Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 4 Vergelijkingen en ongelijkheden

1.

a $3x-5=7x+11 \Leftrightarrow -4x=16 \Leftrightarrow x=-4$

b $-2p+7=\frac{2}{5}p-3 \Leftrightarrow 10=\frac{12}{5}p \Rightarrow p=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$

c

$$\frac{7}{3}x+\frac{2}{5}=\frac{1}{4}x-\frac{5}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}-\frac{1}{4}\right)x=-\frac{2}{5}-\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{25}{12}x=-\frac{31}{15}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{31}{15}\cdot\frac{12}{25}=-\frac{3\cdot4\cdot31}{3\cdot5\cdot25}=-\frac{124}{125}$$

d

$$3\tfrac{1}{4}x+1=1\tfrac{5}{6}x-2\tfrac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{13}{4}x+1=\frac{11}{6}x-\frac{13}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{4}-\frac{11}{6}\right)x=-\frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{12}x=-\frac{18}{5} \Rightarrow x=-\frac{18}{5}\cdot\frac{12}{17}=-\frac{216}{85} \Rightarrow x=-2\frac{46}{85}$$

e $3(x+4)-5(2x-7)=11 \Leftrightarrow 3x+12-10x+35=11 \Leftrightarrow 36=7x \Rightarrow x=\frac{36}{7}$

f

$$\tfrac{3}{5}(x-1)-\tfrac{2}{3}(4x+5)=x-2 \Leftrightarrow 15\left(\tfrac{3}{5}(x-1)-\tfrac{2}{3}(4x+5)\right)=15(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)-10(4x+5)=15(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 9x-9-40x-50=15x-30 \Leftrightarrow -46x=29 \Rightarrow x=-\frac{29}{46}$$

2.

a We elimineren de onbekende q:

$$\begin{cases}-2p+3q=-4 & \times 2\\ 5p+6q=1 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4p+6q=-8\\ 5p+6q=1\end{cases} \; -$$

$$-9p=-9 \Leftrightarrow p=1$$

Substitutie van deze waarde van p in de eerste vergelijking leidt tot:

$$-2\cdot1+3q=-4 \Leftrightarrow 3q=-2 \Leftrightarrow q=-\frac{2}{3}.$$

Oplossing: $(p,q)=\left(1,-\frac{2}{3}\right)$

b We elimineren de onbekende y:

$$\begin{cases}7x+4y=11 & \times 3\\ 3x-6y=-2 & \times 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}21x+12y=33\\ 6x-12y=-4\end{cases} \; +$$

$$27x=29 \Leftrightarrow x=\frac{29}{27}$$

Substitutie van deze waarde van x in de tweede vergelijking leidt tot:

$$3\cdot\frac{29}{27}-6y=-2 \Leftrightarrow -6y=-2-\frac{87}{27} \Leftrightarrow -6y=-\frac{141}{27} \Leftrightarrow y=\frac{47}{54}.$$

Oplossing: $(x,y)=\left(\frac{29}{27},\frac{47}{54}\right)$

c We vermenigvuldigen eerst de breuken weg

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}=0\\ \frac{3}{7}x-y-1=0\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times 12\\ \times 7\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}8x+3y=6\\ 3x-7y=7\end{cases}$$

We elimineren de onbekende x:

$$\begin{cases}8x+3y=6\\ 3x-7y=7\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times 3\\ \times 8\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}24x+9y=18\\ 24x-56y=56\end{cases} \; -$$

$$65y=-38 \Leftrightarrow y=-\frac{38}{65}$$

Substitutie van deze waarde van y in de eerste vergelijking leidt tot:

$$8x+3\cdot-\frac{38}{65}=6 \Leftrightarrow 8x=6+\frac{114}{65} \Leftrightarrow 8x=\frac{504}{65} \Leftrightarrow x=\frac{63}{65}.$$

Oplossing: $(x,y)=\left(\frac{63}{65},-\frac{38}{65}\right)$

d $\begin{cases}3a=9+5b\\ 7b-5=4a+5b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a-5b=9\\ -4a+2b=5\end{cases}$

We elimineren de onbekende a:

$$\begin{cases}3a-5b=9\\ -4a+2b=5\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times 4\\ \times 3\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}12a-20b=36\\ -12a+6b=15\end{cases} \; +$$

$$-14b=51 \Leftrightarrow b=-\frac{51}{14}$$

Substitutie van deze waarde van b in de tweede vergelijking leidt tot:

$$-4a+2\cdot\left(-\frac{51}{14}\right)=5 \Leftrightarrow -4a=5+\frac{102}{14} \Leftrightarrow -4a=\frac{172}{14} \Leftrightarrow a=-\frac{43}{14}.$$

