Hoofdstuk 6 Differentiaalvergelijkingen

6.10 Herhalingsopgaven

1

$$\left(1+x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy \Rightarrow$$
$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;\text{ of }\; y=0$$
$$\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;\text{ of }\; y=0$$
$$\ln\left(\left|y\right|\right)=\ln\left|1+x^2\right|+C \;\text{ of }\; y=0$$
$$\mathrm{e}^{\ln\left(\left|y\right|\right)}=\mathrm{e}^{\ln\left|1+x^2\right|+C} \;\text{ of }\; y=0$$
$$\left|y\right|=\mathrm{e}^{C}\cdot\mathrm{e}^{\ln\left|1+x^2\right|} \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=\pm\mathrm{e}^{C}\cdot\left|1+x^2\right| \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=A\cdot\left|1+x^2\right|,\text{ met } A\neq 0 \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=A\cdot\left(1+x^2\right),\text{met } A\in\mathbb{R}$$

In de laatste stap is gebruikt dat $\left|1+x^2\right|=1+x^2$, omdat $1+x^2$ niet negatief kan zijn.

2

$$\left(x^2+1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y \Rightarrow$$
$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;\text{ of }\; y=0$$
$$\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;\text{ of }\; y=0$$
$$\ln\left(\left|y\right|\right)=\arctan\left(x\right)+C \;\text{ of }\; y=0$$
$$\mathrm{e}^{\ln\left(\left|y\right|\right)}=\mathrm{e}^{\arctan(x)+C} \;\text{ of }\; y=0$$
$$\left|y\right|=\mathrm{e}^{C}\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)} \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=\pm\mathrm{e}^{C}\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)} \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=A\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)},\text{ met } A\neq 0 \;\text{ of }\; y=0$$
$$y=A\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)},\text{met } A\in\mathbb{R}$$

3

We bepalen eerst de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

$$u\ln(u)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-v=0 \Rightarrow u\ln(u)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=v \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{1}{u\ln(u)}\mathrm{d}u \ \text{ of } \ v=0$$

$$\int\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\int\frac{1}{\ln(u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \ \text{ of } \ v=0$$

Substitueer $x=\ln(u)$ en dus $\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$

$$\ln|v|=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x \ \text{ of } \ v=0$$

$$\ln|v|=\ln(x)+C \ \text{ of } \ v=0$$

$$\ln|v|=\ln(\ln(u))+C \ \text{ of } \ v=0$$

$$\mathrm{e}^{\ln|v|}=\mathrm{e}^{\ln(\ln(u))+C} \ \text{ of } \ v=0$$

$$|v|=\mathrm{e}^{C}\cdot\mathrm{e}^{\ln(\ln(u))} \ \text{ of } \ v=0$$

$v=\pm\mathrm{e}^{C}\cdot\ln(u)$ of $v=0 \Rightarrow v(u)=A\ln(u)$, met $A\in$ ¡

We verwerken de voorwaarde $v(3)=\ln 9$

$$v(3)=\ln(9)\Rightarrow A\ln(3)=\ln(9)\Rightarrow A=\frac{\ln(9)}{\ln(3)}=\frac{\ln(3^2)}{\ln(3)}=\frac{2\ln(3)}{\ln(3)}=2$$

Dus geldt $v(u)=2\ln(u)$

4

Reduceren van de differentiaalvergelijking geeft $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^3+4\lambda=0$

Oplossen geeft $\lambda^3+4\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda^2+4)=0\Rightarrow\lambda=0$ of $\lambda=2\mathrm{i}$ of $\lambda=-2\mathrm{i}$

De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dan

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1\mathrm{e}^{0x}+C_2\mathrm{e}^{0x}\cos(2x)+C_3\mathrm{e}^{0x}\sin(2x)\Rightarrow$$

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1+C_2\cos(2x)+C_3\sin(2x)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven differentiaalvergelijking $y_{\text{part}}(x)=A\mathrm{e}^{x}+B\cos x+C\sin x$

