zijn dus de twee $v.v.v.$ Net als bij opdracht 6 kan hier het beste worden gewerkt met het uitwerken van de $v.v.v.$ met behulp van de stelling van het gereduceerde momentenvlak. Inmiddels moet het uitwerken van deze opgave geen probleem meer opleveren. De momentenlijn van de oplossing is in figuur 6.18 afgebeeld.

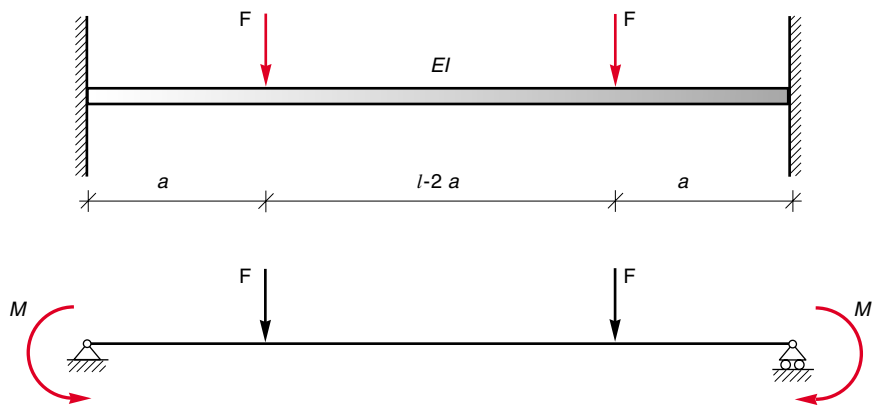


Figuur 6.18

In deze constructie ontstaan nergens dwarskrachten!

Opdracht 9

Ook hier betreft het een symmetrisch probleem. De afmetingen zijn parametrisch, dus geen getallen maar variabelen. Het recept zal in het kort doorlopen worden. De keuze voor het *statisch bepaalde hoofdsysteem* en de *statisch onbepaalden* en de *vormveranderingsvoorwaarden* moeten inmiddels geen enkel probleem meer opleveren en is weergegeven in figuur 6.19.



Figuur 6.19

Let op:
 Het probleem is symmetrisch. Het rechter inklemmingsmoment is dus gelijk maar tegengesteld van richting aangenomen als het linker inklemmingsmoment. Hierdoor wordt de uitwerking aanzienlijk vereenvoudigd.

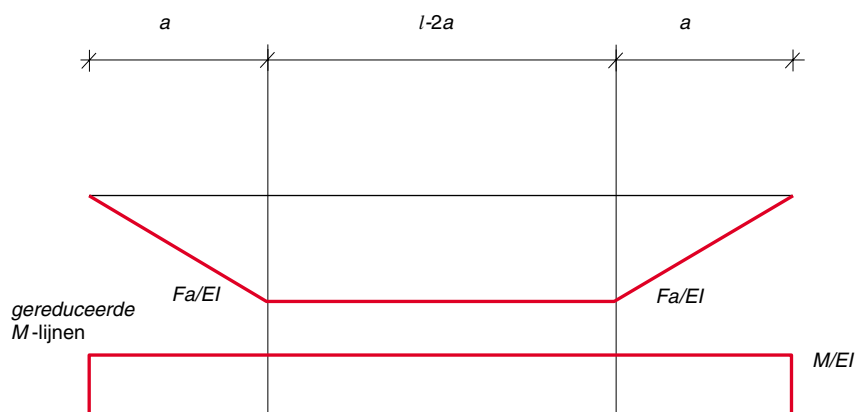
De vormveranderingsvoorwaarden luiden:

$$\varphi_{ab} = 0$$

$$\varphi_{ba} = 0$$

Met behulp van de gereduceerde momentenlijn zullen deze v.v.v.'s worden uitgewerkt.

De uiteindelijke M-lijn bestaat uit de som van de M-lijn van het statisch bepaalde hoofdsysteem en de M-lijn t.g.v. de statisch onbepaalde. Deze beide M-lijnen zijn in figuur 6.20 weergegeven.