Oplossing: $(a,b)=\left(-\frac{43}{14},-\frac{51}{14}\right)$

3.

a $8x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(8x+5)=0 \Rightarrow x=0 \vee 8x+5=0 \Rightarrow x=0 \vee x=-\frac{5}{8}$

b $p^2-p=90 \Leftrightarrow p^2-p-90=0 \Leftrightarrow (p-10)(p+9)=0 \Rightarrow p=10 \vee p=-9$

c $z^2=28 \Leftrightarrow z^2-28=0 \Leftrightarrow \left(z-\sqrt{28}\right)\left(z+\sqrt{28}\right)=0 \Rightarrow z=-2\sqrt{7} \vee z=2\sqrt{7}$

d $5x^2=2x+7 \Leftrightarrow 5x^2-2x-7=0$

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot5\cdot-7=144>0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 5}$$
$$= \frac{2 \pm 12}{10}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = \frac{2-12}{10} = -1 \text{ en } x_2 = \frac{2+12}{10} = \frac{7}{5}$$

e $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -24 < 0$, zodat er geen reële oplossingen zijn.

f $\frac{2}{5}x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x - 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 440 > 0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$= \frac{-(-20) \pm \sqrt{440}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{20 \pm \sqrt{4 \cdot 110}}{4}$$
$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{110}}{4}$$
$$= 5 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{110}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = 5 - \tfrac{1}{2}\sqrt{110} \text{ en } x_2 = 5 + \tfrac{1}{2}\sqrt{110}$$

g $(5x+1)(x-3) = 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 7 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -7 = 336 > 0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$= \frac{-(-14) \pm \sqrt{336}}{2 \cdot 5}$$
$$= \frac{14 \pm \sqrt{16 \cdot 21}}{10}$$
$$= \frac{14 \pm 4\sqrt{21}}{10}$$
$$= \tfrac{7}{5} \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{21}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = \tfrac{7}{5} - \tfrac{2}{5}\sqrt{21} \text{ en } x_2 = \tfrac{7}{5} + \tfrac{2}{5}\sqrt{21}$$

4.

a

$$2(x-5)^2 = -3(x-5) \Leftrightarrow 2(x-5)^2 + 3(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(2(x-5)+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(2x-7) = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \vee 2x-7 = 0$$
$$\Rightarrow x = 5 \vee x = \tfrac{7}{2}$$

b

$$2(3y-4)^2 = 10 \Leftrightarrow (3y-4)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(3y-4-\sqrt{5}\right)\left(3y-4+\sqrt{5}\right) = 0$$
$$\Rightarrow 3y-4-\sqrt{5} = 0 \vee 3y-4+\sqrt{5} = 0$$
$$\Rightarrow y = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt{5} \vee y = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{5}$$

c

$$2(x+7)(2x+9) = (x+7)(x-4) \Leftrightarrow (x+7)\big(2(2x+9)-(x-4)\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+7)(3x+22) = 0$$
$$\Leftrightarrow x+7 = 0 \vee 3x+22 = 0$$
$$\Rightarrow x = -7 \vee x = -\tfrac{22}{3}$$

d

$$(x-2)(x+5)(4x-1) = (x-2)^2(x+5)(x-1) \Leftrightarrow (x-2)(x+5)\big(4x-1-(x-2)(x-1)\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+5)\left(4x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+5)\left(-x^2+7x-3\right) = 0$$
$$\Rightarrow x = 2 \vee x = -5 \vee x^2-7x+3 = 0$$

Oplossen van $x^2-7x+3=0$:

$D = b^2-4ac = (-7)^2 - 4\cdot1\cdot3 = 37 > 0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{37}}{2\cdot1} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2} = \tfrac{7}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{37}$$

De oplossingen zijn:

$x = -5, x = 2,\ x = \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{37}$ en $x = \tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{37}$

5.

a Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met $x-2$, onder de voorwaarde dat $x-2\neq 0$, dus $x\neq 2$.

$$\frac{3}{x-2}=1\tfrac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{3}{x-2}=\tfrac{7}{5}\Rightarrow 7(x-2)=15\Rightarrow 7x=29\Rightarrow x=\tfrac{29}{7}$$

