

Hoofdstuk 1 Vectoren

1.6 Herhalingsopgaven

1a

$$\begin{aligned}3\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-8-15 \\ -6-12+25 \\ 12+20+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 7 \\ 27 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1b

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21} \\ |\vec{c}| &= \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{35} \\ |\vec{a} - \vec{c}| &= \sqrt{\begin{vmatrix} 1-(-3) \\ -2-5 \\ 4-(-1) \end{vmatrix}^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\end{aligned}$$

1c

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-5) = -24 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= -3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 = -17\end{aligned}$$

1d

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & -3 \\ \vec{e}_2 & -2 & 5 \\ \vec{e}_3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= ((-2)(-1) - 4 \cdot 5) \vec{e}_1 - ((1)(-1) - 4 \cdot (-3)) \vec{e}_2 + (1 \cdot 5 - (-2)(-3)) \vec{e}_3 \\ &= -18 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{c} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -3 & 2 \\ \vec{e}_2 & 5 & 3 \\ \vec{e}_3 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (5(-5) - (-1) \cdot 3) \vec{e}_1 - ((-3)(-5) - (-1) \cdot (2)) \vec{e}_2 + ((-3) \cdot 3 - 5 \cdot 2) \vec{e}_3 \\
&= -22 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 17 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-19) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -17 \\ -19 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2a

Voor de hoek die \vec{v} met de positieve x -as maakt, bepalen we het inwendig product van \vec{v} met \vec{e}_1 :

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Anderzijds geldt: $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = |\vec{v}| \cdot |\vec{e}_1| \cos \varphi_x = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} \cdot 1 \cdot \cos \varphi_x = \sqrt{17} \cos \varphi_x$

Dus $\cos \varphi_x = \frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_x = 1,81577 \text{ rad} = 104,03624^\circ$

De vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ligt in het xz -vlak (de y -coördinaat is immers 0). Daardoor staat \vec{v}

loodrecht op de y -as.

Dus $\cos \varphi_y = 0 \Rightarrow \varphi_y = \frac{1}{2} \pi \text{ rad} = 90^\circ$

Voor de hoek die \vec{v} met de positieve z -as maakt, bepalen we het inwendig product van \vec{v} met \vec{e}_3 :

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Anderzijds geldt: $\vec{v} \cdot \vec{e}_3 = |\vec{v}| \cdot |\vec{e}_3| \cos \varphi_z = \sqrt{17} \cos \varphi_z$

Dus $\cos \varphi_z = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_z = 0,24497 \text{ rad} = 14,0362^\circ$

2b

Voor de hoek die \vec{w} met de positieve x -as maakt, bepalen we het inwendig product van \vec{w} met \vec{e}_1 :

$$\vec{w} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

Anderzijds geldt: $\vec{w} \cdot \vec{e}_1 = |\vec{w}| \cdot |\vec{e}_1| \cos \varphi_x = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 6^2} \cdot 1 \cdot \cos \varphi_x = \sqrt{44} \cos \varphi_x$

$$\text{Dus } \cos \varphi_x = \frac{-2}{\sqrt{44}} \Rightarrow \varphi_x = 1,87707 \text{ rad} = 107,5484^\circ$$

Voor de hoek die \vec{w} met de positieve y-as maakt, bepalen we het inwendig product van \vec{w} met \vec{e}_2 :

$$\vec{w} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Anderzijds geldt: $\vec{w} \cdot \vec{e}_2 = |\vec{w}| \cdot |\vec{e}_2| \cos \varphi_y = \sqrt{44} \cos \varphi_y$

$$\text{Dus } \cos \varphi_y = \frac{2}{\sqrt{44}} \Rightarrow \varphi_y = 1,2645 \text{ rad} = 72,4516^\circ$$

Voor de hoek die \vec{w} met de positieve z-as maakt, bepalen we het inwendig product van \vec{w} met \vec{e}_3 :

$$\vec{w} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

Anderzijds geldt: $\vec{w} \cdot \vec{e}_3 = |\vec{w}| \cdot |\vec{e}_3| \cos \varphi_z = \sqrt{17} \cos \varphi_z$

$$\text{Dus } \cos \varphi_z = \frac{6}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_z = 0,44051 \text{ rad} = 25,2394^\circ$$

3

De vectoren \vec{a} en \vec{b} staan loodrecht op elkaar als hun inwendig product gelijk is aan 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1)p + p \cdot (-p) + 4 \cdot 2 = -p^2 - p + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)(8)}}{-2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{33}$$

4a

Voor de projectie \vec{q} van $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ op $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ geldt:

$$\vec{q} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}_e, \text{ waarbij } \vec{c}_e = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \vec{p} &= \frac{1}{\sqrt{35}}((-2)(3) + (3)(-5) + 5 \cdot 1) \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-16}{35} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4b

Voor de projectie \vec{p} van $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ op $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ geldt:

$$\vec{p} = (\vec{c}_e \cdot \vec{a}) \vec{c}_e, \text{ waarbij } \vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + 5^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \vec{q} &= \frac{1}{\sqrt{38}}((-2)(2) + (3)(0) + 5 \cdot 4) \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{16}{38} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{8}{19} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$