drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1
Zesde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 5 Functieonderzoek: toepassing van de differentiaalrekening

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 5, paragraaf 5.8

1 We bepalen de afgeleide van *f*.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \text{ geeft } f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

Nulpunten van *f*.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 1 \vee x = 3$$

De grafiek van $y = f'(x)$ is een dalparabool. $y = f'(x)$´is dus positief tussen de nulpunten en negatief als $x < 1$ of als $x > 3$. Dit betekent dat de functie $y = f(x)$ stijgend is voor $x < 1 \vee x > 3$ en dalend voor $1 < x < 3$

2a $y = f(t) = \dfrac{(t-1)(2-t)}{t^2}, t \in [1,3]$

Domein

Op het gegeven interval is *f* overal gedefinieerd, dus: domein $1 \leq t \leq 3$;

Verticale asymptoten:

f is op het gehele interval $[1,3]$ gedefinieerd, dus er zijn geen verticale asymptoten.

Snijpunten met de coördinaatassen.

Snijpunt(en) met *t*-as . We lossen op: $f(t) = 0$.

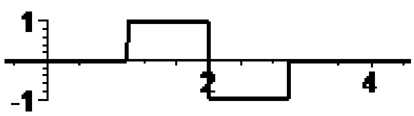
$$f(t) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{(t-1)(2-t)}{t^2} = 0 \Rightarrow$$
$$(t-1)(2-t) = 0 \wedge t^2 \neq 0 \Rightarrow$$
$$t = 1 \vee t = 2$$

Dus 2 snijpunten met de *t*-as: $(1,0)$ en $(2,0)$.

Snijpunt met de *y*-as. Omdat 0 niet tot het domein van *f* behoort is er geen snijpunt met de *y*-as.

Tekenoverzicht

De nulpunten van *f* zijn hierboven bepaald. De noemer is op het domein nergens gelijk aan 0. Bovendien is de noemer nergens negatief. Het teken wordt dus volledig bepaald door de teller. Hieronder staat het tekenoverzicht (een lijntje boven de as betekent dat het teken positief is; onder de as betekent negatief).



Symmetrie-eigenschappen.

De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:
Omdat er sprake is van een begrensd domein kan *t* niet tot $-\infty$ en ook niet tot $+\infty$ naderen. Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van *f*. Daarvoor herschrijven we de teller.

$$f(t) = \frac{(t-1)(2-t)}{t^2} = \frac{-t^2+3t-2}{t^2} \Rightarrow$$

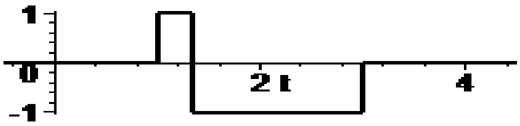
$$f'(t) = \frac{t^2\cdot(-2t+3)-\left(-t^2+3t-2\right)\cdot 2t}{t^4}$$

$$= \frac{t\cdot(-2t+3)-\left(-t^2+3t-2\right)\cdot 2}{t^3}$$

$$= \frac{-2t^2+3t+2t^2-6t+4}{t^3} = \frac{4-3t}{t^3}$$

Het nulpunt van f' is (los op: teller=0): $t=\frac{4}{3}$

Op het domein wisselt *f* alleen van teken voor $t=\frac{4}{3}$.
Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $1 \le t < \frac{4}{3}$ (f' is daar positief);

f is dalend voor $\frac{4}{3} < t \le 3$ (f' is daar negatief);

Er is een maximum $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{8}$ voor $x=\frac{4}{3}$.