De constanten *A*, *B* en *C* berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y'_{\text{part}}(x)=A\mathrm{e}^{x}-B\sin x+C\cos x$$

$$y''_{\text{part}}(x)=A\mathrm{e}^{x}-B\cos x-C\sin x$$

$$y'''_{\text{part}}(x)=A\mathrm{e}^{x}+B\sin x-C\cos x$$

Invullen in de gegeven d.v. levert

$$A\mathrm{e}^{x}+B\sin x-C\cos x+4\left(A\mathrm{e}^{x}-B\sin x+C\cos x\right)=5\mathrm{e}^{x}+3\sin x\Rightarrow$$

$$(A+4A)\mathrm{e}^{x}+(B-4B)\sin x+(-C+4C)\cos x=5\mathrm{e}^{x}+3\sin x\Rightarrow$$

$$5A\mathrm{e}^{x}-3B\sin x+3C\cos x=5\mathrm{e}^{x}+3\sin x$$

Dit levert

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ -3B = 3 \\ 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Dus $y_{\text{part}}(x) = \mathrm{e}^x - \cos x$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan

$$y_{\text{alg}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + \mathrm{e}^x - \cos x$$

5

Reduceren van de differentiaalvergelijking geeft $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} + 9u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 9 = 0$

Oplossen geeft $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3\mathrm{i}$ of $\lambda = -3\mathrm{i}$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan

$$u_{\text{hom}}(v) = C_1\mathrm{e}^{0v}\cos(3v) + C_2\mathrm{e}^{0v}\sin(3v) \Rightarrow$$

$$u_{\text{hom}}(v) = C_1\cos(3v) + C_2\sin(3v)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven differentiaalvergelijking $u_{\text{part}}(v) = v\cdot\left(A\cos(3v) + B\sin(3v)\right) = Av\cos(3v) + Bv\sin(3v)$

Let op de factor *v*, vanwege het feit dat $\sin(3v)$ als term voorkomt in u_{hom}

De constanten *A* en *B* berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$u'_{\text{part}}(v) = A\cos(3v) - 3Av\sin(3v) + B\sin(3v) + 3Bv\cos(3v)$$

$$= (A + 3Bv)\cos(3v) + (B - 3Av)\sin(3v)$$

$$u''_{\text{part}}(v) = 3B\cos(3v) - 3(A + 3Bv)\sin(3v) + (-3A)\sin(3v) + 3(B - 3Av)\cos(3v)$$

$$= (3B + 3B - 9Av)\cos(3v) + (-3A - 9Bv - 3A)\sin(3v)$$

$$= (6B - 9Av)\cos(3v) + (-6A - 9Bv)\sin(3v)$$

Invullen in de gegeven differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} + 9u = 9\sin(3v)$ levert

$$(6B - 9Av)\cos(3v) + (-6A - 9Bv)\sin(3v) + 9\left(Av\cos(3v) + Bv\sin(3v)\right) = 9\sin(3v) \Rightarrow$$

$$(6B - 9Av + 9Av)\cos(3v) + (-6A - 9Bv + 9Bv)\sin(3v) = 9\sin(3v) \Rightarrow$$

$$6B\cos(3v) - 6A\sin(3v) = 9\sin(3v)$$

Dit geeft

$$\begin{cases} 6B = 0 \\ -6A = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Dus $u_{\text{part}}(v) = -\frac{3}{2}v\cos(3v)$

De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$u_{\text{alg}}(v) = u_{\text{hom}}(v) + u_{\text{part}}(v) = C_1\cos(3v) + C_2\sin(3v) - \frac{3}{2}v\cos(3v)$$

$$= \left(C_1 - \frac{3}{2}v\right)\cos(3v) + C_2\sin(3v)$$

6a

Reduceren van de differentiaalvergelijking geeft $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 2\lambda = 0$
Oplossen geeft $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ of $\lambda = 2$
De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dan

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \mathrm{e}^{0x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{2x}$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven differentiaalvergelijking $y_{\text{part}}(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$

Let op de factor *x*, die nodig is omdat e^{2x} in de oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking voorkomt.
De constante *A* berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y'_{\text{part}}(x) = A\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} = (A + 2Ax)\mathrm{e}^{2x}$$

$$y''_{\text{part}}(x) = 2A\mathrm{e}^{2x} + 2(A + 2Ax)\mathrm{e}^{2x} = (4A + 4Ax)\mathrm{e}^{2x}$$