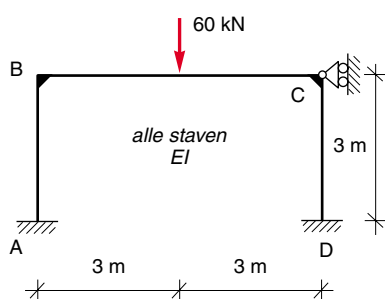
Figuur 6.20

Beide gereduceerde M-lijnen hebben hun aandeel in de hoekverandering t.p.v. de inklemmingen. Door de hoekverandering op nul te stellen wordt de oplossing gevonden.

Uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden levert:

$$\frac{Fa \cdot a}{2EI} + \frac{(l - 2a) \cdot Fa}{EI} + \frac{Fa \cdot a}{2EI} - \frac{Ml}{EI} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{Fa(l - a)}{l}$$

Let op:
 Eerste stelling van het momentenvlak, de som van de beide oppervlakken moet nul zijn omdat in B de ligger is ingeklemd!



Figuur 6.21

Opdracht 10a

De in figuur 6.21 afgebeelde opgave is een viervoudig statisch onbepaalde constructie.

Er zijn dus vier *statisch onbepaalden* te kiezen en daarbij horen ook vier nog op te stellen *vormveranderingsvoorwaarden*. Het ligt voor de hand om de beide *inklemmingsmomenten* en de *inwendige momenten* in de hoeken van de bovenregel als *statisch onbepaalden* te kiezen. Dit houdt dus feitelijk in:

- M_A *uitwendige oplegreactie*
- M_B *inwendig snede-moment*
- M_C *inwendig snede-moment*
- M_D *uitwendige oplegreactie*

De vier *vormveranderingsvoorwaarden* zien er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \varphi_{ab} &= 0 \\ \varphi_{ba} &= \varphi_{bc} \\ \varphi_{cb} &= \varphi_{cd} \\ \varphi_{dc} &= 0 \end{aligned}$$

Bij een moment als statisch onbepaalde hoort een vormveranderingsvoorwaarde van het type:

$$\varphi_{links} = \varphi_{rechts}$$

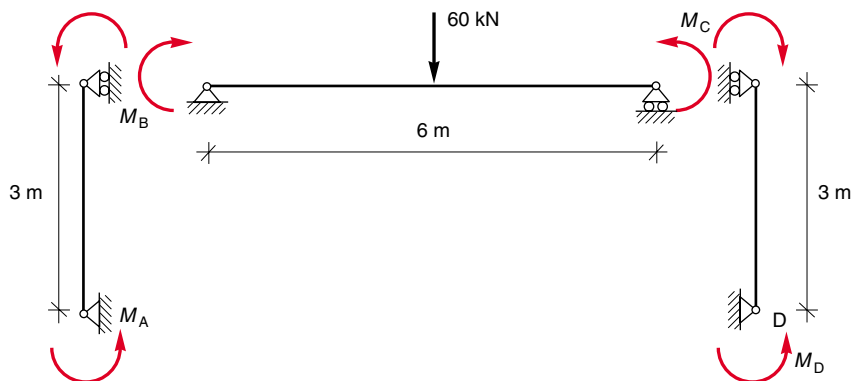
Aangezien er geen *horizontale belasting* aanwezig is, is er *geen horizontale oplegreactie* in punt C. Hierdoor is dit probleem *symmetrisch*. Dit gegeven kan gebruikt worden bij het oplossen van de vergelijkingen. In feite betekent dit dat er slechts twee vergelijkingen opgelost hoeven te worden.

Stap 1,2,3:

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen en geef de statisch onbepaalden aan en stel de *v.v.v.*'s op (zie figuur 6.22).

Let op:

De (onbekende) uitwendige momenten zijn positief van richting aangenomen en ook de (onbekende) inwendige momenten zijn positief van richting aangenomen.



