Hoofdstuk 2 Complexe getallen

2.11 Herhalingsopgaven

1a

We splitsen het getal in twee delen:

$$\mathrm{e}^{-\ln 3+\mathrm{i}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)-1}=\mathrm{e}^{-\ln 3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}\mathrm{e}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}}\mathrm{e}^{-1}(\cos(-\tfrac{3}{4}\pi)+\mathrm{i}\sin(-\tfrac{3}{4}\pi))$$

$$=\frac{1}{3\mathrm{e}}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$3\mathrm{i}^{-5}=\frac{3}{\mathrm{i}^5}=\frac{3}{\mathrm{i}^4\mathrm{i}}=\frac{3}{1\cdot\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-3\mathrm{i}$$

Samengevoegd levert dit een complex getal op met een reëel deel $\frac{1}{3\mathrm{e}}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})=-\frac{1}{6\mathrm{e}}\sqrt{2}$ en een imaginair deel $-\frac{1}{3\mathrm{e}}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})-3=-\frac{1}{6\mathrm{e}}\sqrt{2}-3$:

$$z=-\frac{1}{6\mathrm{e}}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{6\mathrm{e}}\sqrt{2}+3\right)\mathrm{i}\;=\;-\frac{\sqrt{2}}{6\mathrm{e}}-\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{6\mathrm{e}}+3\right)$$

1b

$\left|-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{4+12}=4$ en $\arg(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})=\tfrac{2}{3}\pi$,

dus $\left|(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}\right|=4^{10}$

en $\arg(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}=10\arg(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})=\tfrac{20}{3}\pi=6\tfrac{2}{3}\pi=\tfrac{2}{3}\pi$ (modulo 2π)

$\left|\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+1}=2$ en $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\tfrac{1}{6}\pi$,

dus $\left|(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}\right|=2^{18}=4^9$

en $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}=18\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\tfrac{18}{6}\pi=3\pi=\pi$ (modulo 2π)

Dus $\left|\frac{(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}}\right|=\frac{\left|(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}\right|}{\left|(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}\right|}=4$ en $\arg\left(\frac{(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}}\right)=\tfrac{2}{3}\pi-\pi=-\tfrac{1}{3}\pi$

We kunnen dus schrijven $\frac{(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{18}}=4\left(\cos\left(-\tfrac{1}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

$\left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+1}=2$ en $\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i})=\tfrac{5}{6}\pi$,

dus $\left|(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6\right|=2^6$

en $\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6=6\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i})=5\pi=\pi$ (modulo 2π)

$\left|-1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ en $\arg(-1-\mathrm{i})=\tfrac{5}{4}\pi$,

dus $\left|(-1-\mathrm{i})^4\right|=\left(\sqrt{2}\right)^4=4$

en $\arg(-1-\mathrm{i})^4=4\arg(-1-\mathrm{i})=-5\pi=\pi$ (modulo 2π)

We kunnen dus schrijven
$(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6(-1-\mathrm{i})^4 = 4\cdot 2^6\left(\cos\left(\pi+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\pi\right)\right) = 256(\cos(2\pi)+\mathrm{i}\sin(2\pi))=256$.
De beide getallen samengevoegd levert dus een complex getal met een reëel deel 258 en een imaginair deel $-2\sqrt{3}$: $z = 258-2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

2a
Stel $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$
$|2\mathrm{i}z| = |2\mathrm{i}|\cdot|z| = 2r$ en $\arg(2\mathrm{i}z) = \arg 2\mathrm{i} + \arg z = \frac{1}{2}\pi + \varphi$
Dus moet gelden $4 \le 2r < 6 \Rightarrow 2 \le r < 3$ en $0 < \frac{1}{2}\pi + \varphi < \frac{1}{2}\pi \Rightarrow -\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$
Het gaat hierbij om het gebied in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de twee cirkels met middelpunt O en stralen 2 respectievelijk 3, in het vierde kwadrant ($-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$). Alleen de rand van de cirkel met straal 2 telt mee vanwege het gelijkteken in $2 \le r < 3$.

2b
Stel $\mathrm{Re}(z) = x$ en $\arg(z) = \varphi$
$x = \mathrm{Re}(z) = |3-4\mathrm{i}| = 5$
Verder moet gelden $0 < \varphi < \frac{1}{4}\pi$
Het gaat hierbij om het gedeelte van de lijn $x = 5$ in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de *x*-as ($\varphi = 0$) en de lijn $y = x$ ($\varphi = \frac{1}{4}\pi$).