Randextremen; twee randminima: $f(1)=0$ voor $t=1$ en $f(3)=-\frac{2}{9}$ voor $t=3$;

Convex/concaaf en buigpunten
We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

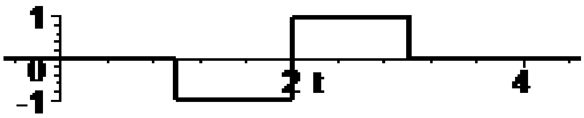
$$f'(t) = \frac{4-3t}{t^3} \Rightarrow$$

$$f''(t) = \frac{t^3\cdot(-3)-(4-3t)\cdot 3t^2}{t^6}$$

$$= \frac{t\cdot(-3)-(4-3t)\cdot 3}{t^4}$$

$$= \frac{-3t-12+9t}{t^4} = \frac{6t-12}{t^4}$$

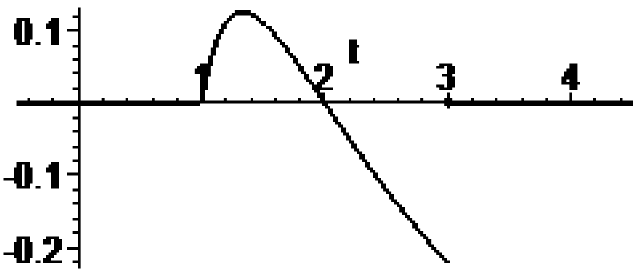
nulpunt van f'': $t=2$
tekenoverzicht van f'':



de grafiek van f is dus convex voor $2 < t \le 3$ (f'' is daar positief);

de grafiek van f is dus concaaf voor $1 \le t < 2$ (f'' is daar negatief);
Er is een concaaf-convex (hol-bol) buigpunt, nl. $(2,0)$.

Tekening van de grafiek



Bereik
Het bereik kan nu worden afgelezen: $-\frac{2}{9} \le y \le \frac{1}{8}$

2b $u = f(z) = \dfrac{|z|}{|z| + 2}$

Domein:
Omdat de noemer voor geen enkele waarde van z gelijk wordt aan 0 geldt: domein= ;

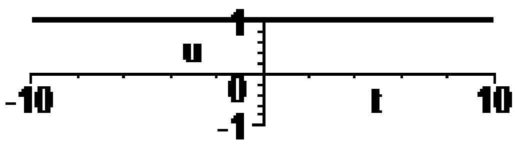
Verticale asymptoten: f is voor alle waarden van z gedefinieerd; er zijn dus geen verticale asymptoten.

Snijpunten met de coördinaatassen.
Snijpunt(en) met z-as . We lossen op: $f(z) = 0$.

$$f(z) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{|z|}{|z| + 2} = 0 \Rightarrow$$
$$|z| = 0 \wedge |z| + 2 \ne 0 \Rightarrow$$
$$z = 0$$

Dus één snijpunt met de z-as: $(0,0)$.
Omdat $f(0) = 0$ is $(0,0)$ ook het snijpunt met de u-as.

Tekenoverzicht
Omdat zowel teller als noemer van f nooit negatief zijn, is het teken van f steeds positief, behalve waar f een nulpunt heeft.



Symmetrie-eigenschappen.
Er geldt: $f(-z) = \dfrac{|-z|}{|-z| + 2} = \dfrac{|z|}{|z| + 2} = f(z)$.
De grafiek is dus symmetrisch in de u-as. De functie is een even functie.

Horizontale asymptoten:
We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{|z|}{|z|+2} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z+2} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

De horizontale lijn met vergelijking $u = 1$ is dus horizontale asymptoot naar rechts.

$$\lim_{z\to-\infty} f(z) = \lim_{z\to-\infty} \frac{|z|}{|z|+2} = \lim_{z\to-\infty} \frac{-z}{-z+2} = \lim_{z\to-\infty} \frac{-1}{-1+\frac{2}{z}} = \frac{-1}{-1+0} = 1$$

De horizontale lijn met vergelijking $u = 1$ is dus ook horizontale asymptoot naar links.

