Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 7 Meetkunde

1. ΔABC is een Pythagorasdriehoek. Daarom geldt:

a. $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

b. $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{289-64}=\sqrt{225}=15$

2. ΔAEC is gelijkvormig met ΔBEC en ΔACB (twee hoeken zijn steeds gelijk).
Daaruit volgt:

a. $\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AE=\frac{AC^2}{AB}=\frac{16}{8}=2$. Met de stelling van Pythagoras berekenen we *CE* en *BC*:

$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

Verder is $BE=8-2=6$

b. $\frac{CE}{AE}=\frac{BE}{CE}\Rightarrow BE=\frac{CE^2}{AE}=\frac{25}{3}=8\tfrac{1}{3}\Rightarrow AB=AE+BE=3+8\tfrac{1}{3}=11\tfrac{1}{3}$

Met de stelling van Pythagoras worden de overige lijnstukken berekend:

$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(11\tfrac{1}{3})^2-34}=\sqrt{\tfrac{850}{9}}=\tfrac{5}{3}\sqrt{34}$

3. ΔDBE is gelijkvormig met ΔABC, dus

$\frac{BD}{AB}=\frac{DE}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AD+BD}=\frac{DE}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{3+BD}=\frac{5}{7}\Rightarrow 7\cdot BD=15+5\cdot BD\Rightarrow 2\cdot BD=15\Rightarrow BD=7\tfrac{1}{2}$

4. Omdat *CD* en *AE* evenwijdig zijn geldt $\angle C_1=\angle CAE$ maar ook $\angle C_2=\angle CEA$. Omdat gegeven is dat $\angle C_1=\angle C_2$ is ΔEAC een gelijkbenige driehoek ($CE=AC$).

In deze driehoek geldt dus:

$\frac{BC}{BE}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{BC}{CE+BC}=\frac{BD}{AD+BD}\Rightarrow\frac{CE+BC}{BC}=\frac{AD+BD}{BD}\Rightarrow\frac{CE}{BC}+1=\frac{AD}{BD}+1\Rightarrow\frac{CE}{BC}=\frac{AD}{BD}$

Omdat $CE=AC$, geldt dus $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

5. Voor een ruit geldt dat het oppervlak gelijk is aan de helft van het product van de beide diagonalen.
Het oppervlak is dus $\tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 20=120$

6. Van een trapezium met evenwijdige zijden *DC* (de kortste zijde) en *AB* (de langste zijde) en hoogte *h* is het oppervlak gelijk aan $\tfrac{1}{2}h(CD+AB)$.

Hier geldt dus: $72=\tfrac{1}{2}h(4+8)\Rightarrow h=12$.

Omdat het trapezium gelijkbenig is geldt voor beide diagonalen (*AD* en *BC*): ze zijn de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met zijden *h* (=12) en $p = BC + \frac{1}{2}(AB - BC) = 4 + \frac{1}{2}(8-4) = 6$ (dit volgt uit figuur 7.30, met daarin $a = c$) . Volgens de stelling van Pythagoras zijn de diagonalen dus beide gelijk aan $\sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

7. Met de cosinusregel worden eerst de hoeken berekend:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A \Rightarrow$

$8^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = \dfrac{64 - 144 - 100}{-240} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\angle A = 0,7227342478 \text{ rad } = 41,40962210 \text{ graden}$

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B \Rightarrow$

$12^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle B \Rightarrow \cos \angle B = \dfrac{144 - 64 - 100}{-160} = \frac{1}{8} \Rightarrow$

$\angle \text{B} = 1,445468496 \text{ rad } = 82,81924422 \text{ graden}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \Rightarrow$

$10^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = \dfrac{100 - 144 - 64}{-192} = \frac{9}{16} \Rightarrow$

$\angle C = 0,9733899101 \text{ rad } = 55,77113365 \text{ graden}$

Merk op dat de som van de berekende hoeken 180 graden is.

$\dfrac{CF}{AC} = \sin \angle A \Rightarrow CF = AC \cdot \sin \angle A = 7,937253934$

$\dfrac{AD}{AB} = \sin \angle B \Rightarrow AD = AB \cdot \sin \angle B = 9,921567417$

$\dfrac{BE}{BC} = \sin \angle C \Rightarrow BE = BC \cdot \sin \angle C = 6,614378278$

8. Uit de gegevens volgt dat $\angle C = 180° - 41° - 73° = 66°$

Met de sinusregel berekenen we BC:

$\dfrac{\sin \angle C}{AB} = \dfrac{\sin \angle A}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sin 66°}{12} = \dfrac{\sin 41°}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{\sin 41° \cdot 12}{\sin 66°} = 8,617752167$

$CD = BC \sin \angle B = 8{,}617752167 \cdot \sin 73° = 8{,}241197383$

9. a. Zie de figuur bij opgave 8. Opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B$.

Op analoge manier:

Opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$.

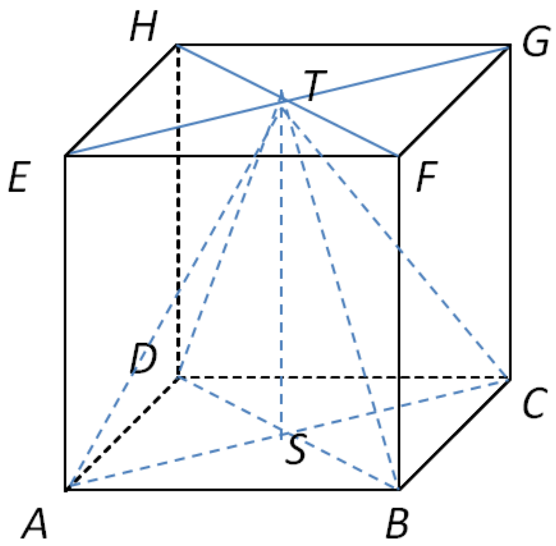
Door de hoogtelijn *AE* uit *A* of *BF* uit *B* te trekken bewijst men:

Opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin \angle C$

resp. Opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$

b. Opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 \cdot \sin 55° = 22,52668122$

10.



Uit de figuur blijkt: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Ook: $AT (= BT = CT = DT) = \sqrt{AS^2 + ST^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + 10^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$I_{TABCD} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{oppervlak grondvlak} = \frac{1}{3} \cdot ST \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 100 = 333\frac{1}{3}$