2c
Stel $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$
$|z^3| = |z|^3 = r^3$ en $\arg(z^4) = 4\arg z = 4\varphi$
Dus moet gelden $1 < r^3 \le 27 \Rightarrow 1 < r \le 3$ en $-\frac{1}{2}\pi \le 4\varphi < \pi \Rightarrow -\frac{1}{8}\pi \le \varphi < \frac{1}{4}\pi$
Het gaat hierbij om het gebied in het complexe vlak, dat begrensd wordt door de twee cirkels met middelpunt O en stralen 1 respectievelijk 3 en de lijnen $\varphi = -\frac{1}{8}\pi$ respectievelijk $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.
Wat de rand van het gebied betreft: alleen de rand van de cirkel met straal 3 telt mee (vanwege het gelijkteken in $1 < r \le 3$) en het gedeelte van de lijn $\varphi = -\frac{1}{8}\pi$ (vanwege het gelijkteken in $-\frac{1}{8}\pi \le \varphi < \frac{1}{4}\pi$).

2d
Stel $\mathrm{Re}(z) = x$ en $\mathrm{Im}(z) = y$
$|z-5\mathrm{i}| = |4+3\mathrm{i}-z| \Rightarrow |x+\mathrm{i}y-5\mathrm{i}| = |4+3\mathrm{i}-x-\mathrm{i}y| \Rightarrow |x+\mathrm{i}(y-5)| = |4-x+\mathrm{i}(3-y)|$
Dus $\sqrt{x^2+(y-5)^2} = \sqrt{(4-x)^2+(3-y)^2} \Rightarrow x^2+(y-5)^2 = (4-x)^2+(3-y)^2$
Uitwerken leidt tot $x^2+y^2-10y+25 = 16-8x+x^2+9-6y+y^2 \Rightarrow 8x-4y=0 \Rightarrow 2x-y=0$
Het gaat hierbij om de lijn $y = 2x$ in het complexe vlak.

3a
Stel $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ en $\arg(z) = \varphi$
$|z+1-\mathrm{i}| = 10 \Rightarrow |x+\mathrm{i}y+1-\mathrm{i}| = |x+1+\mathrm{i}(y-1)| = 10$
Hieruait volgt $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = 10 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = 100$ (1)

Ook gegeven is:
$\arg(z^2)=\pi \Rightarrow 2\arg z = 2\varphi = \pi \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\pi$, dus $x=0$ (2) en $y>0$ (*z* ligt op de positieve imaginaire as).
(2) ingevuld in (1) levert: $1+(y-1)^2=100 \Rightarrow y-1=\sqrt{99} \Rightarrow y=3\sqrt{11}+1$ (alleen de positieve oplossing geldt, omdat $y>0$).
Conclusie: $z=(3\sqrt{11}+1)\mathrm{i}$. Het beeldpunt van *z* ligt op de imaginaire as.

3b
Het beeldpunt van $\bar{z}$ is ten opzichte van het beeldpunt van *z* gespiegeld ten opzichte van de reële as. Het beeldpunt van $\mathrm{i}z$ krijgen we uit het beeldpunt van *z* door het over een hoek van $\arg(\mathrm{i})=\frac{1}{2}\pi$ te draaien in positieve richting (het komt dus op de negatieve reële as te liggen).
Controle: $\bar{z}=-(3\sqrt{11}+1)\mathrm{i}$ en $\mathrm{i}z=(3\sqrt{11}+1)\mathrm{i}^2=-(3\sqrt{11}+1)$.

4a
$2z^2+4\mathrm{i}z-3=0 \Rightarrow z^2+2\mathrm{i}z-\frac{3}{2}=0$
Kwadraatafsplitsen leidt tot $(z+\mathrm{i})^2-\mathrm{i}^2-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow (z+\mathrm{i})^2=\frac{1}{2}$
$z=-\mathrm{i}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}-\mathrm{i}$