Invullen in de gegeven differentiaalvergelijking levert

$$(4A + 4Ax)\mathrm{e}^{2x} - 2(A + 2Ax)\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow$$

$$(4A + 4Ax - 2A - 4Ax)\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow 2A\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow A = 1$$

Dus $y_{\text{part}}(x) = x\mathrm{e}^{2x}$
De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$y_{\text{alg}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} = C_1 + (C_2 + x)\mathrm{e}^{2x}$$

6b

Reduceren van de differentiaalvergelijking geeft $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} - y = 0$
De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^4 - 1 = 0$
Oplossen geeft

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ of } \lambda = -1 \text{ of } \lambda = \mathrm{i} \text{ of } \lambda = -\mathrm{i}$$

De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dan

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1\mathrm{e}^{1\cdot x} + C_2\mathrm{e}^{-1\cdot x} + C_3\mathrm{e}^{0\cdot x}\cos x + C_4\mathrm{e}^{0\cdot x}\sin x \Rightarrow$$

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven differentiaalvergelijking $y_{\text{part}}(x) = Ax\mathrm{e}^{x} + Bx\mathrm{e}^{-x}$

Let op de factor *x* bij zowel e^{x} als e^{-x} die nodig is omdat e^{x} en e^{-x} beide in de oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking voorkomt.
De constanten *A* en *B* berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y_{\text{part}}(x) = Ax\mathrm{e}^{x} + Bx\mathrm{e}^{-x}$$

$$y'_{\text{part}}(x) = A\mathrm{e}^{x} + Ax\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x} - B\mathrm{e}^{-x} = (A + Ax)\mathrm{e}^{x} + (B - Bx)\mathrm{e}^{-x}$$

$$y''_{\text{part}}(x) = A\mathrm{e}^{x} + (A + Ax)\mathrm{e}^{x} - B\mathrm{e}^{-x} - (B - Bx)\mathrm{e}^{-x} = (2A + Ax)\mathrm{e}^{x} + (-2B + Bx)\mathrm{e}^{-x}$$

$$y'''_{\text{part}}(x) = A\mathrm{e}^{x} + (2A + Ax)\mathrm{e}^{x} - 2B\mathrm{e}^{-x} - (-2B + Bx)\mathrm{e}^{-x} = (3A + Ax)\mathrm{e}^{x} - Bx\mathrm{e}^{-x}$$

$$y''''_{\text{part}}(x) = A\mathrm{e}^{x} + (3A + Ax)\mathrm{e}^{x} - B\mathrm{e}^{-x} + Bx\mathrm{e}^{-x} = (4A + Ax)\mathrm{e}^{x} + (-B + Bx)\mathrm{e}^{-x}$$

Invullen in de gegeven differentiaalvergelijking levert

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} - y = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow$$

$$\left(4A + Ax\right)\mathrm{e}^x + \left(-B + Bx\right)\mathrm{e}^{-x} - \left(Ax\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^{-x}\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow$$

$$\left(4A + Ax - Ax\right)\mathrm{e}^x + \left(-B + Bx - Bx\right)\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow$$

$$4A\mathrm{e}^x - B\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

Dit geeft $A = \frac{1}{8}$ en $B = -\frac{1}{2}$

Dus $y_{\text{part}}(x) = \tfrac{1}{8}x\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}$

De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$y_{\text{alg}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \tfrac{1}{8}x\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow$$

$$y_{\text{alg}}(x) = \left(C_1 + \tfrac{1}{8}x\right)\mathrm{e}^x + \left(C_2 - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

7
De differentiaalvergelijking is homogeen, reduceren hoeft dus niet.
Karakteristieke vergelijking (k.v.) : $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$
Oplossen geeft $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 8$

De oplossingen van de k.v. zijn dus $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is dan

$$z(t) = C_1\mathrm{e}^{(1+\sqrt{2})t} + C_2\mathrm{e}^{(1-\sqrt{2})t} = \mathrm{e}^t\left(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}\right)$$

