Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 8 Driehoeksmeetkunde en goniometrie

8.1 Driehoeksmeetkunde

1. Met de cosinusregel worden eerst de hoeken berekend:

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \cos \angle \mathrm{A} \Rightarrow$$

$$8^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos \angle \mathrm{A} \Rightarrow \cos \angle \mathrm{A} = \frac{64 - 144 - 100}{-240} = \tfrac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{A} = 0,7227342478 \text{ rad } = 41,40962210 \text{ graden}$$

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \angle \mathrm{B} \Rightarrow$$

$$12^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle \mathrm{B} \Rightarrow \cos \angle \mathrm{B} = \frac{144 - 64 - 100}{-160} = \tfrac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{B} = 1,445468496 \text{ rad } = 82,81924422 \text{ graden}$$

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \angle \mathrm{C} \Rightarrow$$

$$10^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos \angle \mathrm{C} \Rightarrow \cos \angle \mathrm{C} = \frac{100 - 144 - 64}{-192} = \tfrac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{C} = 0,9733899101 \text{ rad } = 55,77113365 \text{ graden}$$

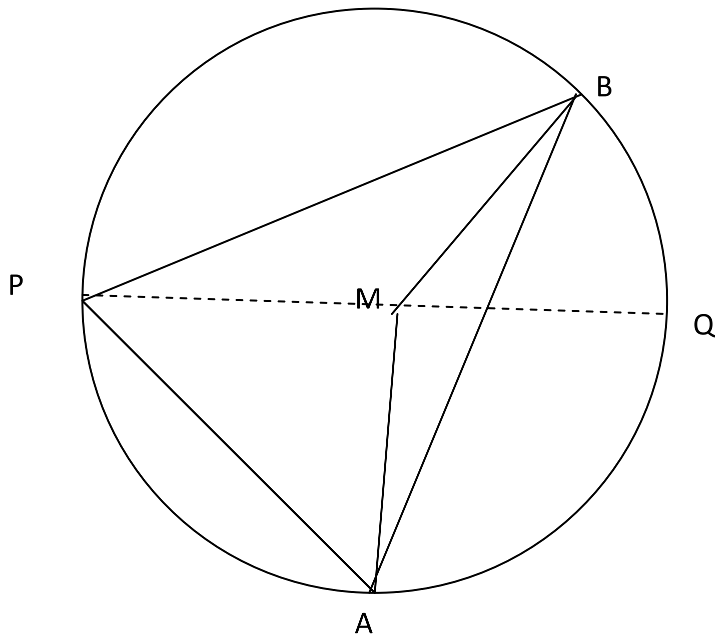
Merk op dat de som van de berekende hoeken 180 graden is.

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC}} = \sin \angle \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{CF} = \mathrm{AC} \cdot \sin \angle \mathrm{A} = 7{,}937253934$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \sin \angle \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{AD} = \mathrm{AB} \cdot \sin \angle \mathrm{B} = 9{,}921567417$$

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \sin \angle \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{BE} = \mathrm{BC} \cdot \sin \angle \mathrm{C} = 6{,}614378278$$

2.



a. $\Delta\mathrm{PMB}$ en $\Delta\mathrm{PMA}$ zijn gelijkbenig ($\mathrm{PM}=\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=r$), dus $\angle\mathrm{BPM}=\angle\mathrm{MBP}$ en $\angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{MAP}$.