Stijgend/dalend; extreme waarden

We bepalen eerst de afgeleide van *f*. We herschrijven het voorschrift zonder absolute waarde.

$$f(z) = \frac{|z|}{|z|+2} = \begin{cases} \dfrac{z}{z+2} & \text{voor } z \geq 0 \\ \dfrac{-z}{-z+2} & \text{voor } z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z}{z+2} & \text{voor } z \geq 0 \\ \dfrac{z}{z-2} & \text{voor } z < 0 \end{cases}$$

Nu differentiëren we:

$$f'(z) = \begin{cases} \dfrac{(z+2)\cdot 1 - z\cdot 1}{(z+2)^2} & \text{voor } z > 0 \\ \dfrac{(z-2)\cdot 1 - z\cdot 1}{(z-2)^2} & \text{voor } z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{(z+2)^2} & \text{voor } z > 0 \\ \dfrac{-2}{(z-2)^2} & \text{voor } z < 0 \end{cases}$$

De functie *f* is niet differentieerbaar voor $z = 0$

Aan het voorschrift van de afgeleide zien we dat deze negatief is voor $z < 0$ en positief voor $z > 0$. Bedenk daarbij dat de noemer een kwadraat is en dus steeds positief is. Dit betekent dat *f* dalend is voor $z < 0$ en stijgend voor $z > 0$. De functie heeft dus een minimum voor $z = 0$. De waarde van dit minimum is $f(0) = 0$.

Convex/concaaf en buigpunten

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(z+2)^2} & \text{voor } z > 0 \\ \dfrac{-2}{(z-2)^2} & \text{voor } z < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(z+2)^{-2} & \text{voor } z > 0 \\ -2(z-2)^{-2} & \text{voor } z < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(z) = \begin{cases} -4(z+2)^{-3} & \text{voor } z > 0 \\ 4(z-2)^{-3} & \text{voor } z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-4}{(z+2)^3} & \text{voor } z > 0 \\ \dfrac{4}{(z-2)^3} & \text{voor } z < 0 \end{cases}$$

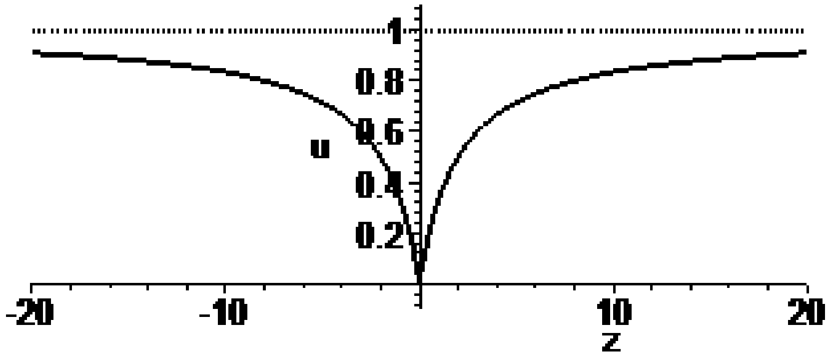
Voor $z < 0$ is f'' negatief omdat de noemer negatief is en de teller (4) positief.

Voor $z > 0$ is f'' negatief omdat de noemer positief is en de teller (-4) ook negatief.

Voor $z = 0$ bestaat f'' niet. Voor $z \neq 0$ is de grafiek dus concaaf (hol).

Voor $z \neq 0$ is f'' negatief. Er is dus geen tekenwisseling van de tweede afgeleide en daarom ook geen buigpunt.

Tekening van de grafiek



Bereik

Uit de grafiek lezen we het bereik af: $[0,1\rangle$, oftewel $0 \le u < 1$.

2c $z = f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

Domein:

Alleen voor $x = 0$ bestaat de functiewaarde niet. Dus: domein= $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$;

Verticale asymptoten:

De enige kandidaat voor een verticale asymptoot is $x = 0$.

We bepalen de benodigde limiet.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + \infty = \infty$$

De lijn $x = 0$ is dus de enige verticale asymptoot.

Snijpunten met de coördinaatassen.

