Module 8
Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

Analyse
De constructie bestaat uit een drie keer geknikte staaf die bij A is ingeklemd en bij B in verticale richting is gesteund. De staafdelen waarvan de assen door de werklijn van de kracht gaan worden op buiging en dwarskracht belast. De staafdelen waarvan de assen de werklijn van de kracht niet snijden worden ook op wringing belast.
De staafdelen AB en DE worden niet op wringing belast.
Voor staafdeel BC geldt: $T_W = 10 \cdot 2 = 20$ kNm,
En voor staafdeel CD: $T_W = 10 \cdot 1 = 10$ kNm

Opdracht 2

Analyse
Balk ABC is een ligger op drie steunpunten. De reactiekracht in B werkt excentrisch op de balk en veroorzaakt een wringend moment in de balk. Omdat de ligger symmetrisch is ten opzichte van B zal het wringend moment gelijk verdeeld worden over de twee delen.

De reactiekracht

$$B_V = 2 \cdot \tfrac{5}{8} \cdot 3 \cdot 30 = 112{,}5 \text{ kN.}$$

Het moment van de reactiekracht ten opzichte van de liggeras:

$$T = 112{,}5 \cdot 0{,}4 = 45 \text{ kNm}$$

Dit veroorzaakt in beide liggerdelen een wringend moment:

$$T_{W,AB} = -T_{W,BC} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ kNm}$$

Het minteken geeft aan dat het wringend moment in liggerdeel BC tegengesteld werkt aan wringend moment in deel AB.

Opdracht 3

Analyse
Het betreft hier steeds een rond profiel met dezelfde uitwendige diameter. De bedoeling is om na te gaan wat het verschil is tussen een massieve staaf en een buisprofiel.

a $I_W = I_P = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 50^4 = 9\,817\,477 \text{ mm}^4$

$$\tau_W = \frac{T_W \cdot R}{I_W} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 50}{9\,817\,477} = 509{,}2 \text{ N/mm}^2$$

b $I_W = I_P = \frac{\pi}{2} \cdot (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} \cdot (50^4 - 25^4) = 9\,203\,884 \text{ mm}^4$

$$\tau_W = \frac{T_W \cdot R}{I_W} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 50}{9\,203\,884} = 543{,}2 \text{ N/mm}^2$$

c De spanning wordt verdubbeld, dus het traagheidsmoment I_W wordt gehalveerd.

$$I_{W,\text{buis}} = \tfrac{1}{2} \cdot I_{W,\text{massief}}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot (R^4 - r^4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^4$$

$$(R^4 - r^4) = \tfrac{1}{2} \cdot R^4$$

$$r^4 = \tfrac{1}{2} \cdot R^4 \;\rightarrow\; r = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot R = 0{,}8409 \cdot R$$

De wanddikte is dus:
$d = R - r = R - 0{,}84 \cdot R = 0{,}16 \cdot R = 0{,}16 \cdot 50 = 8$ mm

Opdracht 4

De exacte formule kan worden herschreven tot:

$$I_{P,\text{exact}} = \frac{\pi}{2} \cdot (4 \cdot R^3 \cdot d - 6 \cdot R^2 \cdot d^2 + 4 \cdot R \cdot d^3 - d^4)$$

De benaderingsformule bevat alleen de eerste term:

$$I_{P,\text{benaderd}} = \frac{\pi}{2} \cdot (4 \cdot R^3 \cdot d)$$

Omdat R veel groter is dan d zal de som van de weggelaten termen negatief zijn. De benaderde waarde is dus groter dan de exacte waarde. De voorwaarde wordt nu:

$$I_{\text{P, benaderd}} \leq 1{,}03 \cdot I_{\text{P, exact}}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot (4 \cdot R^3 \cdot d) \leq 1{,}03 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot (4 \cdot R^3 \cdot d - 6 \cdot R^2 \cdot d^2 + 4 \cdot R \cdot d^3 - d^4)\right]$$

$$\frac{1}{1{,}03} \cdot (4 \cdot R^3 \cdot d) \leq (4 \cdot R^3 \cdot d - 6 \cdot R^2 \cdot d^2 + 4 \cdot R \cdot d^3 - d^4)$$