Oplossing voldoet

b Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met $x-3$ en x^2-9, onder de voorwaarde dat $x\neq 3$ en $x\neq -3$.

$$\frac{2}{x^2-9}=\frac{5}{x-3}\Rightarrow 2(x-3)=5(x^2-9)\Rightarrow 2(x-3)=5(x-3)(x+3)$$
$$\Rightarrow (x-3)(2-5(x+3))=0$$
$$\Rightarrow (x-3)(-5x-13)=0$$
$$\Rightarrow x-3=0\vee -5x-13=0$$
$$\Rightarrow x=3\vee x=-\tfrac{13}{5}$$

Oplossing $x=3$ voldoet niet zodat de oplossing is $x=-\tfrac{13}{5}$

c We tellen de breuken in het linkerlid op en gebruiken: $\frac{A}{B}=0\Leftrightarrow A=0$, mits $B\neq 0$.

$$\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x-3}=0\Leftrightarrow\frac{5x(x-3)-3(x-3)+x^2}{x^2(x-3)}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{6x^2-18x+9}{x^2(x-3)}=0\Leftrightarrow\frac{3(2x^2-6x+3)}{x^2(x-3)}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-6x+3=0,\ \text{mits } x\neq 0 \text{ en } x\neq 3$$

Oplossen van $2x^2-6x+3=0$:

$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 3=12>0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$
$$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{12}}{2\cdot 2}$$
$$=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{4}$$
$$=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Deze oplossingen voldoen

We kunnen de vergelijking ook oplossen door linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met x^2 en $x-3$, onder de voorwaarde dat $x\neq 3$ en $x\neq 0$.

d Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met $(p+3)^2$, onder de voorwaarde dat $p\neq -3$.

$$\frac{p^2-p+3}{p^2+6p+9}=\frac{2p-1}{p+3} \Leftrightarrow \frac{p^2-p+3}{(p+3)^2}=\frac{2p-1}{p+3}$$

$$\Leftrightarrow p^2-p+3=(2p-1)(p+3)$$

$$\Leftrightarrow p^2-p+3=2p^2+5p-3$$

$$\Leftrightarrow p^2+6p-6=0$$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot 1\cdot -6=60>0$, zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned} x_{1,2}&=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\\ &=\frac{-6\pm\sqrt{60}}{2\cdot 1}\\ &=\frac{-6\pm 2\sqrt{15}}{2}\\ &=-3\pm\sqrt{15}\end{aligned}$$

Deze oplossingen voldoen

6.

a Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met $x-1$ en 6 , en lossen vervolgens *x* op uit de zo ontstane vergelijking op.

$$\frac{5}{x-1}=\tfrac{1}{6}(z+3) \Rightarrow 30=(z+3)(x-1)$$

$$\Rightarrow x=1+\frac{30}{z+3} \Rightarrow x=\frac{z+33}{z+3}$$

b Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met ax en c , en lossen vervolgens *x* op uit de zo ontstane vergelijking op.

$$\begin{aligned}\frac{b+2x}{ax}=\frac{3c-b}{c} &\Rightarrow (b+2x)c=(3c-b)ax\\ &\Rightarrow bc+2cx=(3ac-ab)x\\ &\Rightarrow x(3ac-ab-2c)=bc\\ &\Rightarrow x=\frac{bc}{3ac-ab-2c}\end{aligned}$$

7.

a $-3x+7\le -4 \Leftrightarrow 11\le 3x \Rightarrow x\ge \tfrac{11}{3}$

b $4x+5\ge 7x-9 \Leftrightarrow 14\ge 3x \Rightarrow x\le \tfrac{14}{3}$

c

$$\frac{3}{5}x-2>\frac{5}{3}+\frac{9}{10}x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x-\frac{9}{10}x>\frac{5}{3}+2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{10}x>\frac{11}{3} \Leftrightarrow -\frac{11}{3}>\frac{3}{10}x$$

$$\Leftrightarrow x<-\frac{11}{3}\cdot\frac{10}{3} \Leftrightarrow x<-\frac{110}{9}$$

d

$$-(3p-7)-10\leq 12+4(p-1)+2p \Leftrightarrow -3p+7-10\leq 12+4p-4+2p$$

$$\Leftrightarrow -11\leq 9p \Rightarrow p\geq -\frac{11}{9}$$

$$D=0 \Leftrightarrow 36-4p=0 \Leftrightarrow p=9$$