Figuur 6.22

Vanwege de symmetrie kan worden gesteld:

$$M_B = M_C$$

$$M_A = -M_D$$

Stap 4:
Werk de *vormveranderingsvoorwaarden* uit. Vanwege de *symmetrie* hoeven alleen de eerste twee *v.v.v.*'s te worden uitgewerkt met behulp van de *vergeet-mij-nietjes*:

$$\frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} = 0$$

$$-\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{60 \cdot 6,0^2}{16EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

Vanwege de *symmetrie* ontstaat het volgende stelsel:

$$M_A - \frac{1}{2}M_B = 0$$

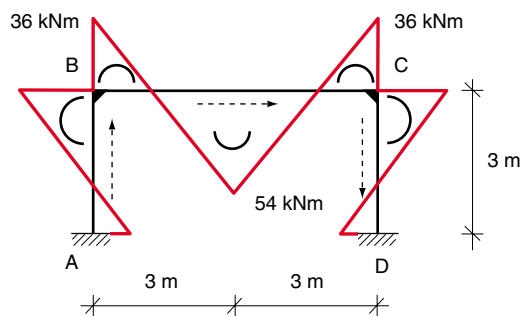
$$\frac{1}{2}M_A - 4M_B = \frac{60 \cdot 36}{16}$$

Uitwerken levert:

$$M_A = -18 \text{ kNm} \quad M_D = 18 \text{ kNm}$$

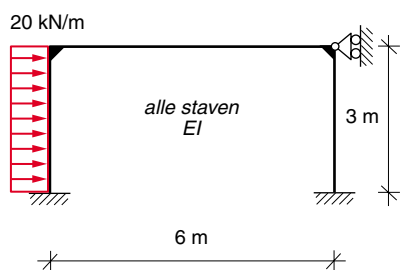
$$M_B = -36 \text{ kNm} \quad M_C = -36 \text{ kNm}$$

Met deze resultaten kunnen de overige *oplegreacties* worden bepaald en kunnen de *V*- en de *M*-lijnen worden getekend. Alleen de *M*-lijn is in figuur 6.23 getekend.



Figuur 6.23

Stap 5:
Finishing touch, oplegreacties en de krachtsverdeling
De *zichtriching* is met de *gestippelde pijltjes* aangegeven



Figuur 6.24

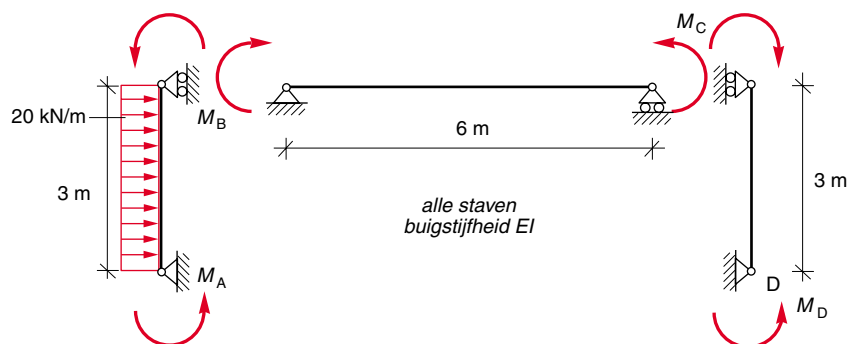
Opdracht 10b

De in figuur 6.24 weergegeven constructie kan op dezelfde wijze als de vorige opgave worden opgelost.

Nu geldt echter niet dat de constructie symmetrisch is. Er is immers een horizontale belasting. De statisch onbepaalden zijn dezelfde als in de vorige opgave en dus kunnen ook dezelfde vormveranderingsvoorwaarden worden opgesteld.

Stap 1,2,3:

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen en breng de statisch onbepaalden aan, stel de hierbij behorende vormveranderingsvoorwaarden op (zie opdracht 10a). Het resultaat is weergegeven in figuur 6.25.



Figuur 6.25

Vormveranderingsvoorwaarden

$$\varphi_{ab} = 0$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc}$$

$$\varphi_{cb} = \varphi_{cd}$$

$$\varphi_{dc} = 0$$

Stap 4:

Werk de vormveranderingsvoorwaarden uit. Met behulp van de vergeetmij-nietjes kunnen de vier vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt.

$$\begin{aligned} \frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} - \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= 0 \\ -\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} + \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI} \\ +\frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} &= -\frac{M_C \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_D \cdot 3,0}{6EI} \\ -\frac{M_C \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_D \cdot 3,0}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is te vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} 24M_A - 12M_B &= 540 \\ -12M_A + 72M_B + 24M_C &= -540 \\ 6M_B + 18M_C + 3M_D &= 0 \\ 3M_C + 6M_D &= 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel kan worden opgelost (vegen of met een *solver* zoals *DERIVE*). De oplossing is:

$$\begin{aligned} M_A &= 20,1 \text{ kNm} \\ M_B &= -4,7 \text{ kNm} \\ M_C &= 1,7 \text{ kNm} \\ M_D &= -0,9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