Met $d = \alpha \cdot R$ ontstaat de formule:

$$3{,}883 \cdot \alpha \cdot R^4 \leq 4 \cdot \alpha \cdot R^4 - 6 \cdot \alpha^2 \cdot R^4 + 4 \cdot \alpha^3 \cdot R^4 - \alpha^4 R^4$$

$$0{,}117\alpha - 6 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \alpha^3 - \alpha^4 \geq 0$$

Met computeralgebra of een geavanceerde rekenmachine kan deze ongelijkheid worden opgelost.
De uitkomst is: $0 \leq \alpha \leq 0{,}02$

Als de wanddikte meer is dan 2% van de straal van de buis is de afwijking van de benadering meer dan 3%.

Alternatieve berekening
Programmeer in een spreadsheet de exacte formule en de benaderingsformule en bereken de verhouding. Dit kan als volgt:
Neem een vaste waarde voor R (100 mm).
Plaats in kolom 1 de wanddikte (dit is de variabele in de berekening).
Programmeer in kolom 2 de exacte formule met kolom 1 als variabele.
Programmeer in kolom 3 de benaderingsformule met kolom 1 als variabele.
Programmeer in kolom 4 de verhouding tussen benadering en exact, dus kolom 3 gedeeld door kolom 2.
Kopieer deze formules een aantal rijen naar beneden.
Vul in kolom 1 nu waarden in voor de wanddikte d, en ga na bij welke waarden van d de verhouding tussen exact en benadering tussen 0,97 en 1,03 blijft.

Opdracht 5

a De schuifstroom is onafhankelijk van de wanddikte:

$$S = \frac{T_W}{2.A_i} = \frac{100 \cdot 10^6}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 250^4} = 1018{,}6 \text{ N/mm}$$

$$\tau_W = \frac{S}{d} = \frac{1018{,}6}{d} \leq 135 \text{ N/mm}^2 \;\rightarrow\; \text{d} \geq 7{,}5 \text{ mm}$$

Opdracht 6

a Met $l = 100$ kan de inwendige oppervlakte worden benaderd met:

$A_i = \pi \cdot 100^2 + 100 \cdot 200 = 51\,416 \text{ mm}^2$

De schuifstroom wordt dan:

$$S = \frac{T_W}{2 \cdot A_i} = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot 51\,416} = 1945 \text{ N/mm}$$

De schuifspanning in de buis wordt:

$$\tau_{W,\text{buis}} = \frac{S}{d_{\text{buis}}} = \frac{1945}{5} = 389 \text{ N/mm}^2.$$

Deze waarde wordt niet beïnvloed door de dikte van de plaat. De maximale schuifspanning kan dus niet worden verlaagd door de plaat dikker te maken.

b Met een plaatdikte van 10 mm zal de schuifspanning in het ronde deel maatgevend zijn.

$$A_i = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot \tau_W} = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 150} = 133\,333 \text{ mm}^2$$

$$A_i = \pi \cdot 100^2 + l \cdot 200 = 133\,333 \;\rightarrow\; l = 510 \text{ mm}$$

Opdracht 7

a $A_i = 130 \cdot 280 = 36\,400 \text{ mm}^2$

$$\tau_W = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i i} = \frac{10 \cdot 10^6}{2 \cdot 20 \cdot 36\,400} = 6{,}87 \text{ N/mm}^2$$

b $A_i = 190 \cdot 160 = 30\,400 \text{ mm}^2$

$$\tau_W = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i} = \frac{10 \cdot 10^6}{2 \cdot 10 \cdot 30\,400} = 16{,}45 \text{ N/mm}^2$$

Opdracht 7a

a $A_i \approx 4000 \cdot 7000 = 28 \cdot 10^6\ \text{mm}^2$

$d_{\text{min}} = 200\ \text{mm}$

$T_W = 4 \cdot 100 = 400\ \text{kNm}$

$$\tau_{W,\text{max}} = \frac{T_W}{2 \cdot d_{\text{min}} \cdot A_i} = \frac{400 \cdot 10^6}{2 \cdot 200 \cdot 28 \cdot 10^6} = 0{,}036\ \text{N/mm}^2$$

b Deze vraag kan pas na bestudering van hoofdstuk 3 worden beantwoord.
Het wringingstraagheidsmoment kan worden berekend met:

$$I_W = \beta[(b \cdot h^3)_{\text{uitw.}} - (b \cdot h^3)_{\text{inw.}}] = 0{,}214[(7 \cdot 4^3) - (6{,}2 \cdot 3{,}5^3)] = 38{,}99\ \text{m}^4$$

waarbij β gevonden kan worden in tabel 8.1.