8
De differentiaalvergelijking is homogeen, reduceren hoeft dus niet.
De karakteristieke vergelijking is: $4\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0$
Oplossen geeft $D = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = 64$
De oplossingen van de karakteristieke vergelijking zijn

$$\lambda = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 4} = \frac{12 \pm 8}{8}\text{, waaruit volgt } \lambda = \frac{12+8}{8} = 2\tfrac{1}{2} \text{ of } \lambda = \frac{12-8}{8} = \tfrac{1}{2}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is dan $u(v) = C_1\mathrm{e}^{\frac{5}{2}v} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}v}$

9
We delen linker- en rechterlid van de differentiaalvergelijking door $\theta\left(1+\theta^2\right)$ en krijgen

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{\theta}r = \frac{\theta}{\left(1+\theta^2\right)}$$

We zien dat het een inhomogene, lineaire eerste orde differentiaalvergelijking is en gebruiken de methode van variatie van constante om deze op te lossen.

We reduceren de differentiaalvergelijking en krijgen $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + \dfrac{1}{\theta}r = 0$

Deze homogene differentiaalvergelijking lossen we op via het scheiden van variabelen

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+\frac{1}{\theta}r=0$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\theta}r$$
$$\frac{1}{r}\mathrm{d}r=-\frac{1}{\theta}\mathrm{d}\theta \text{ of } r=0$$
$$\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\int-\frac{1}{\theta}\mathrm{d}\theta \text{ of } r=0$$
$$\ln|r|=-\ln|\theta|+C \text{ of } r=0$$
$$\mathrm{e}^{\ln|r|}=\mathrm{e}^{-\ln|\theta|+C} \text{ of } r=0$$
$$|r|=\frac{\mathrm{e}^{C}}{\mathrm{e}^{\ln|\theta|}} \text{ of } r=0$$
$$r=\pm\mathrm{e}^{C}\cdot\frac{1}{|\theta|} \text{ of } r=0$$
$$r=A\cdot\frac{1}{\theta} \text{ met } A\in \text{¡}$$

We variëren de constante en proberen $r(\theta)=\dfrac{A(\theta)}{\theta}$ als oplossing van de gehele differentiaalvergelijking.

We berekenen de afgeleide van $r(\theta)$: $r'(\theta)=\dfrac{\theta\cdot A'(\theta)-A(\theta)\cdot 1}{\theta^2}=\dfrac{1}{\theta}A'(\theta)-\dfrac{1}{\theta^2}A(\theta)$

Invullen in de oorspronkelijke differentiaalvergelijking geeft

$$\theta(1+\theta^2)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+(1+\theta^2)r=\theta^2$$
$$\theta(1+\theta^2)\left(\frac{1}{\theta}A'(\theta)-\frac{1}{\theta^2}A(\theta)\right)+(1+\theta^2)\frac{A(\theta)}{\theta}=\theta^2$$
$$(1+\theta^2)A'(\theta)-\frac{1+\theta^2}{\theta}A(\theta)+\frac{1+\theta^2}{\theta}A(\theta)=\theta^2$$
$$(1+\theta^2)A'(\theta)=\theta^2$$
$$A'(\theta)=\frac{\theta^2}{1+\theta^2}$$
$$A(\theta)=\int\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta$$

We berekenen de integraal in het rechterlid.

$$\int\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\int\frac{1+\theta^2-1}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\int\frac{1+\theta^2}{1+\theta^2}-\frac{1}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=$$
$$\int 1-\frac{1}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\theta-\arctan(\theta)+C$$

Dus $A(\theta)=\theta-\arctan(\theta)+C$

Invullen in de voorgestelde oplossing $r(\theta)=\dfrac{A(\theta)}{\theta}$ geeft

$$r(\theta)=\frac{A(\theta)}{\theta}=\frac{\theta-\arctan(\theta)+C}{\theta}=\frac{1}{\theta}\left(\theta-\arctan\theta+\tfrac{1}{4}\pi+1\right)$$

10

De vergelijking horend bij een *RLC*-netwerk staat in paragraaf 6.7.3: $L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}q=u(t)$

We kiezen $L=0{,}10$, $R=0$, $C=0{,}10$ en $u(t)=3{,}6\cos(8t)$.