4b
Stel $z^3=w \Rightarrow w^2+3\mathrm{i}w+4=0$
Kwadraatafsplitsen leidt tot $(w+\frac{3}{2}\mathrm{i})^2-(\frac{3}{2}\mathrm{i})^2+4=0 \Rightarrow (w+\frac{3}{2}\mathrm{i})^2=-\frac{25}{4}$
Hieruit volgt $w+\frac{3}{2}\mathrm{i}=\pm\frac{5}{2}\mathrm{i} \Rightarrow w=\mathrm{i}$ of $w=-4\mathrm{i}$
Dus $w=z^3=\mathrm{i}$ of $w=z^3=-4\mathrm{i}$
$z^3=\mathrm{i}=1(\cos(\frac{1}{2}\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi+k2\pi)) \Rightarrow$
$z=\sqrt[3]{1}(\cos(\frac{1}{6}\pi+k\frac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi+k\frac{2}{3}\pi))$
voor $k=0,1,2$
Dus $z_1=\cos(\frac{1}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$
$z_2=\cos(\frac{5}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{5}{6}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$
$z_3=\cos(\frac{9}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{9}{6}\pi)=-\mathrm{i}$
$z^3=-4\mathrm{i}=4(\cos(\frac{3}{2}\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{3}{2}\pi+k2\pi)) \Rightarrow$
$z=\sqrt[3]{4}(\cos(\frac{1}{2}\pi+k\frac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi+k\frac{2}{3}\pi))$
voor $k=0,1,2$
Dus $z_4=\sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{1}{2}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi)\right)=\sqrt[3]{4}\mathrm{i}$
$z_5=\sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{7}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{7}{6}\pi)\right)=\sqrt[3]{4}(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\mathrm{i})$
$z_6=\sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{11}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{11}{6}\pi)\right)=\sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\mathrm{i})$

4c

$\mathrm{i}z^2+(2-2\mathrm{i})z+3\mathrm{i}=0 \Rightarrow z^2+\dfrac{2-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}z+3=0 \Rightarrow$

$z^2+(-2-2\mathrm{i})z+3=0 \Rightarrow z^2-(2+2\mathrm{i})z+3=0$

Kwadraatafspitsen leidt tot $(z-(1+i))^2-(1+\mathrm{i})^2+3=0 \Rightarrow (z-(1+\mathrm{i}))^2=1+2\mathrm{i}-1-3=-3+2\mathrm{i}$

$-3+2\mathrm{i}=\sqrt{9+4}(\cos(\arg(-3+2\mathrm{i})+\mathrm{i}\sin(\arg(-3+2\mathrm{i}))=\sqrt{13}(\cos(2,55359005)+\mathrm{i}\sin(2,55359005))$

dus

$z-(1+\mathrm{i})=\sqrt[4]{13}(\cos\frac{1}{2}(2,55..+k2\pi)+i\sin\frac{1}{2}(2,55..+k2\pi))$ voor $k=0,1$

Conclusie:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+\mathrm{i}+1,898828(\cos 1,276795+\mathrm{i}\sin 1,276795) \\ &= 1+\mathrm{i}+1,898828\cdot 0,289784+1,898828\cdot 0,957092\mathrm{i} \\ &= 1,5502+2,81735\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 1+\mathrm{i}+1,898828(\cos(1,276795+\pi)+\mathrm{i}\sin(1,276795+\pi)) \\ &= 1+\mathrm{i}+1,898828\cdot(-0,289784)+1,898828\cdot(-0,957092)\mathrm{i} \\ &= 0,44975-0,817353\mathrm{i} \end{aligned}$$

4d

Stel $z^3=w \Rightarrow w^2+(1-\mathrm{i})w-\mathrm{i}=0$

Kwadraatafsplitsen leidt tot

$(w+\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2-(\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2-\mathrm{i}=0 \Rightarrow (w+\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}))^2=\frac{1}{4}(1-2\mathrm{i}-1)+\mathrm{i}=\frac{1}{2}\mathrm{i}$

$\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(\cos(\frac{1}{2}\pi+k2\pi)+i\sin(\frac{1}{2}\pi+k2\pi))$

Hieruit volgt $w+\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})=\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{1}{4}\pi+k\pi)+i\sin(\frac{1}{4}\pi+k\pi))$ voor $k=0,1$

Dus $w=z^3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi)+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi)$

$\quad =-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2+\mathrm{i}(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2=\mathrm{i}$

of $w=z^3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\frac{5}{4}\pi)+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}\sin(\frac{5}{4}\pi)$

$\quad =-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}-(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2-\mathrm{i}(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2=-1$

Splitsen we op:

$z^3=\mathrm{i}=1(\cos(\frac{1}{2}\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{2}\pi+k2\pi)) \Rightarrow$