Voor de verdraaiing geldt de formule: $\phi = \dfrac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W}$

Voor de wringstijfheid geldt dus:

$$\textit{Wringstijfheid} = \frac{\phi}{T_W} = \frac{l}{G \cdot I_W} = \frac{l}{50 \cdot 38{,}99} = \frac{l}{1950}\ \frac{1}{\text{kNm}}$$

Opdracht 8

a $\dfrac{h}{b} = \dfrac{200}{10} = 20 \rightarrow \alpha = 0{,}333 \rightarrow W_W = 0{,}333 \cdot 10^3 \cdot 200 = 66\,600\ \text{mm}^3$

$$\tau_W = \frac{5 \cdot 10^6}{66\,600} = 75{,}1\ \text{N/mm}^2$$

b $\dfrac{h}{b} = \dfrac{100}{20} = 5 \rightarrow \alpha = 0{,}291 \rightarrow W_W = 0{,}291 \cdot 20^3 \cdot 100 = 232\,800\ \text{mm}^3$

$$\tau_W = \frac{5 \cdot 10^6}{232800} = 21{,}5\ \text{N/mm}^2$$

c $\dfrac{h}{b} = \dfrac{50}{40} = 1{,}25 \rightarrow \alpha = 0{,}221 \rightarrow W_W = 0{,}221 \cdot 40^3 \cdot 50 = 707\,200\ \text{mm}^3$

$$\tau_W = \frac{5 \cdot 10^6}{707\,200} = 7{,}07\ \text{N/mm}^2$$

Opdracht 9

De figuren a, b en c zijn samengestelde profielen. De berekening van het toelaatbare moment luidt als volgt:

$$I_W = \sum \beta \cdot b^3 \cdot h$$

$$T_{W,\,toelaatbaar} = \frac{\tau_{W,\,toelaatbaar} \cdot I_W}{b_{max}}$$

Figuur a:

$$I_W = 0{,}291 \cdot 40^3 \cdot 200 + 0{,}320 \cdot 20^3 \cdot 260 = 4\,390\,400 \text{ mm}^4$$

$$T_{W,\,toelaatbaar} = \frac{100 \cdot 4\,390\,400}{40} \cdot 10^{-6} = 10{,}97 \text{ kNm}$$

Figuur b:

$$I_W = 2 \cdot 0{,}312 \cdot 20^3 \cdot 200 + 0{,}320 \cdot 20^3 \cdot 260 = 1\,664\,000 \text{ mm}^4$$

$$T_{W,\,toelaatbaar} = \frac{100 \cdot 1\,664\,000}{20} \cdot 10^{-6} = 8{,}32 \text{ kNm}$$

Figuur c:

$$I_W = 2 \cdot 0{,}312 \cdot 20^3 \cdot 200 + 0{,}333 \cdot 10^3 \cdot 260 + 2 \cdot 0{,}320 \cdot 10^3 \cdot 130 = 1\,168\,180 \text{ mm}^4$$

$$T_{W,\,toelaatbaar} = \frac{100 \cdot 1\,168\,180}{20} \cdot 10^{-6} = 5{,}82 \text{ kNm}$$

Figuur d is een kokerprofiel.

$$T_W = \tau_W \cdot 2 \cdot d \cdot A_i = 100 \cdot 2 \cdot 10 \cdot (190 \cdot 280) \cdot 10^{-6} = 106{,}4 \text{ kNm}$$

Opdracht 10

a Nabij de oplegging is het buigende moment nul, en werken er een dwarskracht en een wringend moment in de doorsnede. De wringspanning is overal in de doorsnede gelijk, omdat de schuifstroom en de wanddikte overal gelijk zijn. De dwarskracht veroorzaakt de maximale schuifspanning ter plaatse van de y-as. Daar waar de spanningen in dezelfde richting werken ontstaat de maximale spanning. Met Huber-Hencky kan daar de ideële spanning worden berekend.