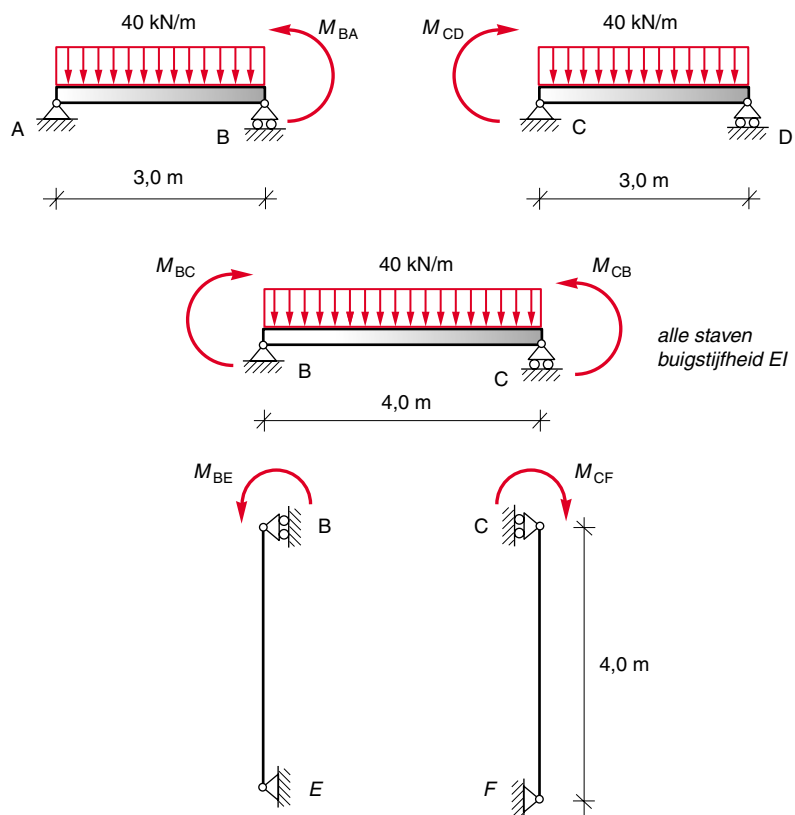
Met deze oplossing kunnen de *oplegreacties* en de *V*- en de *M*-lijn worden bepaald. Dit wordt verder aan de lezer overgelaten.

Opdracht 11

Ook deze constructie is symmetrisch. De constructie is viervoudig statisch onbepaald. Vanwege de symmetrie hoeft in principe maar de helft van het aantal statisch onbepaalden te worden bepaald. Ook nu kan volgens het recept worden gewerkt:

Stap 1,2:

Maak de constructie statisch bepaald en geef de statisch onbepaalden aan. In figuur 6.26 is de constructie opgedeeld in *statisch bepaalde* onderdelen.



Figuur 6.26

In deze figuur zijn 6 inwendige momenten aangegeven. In knoop B en C komen drie staven bij elkaar. Uiteraard moet het *knooppunt* in evenwicht zijn. Dit houdt in dat de *som van de momenten* in knoop B en C nul moet zijn. Uitwerken levert:

$$M_{BA} - M_{BC} + M_{BE} = 0 \Rightarrow M_{BC} = M_{BA} + M_{BE}$$

$$-M_{CD} + M_{CB} - M_{CF} = 0 \Rightarrow M_{CB} = M_{CD} + M_{CF}$$

Vanwege de symmetrie kan ook op voorhand worden vastgesteld dat:

$$M_{BC} = M_{CB}$$

$$M_{BA} = M_{CD}$$

$$M_{BE} = M_{CF}$$

Resteren in feite dus nog maar twee statisch onbepaalden, M_{BA} en M_{BE} . De volgende stap is het opstellen van de vormveranderingsvoorwaarden.