We krijgen

$$0{,}10\cdot\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+0\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{0{,}10}q=3{,}6\cos(8t)\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+100q=36\cos(8t)$$

Dit is een tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.
We reduceren deze vergelijking en stellen de karakteristieke vergelijking op.
De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2+100=0$

Oplossen geeft $\lambda^2+100=0\Rightarrow\lambda=10\mathrm{i}$ of $\lambda=-10\mathrm{i}$

De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dan

$$q_{\text{hom}}(t)=C_1e^{0t}\cos(10t)+C_2e^{0t}\sin(10t)\Rightarrow$$

$$q_{\text{hom}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven differentiaalvergelijking $q_{\text{part}}(t)=A\cos(8t)+B\sin(8t)$

De constanten *A* en *B* berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$q_{\text{part}}(t)=A\cos(8t)+B\sin(8t)$$

$$q'_{\text{part}}(t)=-8A\sin(8t)+8B\cos(8t)$$

$$q''_{\text{part}}(t)=-64A\cos(10t)-64B\sin(10t)$$

Invullen in de gegeven differentiaalvergelijking levert

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+100q=36\cos(8t)$$

$$-64A\cos(8t)-64B\sin(8t)+100\big(A\cos(8t)+B\sin(8t)\big)=36\cos(8t)$$

$$36A\cos(8t)+36B\cos(8t)=36\cos(8t)$$

Dit geeft

$$\begin{cases}36A=36\\36B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\end{cases}$$

Dus $q_{\text{part}}(t)=1\cdot\cos(8t)+0\cdot\sin(8t)=\cos(8t)$

De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$q_{\text{alg}}(t)=q_{\text{hom}}(t)+q_{\text{part}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)+\cos(8t)$$

We verwerken de beginvoorwaarden.

Gegeven is $q(0)=0\ \mathrm{C}$.

Invullen in de algemene oplossing geeft

$$C_1\cos(0)+C_2\sin(0)+\cos(0)=0\Rightarrow C_1+1=0\Rightarrow C_1=-1$$

Gegeven is ook $i(0)=0\ \mathrm{A}$.

We weten dat $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, dus

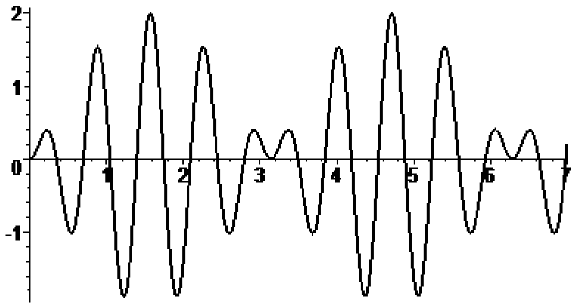
$$i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)+\cos(8t)\right)=-10C_1\sin(10t)+10C_2\cos(10t)-8\sin(8t)$$

Invullen van $i(0)=0$ A geeft $-10C_1\sin(0)+10C_2\cos(0)-8\sin(0)=0 \Rightarrow 10C_2=0 \Rightarrow C_2=0$

De gevraagde oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden is dus

$$q(t)=-1\cdot\cos(10t)+0\cdot\sin(10t)+\cos(8t)=-\cos(10t)+\cos(8t)$$

De gevraagde grafiek ziet er als volgt uit



11a

De vergelijking is:

$$ma=-cx+36\sin(8t)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+cx=36\sin(8t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+100x=36\sin(8t)$$

Deze differentiaalvergelijking lijkt sterk op die van opgave 10.

