Formulekaart behorende bij Toegepaste wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs, Deel 2 ISBN 978 90 06 310856

Vectorrekening

Het inwendig product van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *in* $\mathbb{R}^n$, notatie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, is gedefinieerd als:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

Het uitwendig product $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$ kan berekend worden volgens:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Matrixrekening

Product van matrices

Als A een $m \times n$–matrix en B een $n \times q$–matrix dan is het product $C = AB$ de $m \times q$–matrix, waarvan de elementen zijn: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, voor $i = 1, 2, \ldots, m$ en $j = 1, 2, \ldots, q$.

Determinanten

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, dan is $|A|$ als volgt te berekenen:

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$: ontwikkeling naar de j-de kolom, waarbij $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

of $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$: ontwikkeling naar de i-de rij, waarbij $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

waarbij A_{ij} de cofactor en M_{ij} de minor van het element a_{ij} is.

Functies van twee variabelen

Totale differentiaal

De totale differentiaal van $z = f(x, y)$ is gedefinieerd als: $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y} \mathrm{d}y$.

Totale afgeleide

Als $z = f(x, y)$ en x en y zijn functies van t, dan is de totale afgeleide: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

De herhaalde integraal

De herhaalde integraal van $f(x, y)$ over het gebied G is gedefinieerd door

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i = \iint_G f(x, y) \mathrm{d}A$$

In rechthoekscoördinaten: $\iint_G f(x, y) \mathrm{d}A = \iint_G f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

In poolcoördinaten: $\iint_G f(x, y) \mathrm{d}A = \iint_G f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) r \mathrm{d} r \mathrm{d}\varphi$

De inhoud van het lichaam onder de grafiek van een positieve functie $z = f(x, y)$ boven het gebied G is gelijk aan: $V = \iint_G f(x, y) \mathrm{d}A$.

Complexe getallen

Drie schrijfwijzen voor een complex getal: Eerste schrijfwijze: $z = x + \mathrm{i}y$.

Tweede schrijfwijze: $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi)$, met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\tan\varphi = \frac{y}{x}$.

Derde schrijfwijze: $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, met $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi$ (formule van Euler).

Rekenen met complexe getallen

1 Met de vorm $x + \mathrm{i}y$. Stel $z_1 = a + b\mathrm{i}$ en $z_2 = c + d\mathrm{i}$. $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$ $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$	2 Met de exponentiële vorm. Stel $z_1 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ en $z = r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$

1 Het oplossen van $az^2 + bz + c = 0$, waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.
Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

a Als $D \geq 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ b Als $D < 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$

2 Er zijn n oplossingen van $z^n = c$, waarbij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en $c \in \mathbb{C}$:

$z_k = \sqrt[n]{|c|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\arg(c)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, voor $k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$.

Rijen en reeksen

Eindige meetkundige reeks: $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a\,r^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$ als $r \neq 1$.

Limiet van een oneindige meetkundige reeks: $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r}$, mits $-1 < r < 1$.

Taylorreeks van f(x) rond het punt x = a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Taylorreeksen rond x = 0

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (-1 \le x \le 1)$

$\frac{1}{1-x} = x + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$

$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-(n-1))}{n!}x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

Differentiaalvergelijkingen

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten

De standaardvorm is: $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x)$.
Oplossingsmethode:
1 Maak de differentiaalvergelijking homogeen.
2 Los de karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ op.

Geval	Voor de oplossingen λ_1 en λ_2 van $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ geldt:	De algemene oplossing van $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$ is:
1	λ_1 en λ_2 reëel en $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{hom} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2	λ_1 en λ_2 reëel en gelijk: $\lambda_1 = \lambda_2$	$y_{hom} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$
3	λ_1 en λ_2 complex, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_{hom} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right)$

3 Bepaal y_{part} met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
4 De algemene oplossing is: $y = y_{hom} + y_{part}$.

Numerieke oplossing van differentiaalvergelijkingen

Methode van Euler: $\begin{cases} y_0^E = y_0 \ (y_0 \text{ is gegeven}) \\ y_{k+1}^E = y_k^E + h\cdot f(x_k, y_k^E), \text{ voor } k = 0,1,2,\ldots,n-1. \end{cases}$

Methode van Euler-Heun:

$$\begin{cases} y_0^E = y_0^H = y_0 \ (y_0 \text{ is gegeven}) \\ y_{k+1}^E = y_k^H + h\cdot f(x_k, y_k^H) \\ y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{1}{2}h\left(f(x_k, y_k^H) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^E)\right), \text{ voor } k = 0,1,2,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Laplace-transformatie

Eigenschappen van de Laplace-transformatie

1 $\mathscr{L}\{a\cdot f(t) + b\cdot g(t)\} = a\cdot\mathscr{L}\{f(t)\} + b\cdot\mathscr{L}\{g(t)\}$

2 $\mathscr{L}\{e^{a\cdot t}\cdot f(t)\} = F(s-a)$

3 $\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\cdot F(s) - f(0)$; $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$

4 $\mathscr{L}\{t^n\cdot f(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$

5 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathscr{L}\{f(t)\}$

6 $\mathscr{L}\{Hv(t-a)\cdot f(t-a)\} = e^{-a\cdot s}\cdot F(s)$, met $Hv(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > a \\ 0 & \text{voor } t < a \end{cases}$

7 $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(p)\,dp$

8 Als $f(t)$ periodiek is met periode T dan geldt:
$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-s\cdot T}}$, waarbij $F_1(s) = \mathscr{L}\{f_1(t)\}$ en $f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{voor } 0 < t < T \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

9 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\downarrow 0} s\cdot F(s)$ (eindwaarderegel)

10 $\mathscr{L}\{(f*g)(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\cdot\mathscr{L}\{g(t)\}$, waarbij $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$

Overzicht van (inverse) Laplace-getransformeerden

	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$		$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1	6	$\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	1	$\frac{1}{s}$	7	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$
3	$Hv(t-a)$	$\frac{e^{-a\cdot s}}{s}$	8	$e^{a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
4	$e^{a\cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$	9	$e^{a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
5	$\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	10	$e^{a\cdot t}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$