Stap 3:

De hoeken tussen de staven in de knopen B en C moeten haaks blijven. Dit levert de volgende vormveranderingsvoorwaarden op:

$$\varphi_{ba} = \varphi_{be}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{be}$$

$$\varphi_{cb} = \varphi_{cf}$$

$$\varphi_{cd} = \varphi_{cf}$$

Stap 4:

Vanwege symmetrie zullen alleen de eerste twee v.v.v.'s worden uitgewerkt:

$$\frac{M_{BA} \cdot 3,0}{3EI} + \frac{40 \cdot 3,0^3}{24EI} = \frac{M_{BE} \cdot 4,0}{3EI}$$

$$- \frac{M_{BC} \cdot 4,0}{3EI} - \frac{40 \cdot 4,0^3}{24EI} - \frac{M_{BC} \cdot 4,0}{6EI} = \frac{M_{BE} \cdot 4,0}{3EI}$$

Hierbij is al gelijkgebruik gemaakt van het feit dat M_{BC} gelijk is aan M_{CB} . Uitwerken van dit stelsel levert:

$$M_{BA} - \frac{4}{3}M_{BE} = -45$$

$$-2(M_{BA} + M_{BE}) - \frac{4}{3}M_{BE} = 106,667$$

Oplossen levert:

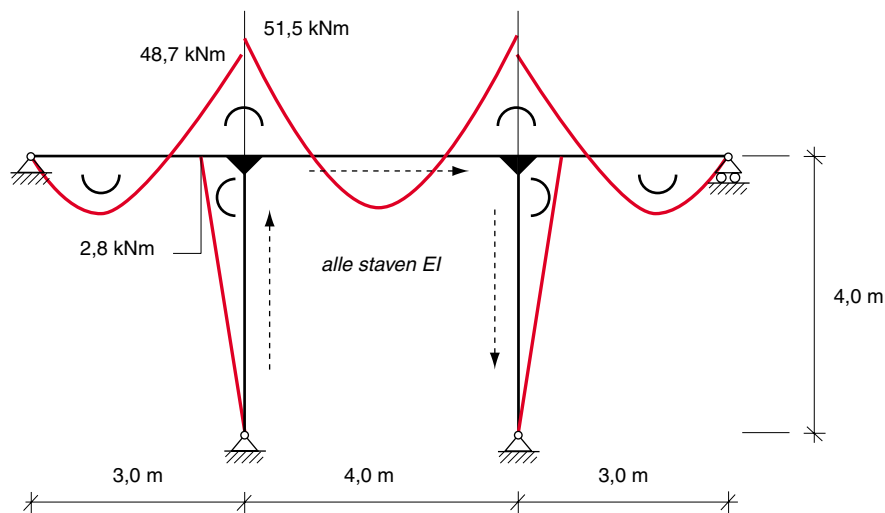
$$M_{BE} = -2,8 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = -48,7 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -51,5 \text{ kNm}$$

Hiermee zijn de statisch onbepaalden bepaald.

Stap 5:
Finishing touch. Bepalen van de oplegreacties en het construeren van de V - en de M -lijn. Ga zelf na dat de in figuur 6.27 weergegeven M -lijn de juiste is.



Figuur 6.27

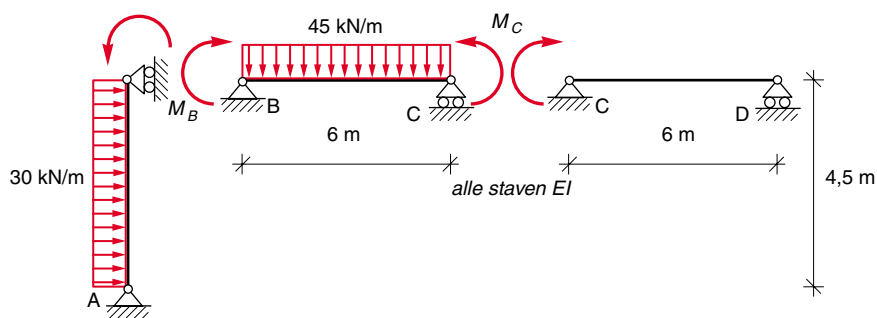
Opdracht 12

Deze opgave is niet symmetrisch, we zullen dus een volledige berekening moeten uitvoeren. De constructie is tweevoudig statisch onbepaald.

$$(n = R - E = 5 - 3 = 2)$$

Stap 1,2:

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen en geef de statisch onbepaalden aan. In figuur is dit weergegeven.



