

drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1

Vijfde, herziene druk

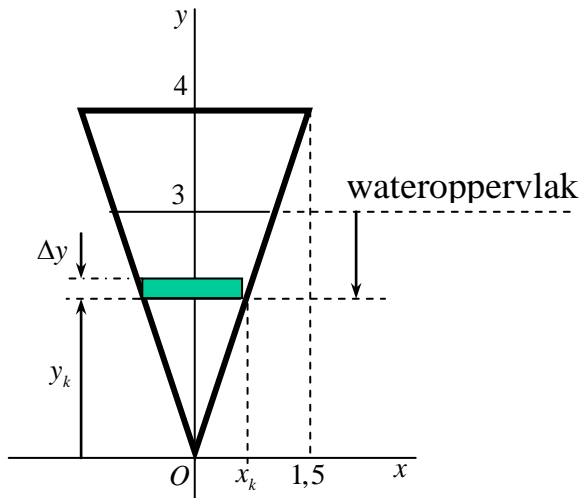
Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 7

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2011

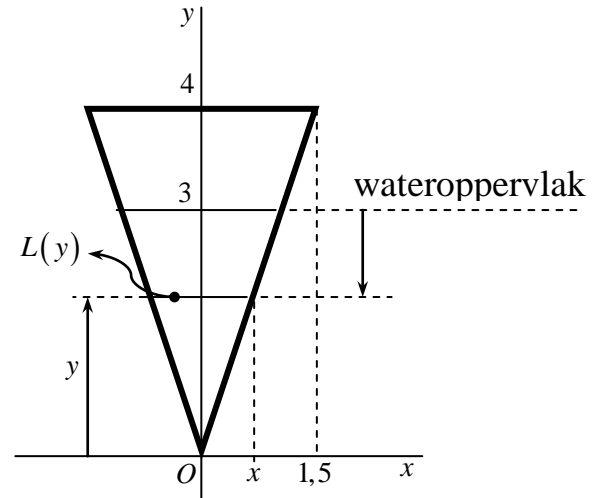


Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 7, paragraaf 7.10

Opgave 3



Figuur 1



Figuur 2

- a Een dwarsdoorsnede van de tank is geschetst in figuur 1. Voor het berekenen van de arbeid wordt het interval $[0, 3]$ op de y -as verdeeld in n deelintervallen $[y_k, y_{k+1}]$ met lengte Δy , waarbij $0 = y_1$ en $3 = y_{n+1}$. De exact verrichte arbeid om de aangegeven vloeistoflaag met dikte Δy omhoog te brengen is $\Delta_k W$.

De zwaartekracht F_k op deze vloeistoflaag is:

$$F_k = \rho \cdot g \cdot \Delta_k V$$

$$\approx 1000 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 2 \cdot x_k \cdot \Delta y$$

Er geldt $x_k = \frac{3}{8} y_k$, zodat $F_k \approx \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot y_k \cdot \Delta y$.

Deze vloeistoflaag wordt verplaatst over een afstand van ongeveer $4 - y_k$.

Voor $\Delta_k W$ volgt er dan:

$$\Delta_k W \approx \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y$$

Voor de totale arbeid W geldt dan bij benadering:

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta_k W \approx \sum_{k=1}^n \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y$$

Voor $\Delta y \rightarrow 0$ gaat de gemaakte fout in de benadering op elk deelinterval naar nul. Er volgt:

$$W = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y = \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 (4 - y) y dy$$

Het berekenen van de integraal:

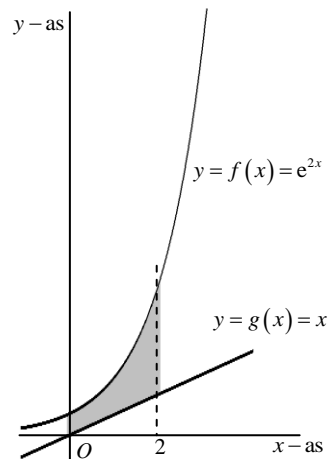
$$\begin{aligned}
 W &= \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 (4-y) y dy \\
 &= \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 (4y - y^2) dy \\
 &= \frac{3}{8} \cdot 98100 \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 \\
 &= 331088 \text{ J}
 \end{aligned}$$

b Zie figuur 2

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^3 \rho \cdot g \cdot h \cdot L(y) dy \\
 &= 9810 \int_0^3 (3-y) \cdot \frac{3}{4} y dy \\
 &= \frac{3}{4} \cdot 9810 \int_0^3 (3y - y^2) dy \\
 &= \frac{3}{4} \cdot 9810 \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 \\
 &= 33109 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Opgave 4

Een schets van het gebied is te zien in figuur 3



Figuur 3

Er geldt:

$$x_z = \frac{1}{O} \int_0^2 x(e^{2x} - x) dx \quad \text{en} \quad y_z = \frac{1}{2O} \int_0^2 ((e^{2x})^2 - x^2) dx$$

$$\begin{aligned}
O &= \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 e^{2x} dx - \int_0^2 x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} d(2x) - \int_0^2 x dx \\
&= \frac{1}{2} \left[e^{2x} \right]_0^2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (e^4 - 1) - 2 \\
&= \frac{1}{2} e^4 - \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 x d(e^{2x}) \\
&= \frac{1}{2} \left[x e^{2x} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx \\
&= e^4 - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_0^2 \\
&= e^4 - \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} e^4 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (e^{2x})^2 dx - \int_0^2 x^2 dx &= \frac{1}{4} \int_0^2 e^{4x} d(4x) - \int_0^2 x^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \left[e^{4x} \right]_0^2 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{4} e^8 - \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

We vinden:

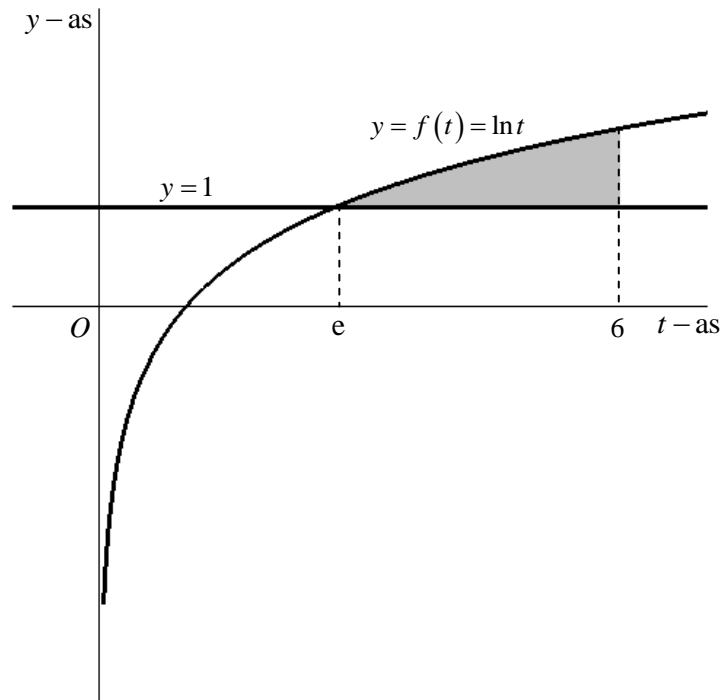
$$\begin{aligned}
x_z &= \frac{1}{O} \int_0^2 x (e^{2x} - x) dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2} e^4 - \frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4} e^4 + \frac{1}{4} - \frac{8}{3} \right) \\
&= \frac{9e^4 - 29}{6e^4 - 30}
\end{aligned}$$

en

$$y_z = \frac{1}{2O} \int_0^2 \left((e^{2x})^2 - x^2 \right) dx = \frac{1}{e^4 - 5} \left(\frac{3e^8 - 35}{12} \right) = \frac{3e^8 - 35}{12(e^4 - 5)}$$

Opgave 5

Een schets van het gebied is te zien in figuur 4.