Snijpunt(en) met *z*-as . We lossen op: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$$

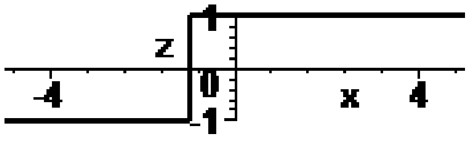
Dus één snijpunt met de *t*-as: $(-1,0)$.

Omdat $f(0)$ niet bestaat is er geen snijpunt met de *z*-as.

Tekenoverzicht

f heeft een nulpunt voor $x = -1$ en bestaat niet voor $x = 0$.

Het tekenoverzicht ziet er zo uit.



Symmetrie-eigenschappen.

De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen

Horizontale asymptoten:

We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = (\infty + 0) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) = (-\infty+0) = -\infty$$

Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden

We bepalen de afgeleide van *f*.

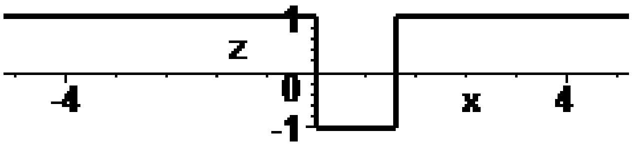
$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 - 2x^{-3} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

We berekenen de nulpunten van f'.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2}{x^3} \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

We maken een tekenoverzicht van de eerste afgeleide.



De functie is stijgend voor $x < 0 \vee x > \sqrt[3]{2}$ en dalend voor $0 < x < \sqrt[3]{2}$;
Er treedt tekenwisseling op bij $x = 0$ en bij $x = \sqrt[3]{2}$.
Bij $x = 0$ bestaat de functiewaarde niet (er is daar zelfs een verticale asymptoot), dus kan er ook geen extreme waarde optreden.

Er is een minimum $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1{,}89$ voor $x = \sqrt[3]{2}$

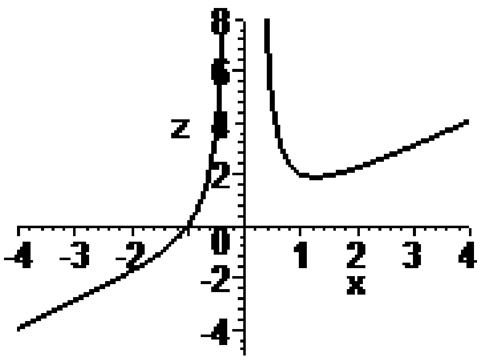
Convex/concaaf en buigpunten

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

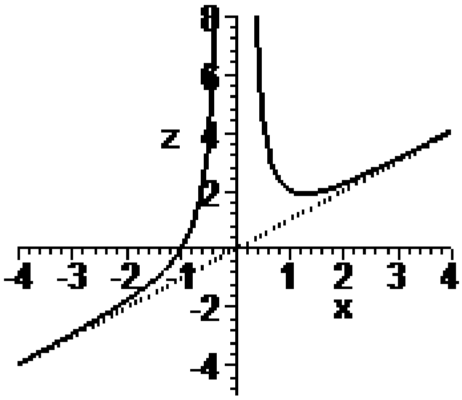
$$f'(x) = 1 - 2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

f'' bestaat niet voor $x = 0$. Verder is f'' steeds positief . De grafiek is op het bereik van f steeds convex (bol). Er zijn geen buigpunten.

Tekening van de grafiek



Opmerking: Voor sterk positieve en sterk negatieve waarden van *x* nadert de grafiek tot de rechte lijn met vergelijking $z = x$. Dit komt omdat $\frac{1}{x^2}$ tot 0 nadert als *x* sterk positieve of sterk negatieve waarden aanneemt. $f(x)$ nadert dan tot *x*. In onderstaand plaatje is deze zogenaamde scheve asymptoot erbij getekend.