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2+100=0 \Rightarrow \lambda=10\mathrm{i}$ of $\lambda=-10\mathrm{i}$

Er geldt dus $x_{\text{hom}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen $x_{\text{part}}(t)=A\cos(8t)+B\sin(8t)$

De constanten A en B berekenen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$x_{\text{part}}(t)=A\cos(8t)+B\sin(8t)$$

$$x'_{\text{part}}(t)=-8A\sin(8t)+8B\cos(8t)$$

$$x''_{\text{part}}(t)=-64A\cos(10t)-64B\sin(10t)$$

Invullen in de differentiaalvergelijking geeft

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+100x=36\sin(8t) \Rightarrow$$

$$-64A\cos(8t)-64B\sin(8t)+100\left(A\cos(8t)+B\sin(8t)\right)=36\sin(8t) \Rightarrow$$

$$36A\cos(8t)+36B\cos(8t)=36\sin(8t)$$

Dit levert

$$\begin{cases}36A=0\\36B=36\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=0\\B=1\end{cases}$$

Dus: $x_{\text{part}}(t)=0\cdot\cos(8t)+1\cdot\sin(8t)=\sin(8t)$

De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$x(t)=x_{\text{alg}}(t)=x_{\text{hom}}(t)+x_{\text{part}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)+\sin(8t)$$

We verwerken de beginvoorwaarden.

De beginvoorwaarden zijn $x(0)=0$ en $x'(0)=v(0)=-2$

$x(0)=0$ geeft $C_1\cos(0)+C_2\sin(0)+\sin(0)=0 \Rightarrow C_1=0$

We bepalen $x'(t)$: $x'(t)=-10C_1\sin(10t)+10C_2\cos(10t)+8\cos(8t)$

$x'(0)=-2$ levert $-10C_1\sin(0)+10C_2\cos(0)+8\cos(0)=-2 \Rightarrow 10C_2+8=-2 \Rightarrow C_2=-1$.

De gevraagde uitslag $x(t)$ is daarmee:

$$x(t)=0\cdot\cos(10t)+(-1)\sin(10t)+\sin(8t)=\sin(8t)-\sin(10t)$$

11b

De vergelijking is nu:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+100x=36\sin(10t)$$

De oplossing van de gereduceerde vergelijking is gelijk aan die in onderdeel a

$$x_{\text{hom}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen $x_{\text{part}}(t)=t\cdot\left(A\cos(10t)+B\sin(10t)\right)$

Let op de factor *t*, deze is nodig omdat $\sin(10t)$ een term is van $x_{\text{hom}}(t)$.

We berekenen eerst de benodigde afgeleiden.

$$x_{\text{part}}(t)=t\cdot\left(A\cos(10t)+B\sin(10t)\right)=At\cos(10t)+Bt\sin(10t)$$

$$\begin{aligned}x'_{\text{part}}(t)&=A\cos(10t)-10At\sin(10t)+B\sin(10t)+10Bt\cos(10t)\\&=(A+10Bt)\cos(10t)+(B-10At)\sin(10t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x''_{\text{part}}(t)&=10B\cos(10t)+(A+10Bt)\cdot(-10)\sin(10t)-10A\sin(10t)+(B-10At)\cdot 10\cos(10t)\\&=(10B+10B-100At)\cos(10t)+(-10A-100Bt-10A)\sin(10t)\\&=(20B-100At)\cos(10t)+(-20A-100Bt)\sin(10t)\end{aligned}$$

Invullen in de opgestelde differentiaalvergelijking levert

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+100x=36\sin(10t)\Rightarrow$$

$$\left((20B-100At)\cos(10t)+(-20A-100Bt)\sin(10t)\right)+100\left(At\cos(10t)+Bt\sin(10t)\right)=36\sin(10t)\Rightarrow$$

$$(20B-100At+100At)\cos(10t)+(-20A-100Bt+100Bt)\sin(10t)=36\sin(10t)\Rightarrow$$

$$20B\cos(10t)-20A\sin(10t)=36\sin(10t)$$

Dit geeft $\begin{cases}20B=0\\-20A=36\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-1{,}8\\B=0\end{cases}$

Dus $x_{\text{part}}(t)=At\cos(10t)+Bt\sin(10t)=-1{,}8t\cos(10t)$

En daarmee $x(t)=x_{\text{alg}}(t)=x_{\text{hom}}(t)+x_{\text{part}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)-1{,}8t\cos(10t)$

We verwerken de beginvoorwaarden $x(0)=0$ en $x'(0)=v(0)=-2$.