Figuur 4

- a De oppervlakte van het gebied:

$$\begin{aligned} O &= \int_e^6 (\ln(t) - 1) dt = \left[t(\ln(t) - 1) \right]_e^6 - \int_e^6 t d(\ln(t) - 1) \\ &= 6(\ln(6) - 1) - \int_e^6 t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= 6(\ln(6) - 1) - \int_e^6 1 dt \\ &= 6\ln(6) - 6 - (6 - e) = 6\ln(6) - 12 + e \end{aligned}$$

- b Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de t -as:

$$\begin{aligned}
V_t &= \pi \int_e^6 \left((\ln(t))^2 - 1^2 \right) dt \\
&= \pi \int_e^6 (\ln(t))^2 dt - \pi \int_e^6 1 dt \\
&= \pi \left[t (\ln(t))^2 \right]_e^6 - \pi \int_e^6 t d(\ln(t))^2 - \pi(6 - e) \\
&= 6\pi (\ln(6))^2 - \pi e - 6\pi + \pi e - 2\pi \int_e^6 \ln(t) dt \\
&= 6\pi (\ln(6))^2 - 6\pi - 2\pi [t \ln(t) - t]_e^6 \\
&= 6\pi (\ln(6))^2 - 6\pi - 2\pi (6 \ln(6) - 6) + 2\pi (e - e) \\
&= 6\pi (\ln(6))^2 + 6\pi - 12\pi \ln(6) \\
&= 6\pi \left((\ln(6))^2 + 1 - 2\ln(6) \right)
\end{aligned}$$

- c Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de y -as:

$$\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_e^6 t (\ln(t) - 1) dt \\
&= \pi \int_e^6 (\ln(t) - 1) d(t^2) \\
&= \pi \left[t^2 (\ln(t) - 1) \right]_e^6 - \pi \int_e^6 t^2 d(\ln(t) - 1) \\
&= 36\pi (\ln(6) - 1) - \int_e^6 t dt \\
&= 36\pi (\ln(6) - 1) - \frac{1}{2} \pi [t^2]_e^6 \\
&= 36\pi (\ln(6) - 1) - \frac{1}{2} \pi (36 - e^2) \\
&= 36\pi \ln(6) - 54\pi + \frac{1}{2} \pi e^2 \\
&= \pi \left(36 \ln(6) - 54 + \frac{1}{2} e^2 \right)
\end{aligned}$$

Opgave 6

We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de remtijd, de afstandsfunctie $s(t)$ en uiteindelijk de remweg.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int a(t) dt \\
&= -\int \frac{4}{\sqrt{1+t}} dt \\
&= -4 \int (1+t)^{-\frac{1}{2}} d(1+t) \\
&= -8\sqrt{1+t} + C
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 30$ m/s, dit levert op de vergelijking $30 = -8 + C$, zodat $C = 38$ en $v(t) = 38 - 8\sqrt{1+t}$ (m/s).

Vervolgens lossen we op: $v(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
v(t) = 0 &\Rightarrow 38 - 8\sqrt{1+t} = 0 \Rightarrow 38 = 8\sqrt{1+t} \Rightarrow 38^2 = 8^2(1+t) \\
&\Rightarrow t = \frac{38^2}{8^2} - 1 = 21,5625 \text{ s}
\end{aligned}$$

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned}
s &= \int v dt = \int (38 - 8\sqrt{1+t}) dt \\
&= 38t - 8 \cdot \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + C_2 \\
&= 38t - \frac{16}{3}(1+t)\sqrt{1+t} + C_2
\end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_2 = \frac{16}{3}$ en $s(t) = 38t - \frac{16}{3}(1+t)\sqrt{1+t} + \frac{16}{3}$ (m).

De remweg:

$$s(21,5625) = 253,125 \text{ m}$$