Figuur 6.28

De inwendige momenten t.p.v.de knopen B en C zijn als statisch onbepaalden gekozen. De hierdoor onstane *statisch bepaalde* constructies zijn alle *standaardgevallen* waarvoor een *vergeet-mij-nietje* bestaat.

Stap 3:

Stel de vormveranderingsvoorwaarden op.

Als statisch onbepaalden is gekozen voor inwendige momenten, dan moet de bijbehorende *v.v.v.* een *gaapvergelijking* zijn.

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc}$$

$$\varphi_{cb} = \varphi_{cd}$$

Stap 4:

Uitwerken van de *v.v.v.* Met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* kunnen de vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\frac{M_B \cdot 4,5}{3EI} + \frac{30 \cdot 4,5^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

$$\frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 6,0}{3EI}$$

Uitwerken levert:

$$3,5M_B + M_C = -518,90625$$

$$M_B + 4M_C = -405$$

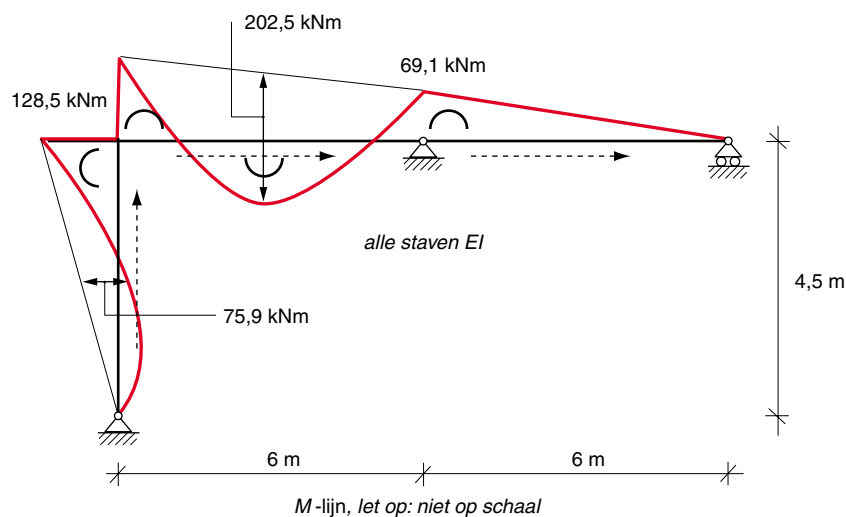
Hieruit volgt voor de statisch onbepaalden:

$$M_B = -128,5 \text{ kNm}$$

$$M_C = -69,1 \text{ kNm}$$

Hiermee kunnen de oplegreacties en de *V*- en de *M*-lijn worden bepaald.

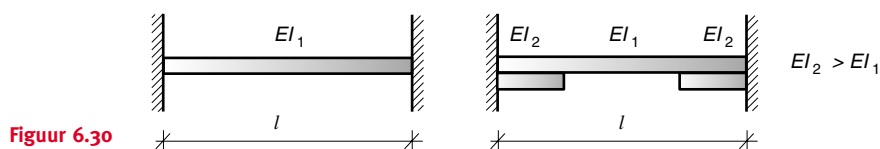
In figuur 6.29 is alleen de *M*-lijn weergegeven. Ga zelf na dat deze juist is en controleer zelf ook op basis van dit gegeven of uw *V*-lijn en oplegreacties correct zijn!



Figuur 6.29

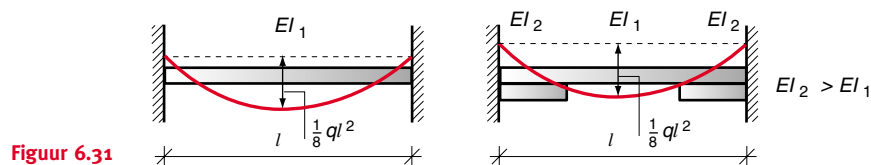
Opdracht 13

De in figuur 6.30 weergegeven constructies zullen een ander *inklemmingsmoment* hebben.