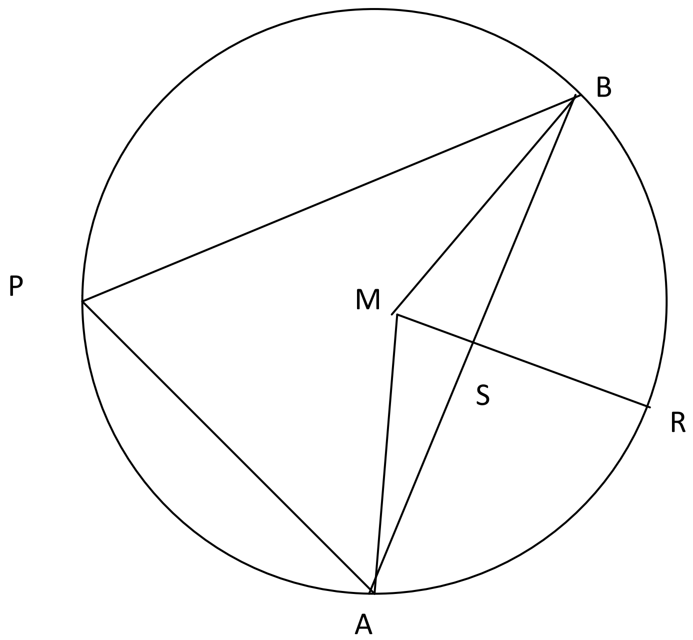
Verder is $\angle\mathrm{BMP}=180°-\angle\mathrm{BMQ}$, maar ook

$\angle\mathrm{BMP}=180°-\angle\mathrm{BPM}-\angle\mathrm{MPB}=180°-2\cdot\angle\mathrm{BPM}$.

Hieruit volgt $\angle\mathrm{BMQ}=2\cdot\angle\mathrm{BPM}$.

Op dezelfde wijze geldt: $\angle\mathrm{AMQ}=2\cdot\angle\mathrm{APM}$.

Samengevoegd: $\angle\mathrm{AMB}=2\cdot\angle\mathrm{APB}$

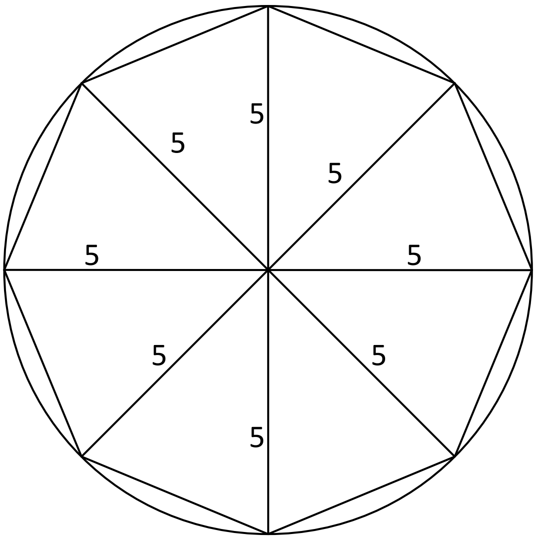


b. Gegeven: MR is de middelloodlijn van AB (dus $\angle ASM = \angle BSM = 90^\circ$):
$AS = BS \Rightarrow \angle SMA = \angle SMB = \tfrac{1}{2}\angle AMB = 60^\circ$.
Immers: Wanneer $\angle BPA = 60^\circ$ is $\angle AMB = 120^\circ$ (dit volgt uit a.).
$$AS = \tfrac{1}{2}AB = 8 \Rightarrow \sin\angle AMS = \frac{AS}{AM} = \frac{8}{r} \Rightarrow r = \frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = \tfrac{16}{3}\sqrt{3}$$

3. Uit de gegevens volgt dat $\angle C = 180^\circ - 41^\circ - 73^\circ = 66^\circ$
Met de sinusregel berekenen we BC:
$$\frac{\sin\angle C}{AB} = \frac{\sin\angle A}{BC} \Rightarrow \frac{\sin 66^\circ}{12} = \frac{\sin 41^\circ}{BC} \Rightarrow BC = \frac{\sin 41^\circ \cdot 12}{\sin 66^\circ} = 8{,}617752167$$
$$CD = BC\sin\angle B = 8{,}617752167 \cdot \sin 73^\circ = 8{,}241197383$$

4. a. Zie de figuur bij vraagstuk 3. $\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CD = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\angle B$.
Op analoge manier:
$\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CD = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle A$.
Door de hoogtelijn AE uit A of BF uit B te trekken bewijst men:
$\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AE = \tfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot \sin\angle C$
resp. $\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BF = \tfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin\angle C$
b. $\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle A = \tfrac{1}{2}\cdot 11\cdot 5\cdot \sin 55^\circ = 22{,}52668122$

5.