$$\tau_V = \frac{V \cdot S}{b \cdot I} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 176\,000}{(2 \cdot 10) \cdot 1348 \cdot 10^6} = 9{,}8 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_W = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i} = \frac{15 \cdot 10^6}{2 \cdot 10 \cdot (140 \cdot 90)} = 59{,}5 \text{ N/mm}^2$$

Maximale schuifspanning:

$$\tau = \tau_W + \tau_V = 59{,}5 + 9{,}8 = 69{,}3 \text{ N/mm}^2$$

Ideële spanning:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot 69{,}3^2} = 120 \text{ N/mm}^2$$

b Nabij de middendoorsnede zijn de dwarskracht en het wringende moment hetzelfde als bij de oplegging. Nu werkt er echter ook een moment in de doorsnede. De maatgevende combinatie van buig- en schuifspanning zal optreden in twee diagonaal gelegen hoekpunten (Ga dit na door de spanningsfiguren voor dwarskracht, wringing en buiging te tekenen). Omdat het schuifspanningverloop door dwarskracht in de hoeken een onduidelijk verloop heeft wordt de berekening uitgevoerd in een punt langs de bovenrand op 10 mm vanaf de zijkant. Het statisch moment van het afgeschoven deel is dan:

$$S = 80 \cdot 10 \cdot 95 = 76\,000 \text{ mm}^3$$

De afzonderlijke spanningen zijn daar:

$$\tau_V = \frac{V \cdot S}{b \cdot I} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 76\,000}{(2 \cdot 10) \cdot 1348 \cdot 10^6} = 4{,}23 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_W = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i} = \frac{15 \cdot 10^6}{2 \cdot 10 \cdot (140 \cdot 90)} = 59{,}5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{45 \cdot 10^6 \cdot 75}{1348 \cdot 10^4} = 250{,}4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{250{,}4 + 3 \cdot (59{,}5 + 4{,}2)^2}$$
$$= 273{,}6 \text{ N/mm}^2$$

Opdracht 11

a De doorsnede wordt genomen in het deel AB waarbij de afstand tot B nihil is. Er werken in die doorsnede:
- Een normaalkracht van 5 kN
- Een dwarskracht van 10 kN
- Een buigend moment van 5 kNm
- Een wringend moment van 10 kNm

Voor het berekenen van de spanningen zijn de volgende doorsnedengrootheden nodig:
- Oppervlakte van de doorsnede:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (75^2 - 67^2) = 3569 \text{ mm}^2$$

- Traagheidsmoment:

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4} \cdot (75^4 - 67^4) = 902 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Wringingstraagheidsmoment:

$$I_W = I_P = I_y + I_z = \ = 2 \cdot 902 \cdot 10^4 = 1804 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Statisch moment van de halve doorsnede ten opzichte van de middellijn:

$$S = \tfrac{2}{3}(R^3 - r^3) = \tfrac{2}{3}(75^3 - 67^3) = 80\,741 \text{ mm}^3$$

- Oppervlakte van de doorsnede binnen de hartlijn:

$$A_i = \pi \cdot \left(\frac{R + r}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{75 + 67}{2}\right)^2 = 15\,837 \text{ mm}^2$$

- De maximale spanningen ten gevolge van de verschillende belastingen zijn:

Dwarskracht: $\tau_V = \dfrac{V \cdot S}{b \cdot I} = \dfrac{10\,000 \cdot 80\,741}{16 \cdot 902 \cdot 10^4} = 5{,}59 \text{ N/mm}^2$

Wringend moment: $\tau_W = \dfrac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i} = \dfrac{10 \cdot 10^6}{2 \cdot 8 \cdot 15\,837} = 39{,}46 \text{ N/mm}^2$

Normaalkracht: $\sigma_N = \dfrac{N}{A} = \dfrac{5000}{3569} = 1{,}40 \text{ N/mm}^2$

Buigend moment: $\sigma_B = \dfrac{M \cdot y}{I_z} = \dfrac{5 \cdot 10^6 \cdot 75}{902 \cdot 10^4} = 41{,}57 \text{ N/mm}^2$

In onderstaand schema zijn de spanningen op de verschillende plaatsen gecombineerd:

	Links	rechts	boven	onder
Dwarskracht	5,59	5,59	0	0
Wringing	−39,46	39,46	−39,46	39,46
Normaalkracht	−1,40	−1,40	−1,40	−1,40
Buiging	41,57	−41,57	0	0
Schuifspanning	33,87	44,95	39,46	39,46
Normaalspanning	40,07	42,97	1,40	1,40
Ideële spanning	71,0	88,9	68,4	68,4

b Gezien de spanningsverdeling is de ideële spanning rechts de maximale spanning.

c Nabij punt A werken dezelfde inwendige krachten op de doorsnede. De kracht van 10 kN veroorzaakt nu ook een moment van 30 kNm. De maximale spanning ten gevolge van dit moment bedraagt: 249,42N/mm^2 in de uiterste vezels op de verticale as. Het schema ziet er dan als volgt uit:

	Links	rechts	boven	onder
Dwarskracht	5,59	5,59	0	0
Wringing	−39,46	39,46	−39,46	39,46
Normaalkracht	−1,40	−1,40	−1,40	−1,40
Buiging	41,57	−41,57	249,42	−249,42
Schuifspanning	33,87	44,95	39,46	39,46
Normaalspanning	40,07	42,97	248,02	250,82
Ideële spanning	71,0	88,9	257,3	260,0

d De doorsnede wordt nu op dubbele buiging belast. Voor het berekenen van de maximale buigspanning dienen de momenten te worden samengesteld:

$$M_{\text{max}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{30^2 + 5^2} = 30{,}41 \text{ kNm}$$

De maximale buigspanning wordt dan:

$$\sigma_{\text{b, max}} = \frac{30{,}41}{30} \cdot 249{,}42 = 252{,}86 \text{ N/mm}^2$$

Omdat de buigingsas nu niet precies overeenkomt met de y-as zal er ter plaatse van de maximale buigspanning ook een dwarskrachtspanning heersen, schat deze waarden op 1 N/mm^2. De schuifspanning is dan: 40,5 N/mm^2, de normaalspanning 254,3 N/mm^2. De maximale ideële spanning wordt dan:

$$\sigma_{\text{i, max}} = \sqrt{254{,}3^2 + 3 \cdot 40{,}5^2} = 263{,}8 \text{ N/mm}^2$$

Opdracht 12

De formule voor de verdraaiing ten gevolge van wringing luidt:

$$\phi = \frac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W}$$

$$I_W = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(150^4 - 140^4) = 19\,178 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

a $\phi = \dfrac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W} = \dfrac{60 \cdot 10^6 \cdot 6000}{81\,000 \cdot 19\,178 \cdot 10^4} = 0{,}0232 \text{ rad}$

b Nu neemt het wringend moment af met de afstand tot de inklemming. De verdraaiing is recht evenredig met het moment, dus kan de torsiehoek worden bepaald met het gemiddelde moment.

$$\phi = \frac{T_{W,\,\text{gemiddeld}} \cdot l}{G \cdot I_W} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 6000}{81\,000 \cdot 19\,178 \cdot 10^4} = 0{,}0116 \text{ rad}$$

c Het wringingstraagheidsmoment van het dikke deel is:
$I_W = 86\,431 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$$\begin{aligned}\phi &= \sum \frac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W} \\ &= \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 3000}{81\,000 \cdot 19\,178 \cdot 10^4} + \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 3000}{81\,000 \cdot 86\,431 \cdot 10^4} \\ &= 0{,}0142 \text{ rad}\end{aligned}$$

d De verdraaiing is lineair afhankelijk van het torsiemoment.
De invloeden van de verschillende momenten kunnen dus gesuperponeerd worden.

$$\begin{aligned}\phi &= \sum \frac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W} \\ &= \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 6000}{81\,000 \cdot 19\,178 \cdot 10^4} - \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 2000}{81\,000 \cdot 19\,178 \cdot 10^4} \\ &= 0{,}0077 \text{ rad}\end{aligned}$$