Figuur 6.30

Stijve delen zullen moment naar zich toe trekken hetgeen zal inhouden dat in de rechter situatie het *inklemmingsmoment* groter zal zijn dan dat in de linker situatie. Aangezien in beide systemen de *momentensom* gelijk is zal in de rechter situatie het *veldmoment* geringer zijn dan het *veldmoment* in de linker situatie. In figuur 6.31 is dat schematisch aangegeven.



Figuur 6.31

Opdracht 14

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 12. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van deze opgave. Alleen bij het uitwerken van de *v.v.v.*'s verandert er iets. Controleer met de hieronder weergegeven *stap 4* je uitkomsten.

Stap 4:

Uitwerken van de *v.v.v.* Met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* kunnen de vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\frac{M_B \cdot 4,5}{3EI} + \frac{30 \cdot 4,5^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

$$\frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI}$$

Uitwerken levert:

$$3,5M_B + M_C = -518,90625$$

$$M_B + 3M_C = -405$$

Hieruit volgt voor de statisch onbepaalden:

$$M_B = -121,1 \text{ kNm}$$

$$M_C = -94,6 \text{ kNm}$$

Hieruit volgt voor de statisch onbepaalden: Hiermee kunnen de oplegreacties en de V - en de M -lijn worden bepaald.

Conclusie:

Stijve delen trekken meer momenten naar zich toe. Liggerdeel C-D is nu tweemaal zo stijf, het *steunpuntmoment* in C neemt toe en dat in B neemt iets af.

Opdracht 15a

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 10a. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van deze opgave. Alleen bij het uitwerken van de *v.v.v.*'s verandert er iets. Controleer met de hieronder weergegeven *stap 4* je uitkomsten.

Stap 4:

Werk de *vormveranderingsvoorwaarden* uit. Vanwege de *symmetrie* hoeven alleen de eerste twee *v.v.v.*'s te worden uitgewerkt met behulp van de *vergeet-mij-nietjes*:

$$\frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} = 0$$

$$-\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} - \frac{60 \cdot 6,0^2}{16 \cdot 2EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI}$$

Vanwege de symmetrie ontstaat het volgende stelsel:

$$M_A - \frac{1}{2}M_B = 0$$

$$\frac{1}{2}M_A - 2\frac{1}{2}M_B = 67,5$$

Uitwerken levert:

$$M_A = -15 \text{ kNm} \quad M_D = 15 \text{ kNm}$$

$$M_B = -30 \text{ kNm} \quad M_C = -30 \text{ kNm}$$

De verdere uitwerking wordt aan de lezer overgelaten.

Opdracht 15b

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 10b. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van deze opgave. Alleen bij het uitwerken van de *v.v.v.*'s verandert er iets. Controleer met de hieronder weergegeven *stap 4* je uitkomsten.

Stap 4:

Werk de *vormveranderingsvoorwaarden* uit. Met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* kunnen de vier vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt.

$$\begin{aligned} \frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} - \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= 0 \\ -\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} + \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= -\frac{M_B \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI} \\ +\frac{M_B \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} &= -\frac{M_C \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_D \cdot 3,0}{6EI} \\ \frac{M_C \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_D \cdot 3,0}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is te vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned} 24M_A - 12M_B &= 540 \\ -12M_A + 48M_B + 12M_C &= -540 \\ 3M_B + 12M_C + 3M_D &= 0 \\ 3M_C + 6M_D &= 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel kan worden opgelost (vegen of met een *computerprogramma* als *DERIVE*). De oplossing is:

$$\begin{aligned} M_A &= 19,0 \text{ kNm} \\ M_B &= -7,0 \text{ kNm} \\ M_{C\text{math}} &= 2,0 \text{ kNm} \\ M_D &= -1,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Met deze oplossing kunnen de *oplegreacties* en de *V*- en de *M*-lijn worden bepaald. Dit laatste wordt weer aan de lezer overgelaten.

Algemene conclusie:

Ook hier blijkt dat daar waar de constructie stijver is gemaakt er een groter moment optreedt. De momenten in de bovenregel zullen groter worden. Vergelijk wat dat betreft maar eens de *veldmomenten* in de bovenregel met die uit de opdrachten 10a en 10b.