$z=\sqrt[3]{1}(\cos(\frac{1}{6}\pi+k\frac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi+k\frac{2}{3}\pi))$

voor $k=0,1,2$

Dus $z_1=\cos(\frac{1}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

$\quad z_2=\cos(\frac{5}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{5}{6}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

$\quad z_3=\cos(\frac{9}{6}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{9}{6}\pi)=-\mathrm{i}$

en

$z^3=-1=1(\cos(\pi+k2\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi+k2\pi)) \Rightarrow$

$z=1(\cos(\frac{1}{3}\pi+k\frac{2}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{3}\pi+k\frac{2}{3}\pi))$

voor $k=0,1,2$

Dus $z_4=\cos(\frac{1}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$

$\quad z_5=\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)=-1$

$\quad z_6=\cos(\frac{5}{3}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{5}{3}\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$

5a

De fasevector van $f(t)$ is $\alpha_f = 1\cdot e^{i\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} = \cos(-\tfrac{1}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$

De fasevector van $g(t) = 3\sin(2t + \tfrac{1}{4}\pi) = 3\cos(\tfrac{1}{2}\pi - 2t - \tfrac{1}{4}\pi) = 3\cos(-2t + \tfrac{1}{4}\pi) = 3\cos(2t - \tfrac{1}{4}\pi)$

is $\alpha_g = 3\cdot e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = 3\left(\cos(-\tfrac{1}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{1}{4}\pi)\right) = \tfrac{3}{2}\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}$

De fasevector van $h(t) = -4\cos(2t + \tfrac{1}{6}\pi) = 4\cos(\pi - 2t - \tfrac{1}{6}\pi) = 4\cos(-2t + \tfrac{5}{6}\pi) = 4\cos(2t - \tfrac{5}{6}\pi)$

is $\alpha_h = 4\cdot e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi\right)} = 4\left(\cos(-\tfrac{5}{6}\pi) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{5}{6}\pi)\right) = 4\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

5b

$\alpha_s = \alpha_f + \alpha_g + \alpha_h = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\mathrm{i} + 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

$= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\sqrt{2} - 2)$

$= -0,84278 - 4,987345\mathrm{i}$

Hiervan is de modulus $|\alpha_s| = \sqrt{(-0,84278)^2 + (-4,987345)^2} = 5,05805$

en het argument $\arg(\alpha_s) = \arctan\left(\dfrac{-4,987345}{-0,84278}\right) - \pi = -1,738198$ (we moeten π aftrekken want α_s ligt in het derde kwadrant).

Voor $f(t) + g(t) + h(t)$ is het reële deel van $f_c(t) + g_c(t) + h_c(t) = \alpha_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}$

$f_c(t) + g_c(t) + h_c(t) = 5,05805\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1,738198)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t} = 5,05805\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t-1,738198)}$

Het reële deel hiervan is

$\mathrm{Re}\left(5,05805\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t-1,738198)}\right) = 5,05805\cos(2t - 1,738198)$

6a

$v(t) = \dfrac{du}{dt} = -\tfrac{10}{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right)$

$= \tfrac{10}{3}\sin\left(-\tfrac{1}{3}t\right)$

$= \tfrac{10}{3}\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{3}t)\right)$

$= \tfrac{10}{3}\cos\left(\tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2}\pi\right)$ cm/s

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -\tfrac{10}{3}\tfrac{1}{3}\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right)$

$= \tfrac{10}{9}\cos\left(\pi - \tfrac{1}{3}t\right)$

$= \tfrac{10}{9}\cos\left(\tfrac{1}{3}t - \pi\right)$ cm/s^2 of $\tfrac{10}{9}\cos\left(\tfrac{1}{3}t + \pi\right)$ cm/s^2

6b

De fasevector van *u(t)* is $\alpha_u = 10\mathrm{e}^0 = 10$ (op de positieve reële as).

De fasevector van *v(t)* is $\alpha_v = \tfrac{10}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \tfrac{10}{3}\mathrm{i}$ (op de positieve imaginaire as, over $\tfrac{1}{2}\pi$ gedraaid ten opzichte van de fasevector α_u en met een factor $\tfrac{1}{3}$ vermenigvuldigd).

De fasevector van *a(t)* is $\alpha_a = \tfrac{10}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} = -\tfrac{10}{9}$ (op de negatieve reële as, weer over $\tfrac{1}{2}\pi$ gedraaid en met een factor $\tfrac{1}{3}$ vermenigvuldigd, maar nu ten opzichte van de fasevector α_v).