Opdracht 13

Lengte balk ABC: 3 m
Lengte console BD: 1 m

Uit tabel 8.1 blijkt dat voor deze balk geldt: $\beta = 0{,}229$

Het traagheidsmoment tegen wringing is:

$$I_{\mathrm{W}} = \beta \cdot b^3 \cdot h = 0{,}229 \cdot 100^3 \cdot 200 = 4580 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Het wringend moment in de balkdelen is:

$$T_{\mathrm{W}} = \frac{0{,}3 \cdot 5}{2} = 0{,}75 \text{ kNm}$$

De verdraaiing van punt C is:

$$\phi_{\mathrm{C}} = \frac{T_{\mathrm{W}} \cdot l}{G \cdot I_{\mathrm{W}}} = \frac{0{,}75 \cdot 10^6 \cdot 1500}{700 \cdot 4580 \cdot 10^4} = 0{,}0351 \text{ rad}$$

De zakking van punt d is dan: $\delta_{\mathrm{D}} = \phi_{\mathrm{C}} \cdot l = 0{,}0351 \cdot 1000 = 35{,}1$ mm

Opdracht 14

Voor het berekenen van het wringingstraagheidsmoment geldt de formule:

$$I_{\mathrm{W},\phi} = \nu \cdot \sum \beta \cdot b^3 \cdot h$$

Met ν uit tabel 8.3 en β uit tabel 8.1

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{W},\phi} = 1{,}30 \cdot (&0{,}307 \cdot 8^3 \cdot 80 + 0{,}333 \cdot 4^3 \cdot 100 \\ &+ 0{,}246 \cdot 20^3 \cdot 40) = 121\,454 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

De verdraaiing van de top is dan:

$$\phi = \frac{T_{\mathrm{W}} \cdot l}{G \cdot I_{\mathrm{W},\phi}} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 3000}{81\,000 \cdot 121\,454} = 1{,}52 \text{ rad}$$

Opdracht 15

Een ligger op twee steunpunten, aan de einden gesteund tegen torsie. De torsiestijfheid van een liggerdeel wordt berekend met:

$$\textit{torsiestijfheid} = \frac{T_W}{\phi} = \frac{T_W}{\dfrac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W}} = \frac{G \cdot I_W}{l}$$

Voor deel AB is dit: $\dfrac{G \cdot I_W}{3}$ en voor BC: $\dfrac{G \cdot I_W}{1}$. De torsiestijfheid van deel BC is dus drie keer zo groot als die van AB. Deel BC zal dan ook drievierde deel van het wringende moment opnemen en AB één-vierde deel.

Uit de V-, M- en T-lijnen blijkt dat de doorsnede direct rechts van B de zwaarst belaste is met $V = 7{,}5$ kN, $M = 7{,}5$ kNm en $M_W = 7{,}5$ kNm.

Bij opgave 10 is berekend dat: $I_y = 1348 \cdot 10^4$ mm^4 en $S_{\text{halve doorsn}} = 176\,000$ mm^3.

De maximale spanningen ten gevolge van de afzonderlijke belastingen zijn:

– Dwarskracht: $\tau_V = \dfrac{V \cdot S}{b \cdot I} = \dfrac{7500 \cdot 176\,000}{20 \cdot 1348 \cdot 10^4} = 4{,}90$ N/mm^2

– Wringend moment:

$$\tau_W = \frac{T_W}{2 \cdot d \cdot A_i} = \frac{7{,}5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10 \cdot (90 \cdot 140)} = 29{,}76 \text{ N/mm}^2$$

– Buigend moment: $\sigma_B = \dfrac{M \cdot z}{I_y} = \dfrac{7{,}5 \cdot 10^6 \cdot 75}{1348 \cdot 10^4} = 41{,}73$ N/mm^2

Het punt waar de ideële spanning het grootst is, is een hoekpunt. Kies voor de berekening het punt op de bovenrand in het verlengde van de binnenzijkant. De wringspanning en buigspanning zijn hier maximaal. De dwarskrachtspanning is hier:

$$\tau_V = \frac{V \cdot S}{b \cdot I} = \frac{7500 \cdot (80 \cdot 10 \cdot 70)}{20 \cdot 1348 \cdot 10^4} = 1{,}56 \text{ N/mm}^2,$$

en de ideële spanning:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{41{,}73^2 + 3 \cdot (1{,}56 + 29{,}76)^2}$$
$$= 68{,}44 \text{ N/mm}^2$$

Opdracht 16

Voor de berekening zijn de volgende doorsnedengrootheden van belang:

Koker: $I_y = \frac{1}{12}(100 \cdot 200^3 - 80 \cdot 180^3) = 5202 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$I_W = 0{,}229 \cdot (100^3 \cdot 200 - 80^3 \cdot 180) = 2470 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

IPE160: $I_y = 869 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Elasticiteitsmodulus van staal: $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

a Als de verbindingen zijn uitgevoerd als scharnieren worden de consoles op buiging belast. De krachten van de balk op de consoles zijn $2{,}5 \cdot q$ kN.