De regelmatige 8-hoek bestaat uit 8 gelijkbenige driehoeken met een tophoek van 45 graden.
Voor het oppervlak van één zo'n driehoek geldt volgens de formule uit vraagstuk 4a:
$\text{Opp } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle A = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin\angle 45^\circ = 8{,}838834762$
De cirkel is verdeeld in 8 cirkelsectoren met elk een oppervlak van:
$$\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}\pi r^2 = \frac{25}{8}\pi = 9{,}817477044$$

Het gedeelte, dat binnen de cirkel, maar buiten de 8-hoek ligt, heeft dus een oppervlak van $8 \cdot (9{,}817477044 - 8{,}838834762) = 7{,}829138256$.

8.2 Goniometrische functies

6.

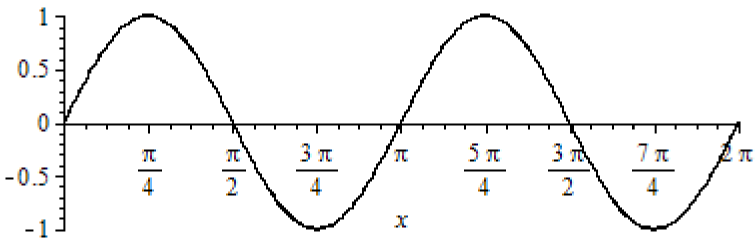
x (in rad)	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{11}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{13}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

7.

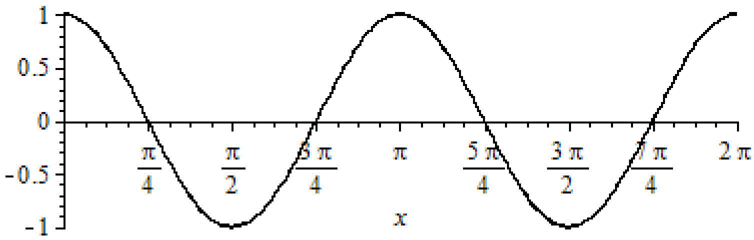
x (in rad)	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	bestaat niet
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	bestaat niet
2π	1	0	0

8.

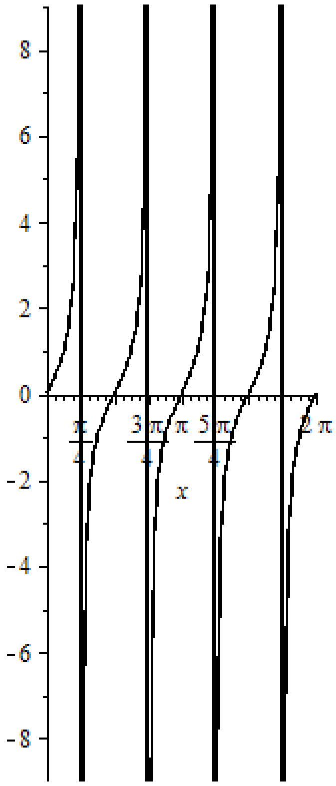
f(x) = sin(2x)



g(x) = cos(2x)



h(x) = tan(2x)



10.

a. $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b. $\sin x = -0,7 \Rightarrow x = 5,507787811 \Rightarrow \cos x = -0,7141428432 \Rightarrow \tan x = 0,9801960580$

c. $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3}$

d. $\tan x = -0,7 \Rightarrow x = 5,672459344 \Rightarrow \sin x = -0,5734623434 \Rightarrow \cos x = 0,8192319212$