$x(0)=0$ geeft $C_1\cos(0)+C_2\sin(0)-1{,}8\cdot 0\cdot\cos(0)=0 \Rightarrow C_1-0=0 \Rightarrow C_1=0$

We bepalen $x'(t)$

$$x'(t)=-10C_1\sin(10t)+10C_2\cos(10t)-1{,}8\cos(10t)+18t\sin(10t)$$

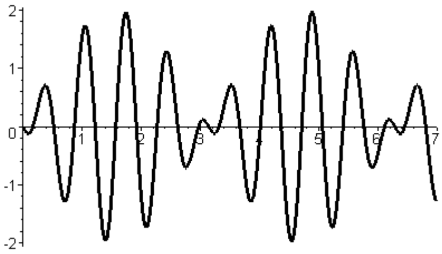
$x'(0)=-2$ levert

$$\begin{aligned}&-10C_1\sin(0)+10C_2\cos(0)-1{,}8\cos(0)+18\cdot 0\cdot\sin(0)=-2\Rightarrow\\&10C_2-1{,}8=-2\Rightarrow C_2=-0{,}02\end{aligned}.$$

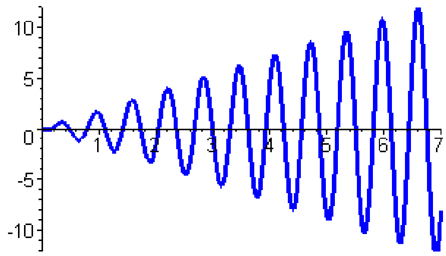
De gevraagde uitslag $x(t)$ is daarmee

$$x(t) = 0 \cdot \cos(10t) + (-0,02)\sin(10t) - 1,8t\cos(10t)$$
$$= -0,02\sin(10t) - 1,8t\cos(10t)$$

11a



11b



12a en 12b

Op het bootje werken twee krachten. Een constante kracht F_{bb}, geleverd door de buitenboordmotor, waarvoor geldt $F_{bb} = 840$ N. De richting van deze kracht kiezen we positief.

Ook werkt op het bootje een weerstandskracht F_w, die tegengesteld gericht is aan F_{bb}. F_w is evenredig met de snelheid v van de boot, dus geldt $F_w = c \cdot v$.

Verder is gegeven dat voor $v = 3$ geldt $F_w = 360$ N.

Dit geeft $360 = c \cdot 3$, dus $c = 120$ en daarmee $F_w = 120v$.

Voor de resultante F_{res} van de krachten geldt $F_{res} = F_{bb} + F_w = 840 - 120v$.

Voor F_{res} geldt bovendien $F_{res} = ma = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Ook is de totale massa bekend: $m = 220 + 80 = 300$ kg

Dus geldt

$$F_{res} = 840 - 120v \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 840 - 120v \Rightarrow$$
$$300\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 120v = 840 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0,4v = 2,8$$

We lossen deze lineaire eerste orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten op.

De karakteristieke vergelijking is $\lambda + 0,4 = 0$, dus $\lambda = -0,4$.

Dus $v_{\text{hom}}(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t}$

Als mogelijke particuliere oplossing kiezen we een constante, omdat het rechterlid van de differentiaalvergelijking een constante is. Dus $v_{part}(t) = A$.

Dan geldt $v'_{part}(t) = 0$.

Invullen in de differentiaalvergelijking geeft $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0,4v = 2,8 \Rightarrow 0 + 0,4A = 2,8 \Rightarrow A = 7$

We weten nu de algemene oplossing $v(t) = v_{a\lg}(t) = v_{\text{hom}}(t) + v_{part}(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7$

12a

Als we ervan uitgaan dat de snelheid gedurende het varen toeneemt, dan geldt

$$v_{\max}(t) = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7\right) = C \cdot 0 + 7 = 7$$

De maximale snelheid bedraagt dus 7 m/s.

12b

Als extra is nu gegeven $v(0)=0$.

We weten $v(t)=C\mathrm{e}^{-0,4t}+7$.

Er geldt daarom $0=C\mathrm{e}^{-0,4\cdot 0}+7 \Rightarrow 0=C+7 \Rightarrow C=-7$

Dit geeft $v(t)=C\mathrm{e}^{-0,4t}+7=-7\mathrm{e}^{-0,4t}+7=7-7\mathrm{e}^{-0,4t}$