De zakking van de console is:

$$\delta_c = \frac{F \cdot l^3}{3\ EI} = \frac{2500 \cdot q \cdot 2000^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 5202 \cdot 10^4} = 0{,}61 \cdot q$$

De doorbuiging van de balk:

$$\delta_b = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI} = \frac{5 \cdot q \cdot 5000^4}{384 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 869 \cdot 10^4} = 4{,}46 \cdot q$$

De totale zakking mag 15 mm zijn , dus:

$$(0{,}61 + 4{,}46) \cdot q = 15 \;\rightarrow\; q = \frac{15}{5{,}07} = 2{,}96 \text{ N/mm} = 2{,}96 \text{ kN/m}$$

b Als de verbindingen momentvast zijn uitgevoerd, worden de consoles ook op wringing belast. Het wringende moment in de consoles is ook het inklemmingsmoment voor de balk. De consoles zullen een torsievervorming ondergaan, dus de inklemming van de balk is niet volledig. De verdraaiing van de balkeinden zal gelijk zijn aan de torsiehoek van de consoles. Met deze aansluitvoorwaarde is het moment in de verbindingen te berekenen.
Kies het inklemmingsmoment als onbekende (M). De verdraaiing van de balkeinden is dan:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{rechts}} &= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_y} - \frac{M_{\text{links}} \cdot l}{6 \cdot EI_y} - \frac{M_{\text{rechts}} \cdot l}{3 \cdot EI_y} \\ &= \frac{q \cdot 5000^3}{24 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 869 \cdot 10^4} - \frac{M \cdot 5000}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 869 \cdot 10^4} \\ &= 2{,}854 \cdot 10^{-3} \cdot q - 1{,}370 \cdot 10^{-9}\, M\end{aligned}$$

De torsievervorming van de console is:

$$\phi = \frac{T_W \cdot l}{G \cdot I_W} = \frac{M \cdot 2000}{81\,000 \cdot 2470 \cdot 10^4} = 9{,}997 \cdot 10^{-10}\, M$$

Gelijkstellen levert:

$$9{,}997 \cdot 10^{-10} \cdot M = 2{,}854 \cdot 10^{-3} \cdot q - 1{,}370 \cdot 10^{-9}\, M$$

$$2{,}370 \cdot 10^{-9} \cdot M = 2{,}854 \cdot 10^{-3} \cdot q$$

$$M = 1{,}20 \cdot 10^6 \cdot q \text{ N/mm} = 1{,}20 \cdot q \text{ kNm}$$

De doorbuiging van de balk wordt:

$$\begin{aligned} \delta_b &= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI} - \frac{M \cdot l^2}{8 \cdot EI} \\ &= 4{,}46 \cdot q - \frac{1{,}20 \cdot 10^6 \cdot q \cdot 5000^2}{8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 869 \cdot 10^4 4} \\ &= (4{,}46 - 2{,}05) \cdot q = 2{,}41 \cdot q \text{ mm} \end{aligned}$$

De totale zakking:

$$\delta = \delta_b + \delta_c = (2{,}41 + 0{,}61) \cdot q = 3{,}02 \cdot q \text{ mm}$$

De toelaatbare belasting is:

$$3{,}02 \cdot q = 15 \;\rightarrow\; q = 5{,}0 \text{ N/mm} = 5{,}0 \text{ kN/m}$$

$$M_W = 1{,}20 \cdot q = 1{,}20 \cdot 5 = 6 \text{ kNm}$$

$$M = 2{,}5 \cdot q \cdot 2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ kNm}$$

$$V = 2{,}5 \cdot q = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5 \text{ kN}$$

Met deze gegevens is de maximale ideële spanning te berekenen als in opgave 15.

De uitkomst is: $\sigma_i = 61{,}34 \text{ N/mm}^2$