Bereik

Uit de grafiek lezen we dat $f(x)$ alle reële waarden kan aannemen. Dus: bereik=$\mathbb{R}$.

2d $u = f(t) = \dfrac{t^2}{t+1}$

Domein

Alleen voor $t = -1$ is *f* niet gedefinieerd (de noemer is dan gelijk aan 0), dus voor het : domein geldt: $t \neq -1$;

Verticale asymptoten:

De enige kandidaat voor een verticale asymptoot is $t = -1$.

We bepalen de benodigde limieten

$$\lim_{t \uparrow -1} f(t) = \lim_{t \uparrow -1} \frac{t^2}{t+1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{t \downarrow -1} f(t) = \lim_{t \downarrow -1} \frac{t^2}{t+1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

De lijn $t = -1$ is dus de enige verticale asymptoot.

Snijpunten met de coördinaatassen.

Snijpunt(en) met *t*-as .

We lossen op: $f(t) = 0$.

$$f(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2}{t+1} = 0 \Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$$

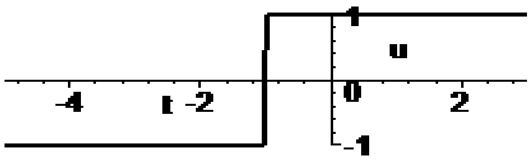
Dus één snijpunt met de *t*-as: $(0,0)$.

Snijpunt met de *u*-as.

Omdat $f(0) = 0$ is $(0,0)$ het snijpunt met de *u*-as.

Tekenoverzicht

Het nulpunt van *f* is hierboven bepaald. De teller is buiten het nulpunt op het gehele domein positief. De noemer wisselt van teken bij $t = -1$. In dat punt is de functie niet gedefinieerd. Het tekenoverzicht is als volgt.



Symmetrie-eigenschappen.
De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:
We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{t+1}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+\frac{1}{t}}\right) = \left(\frac{\infty}{1+0}\right) = \infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t^2}{t+1}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+\frac{1}{t}}\right) = \left(\frac{-\infty}{1+0}\right) = -\infty$$

Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van *f*.

$$f(t) = \frac{t^2}{t+1} \Rightarrow$$

$$f'(t) = \frac{(t+1)\cdot 2t - t^2\cdot 1}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{2t^2+2t-t^2}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$$

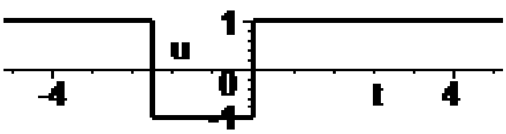
De nulpunten van f' vinden we door de teller gelijk te stellen aan 0.

$$t^2 + 2t = 0 \Rightarrow$$

$$t(t+2) = 0 \Rightarrow$$

$$t = 0 \vee t = -2$$

Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $t < -2 \vee t > 0$ (f' is daar positief);
f is dalend voor $-2 < t < 0$(f' is daar negatief);
Er is een maximum $f(-2) = \frac{4}{-2+1} = -4$ voor $t = -2$.
Er is een minimum $f(0) = 0$ voor $t = 0$.

Convex/concaaf en buigpunten
We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\Rightarrow$$

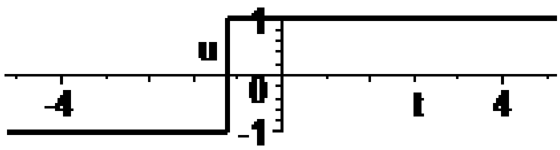
$$f''(t)=\frac{(t+1)^2\cdot(2t+2)-\left(t^2+2t\right)\cdot 2\cdot(t+1)}{(t+1)^4}=$$

$$=\frac{(t+1)\cdot(2t+2)-\left(t^2+2t\right)\cdot 2}{(t+1)^3}=$$

$$=\frac{2t^2+4t+2-2t^2-4t}{(t+1)^3}=\frac{2}{(t+1)^3}$$

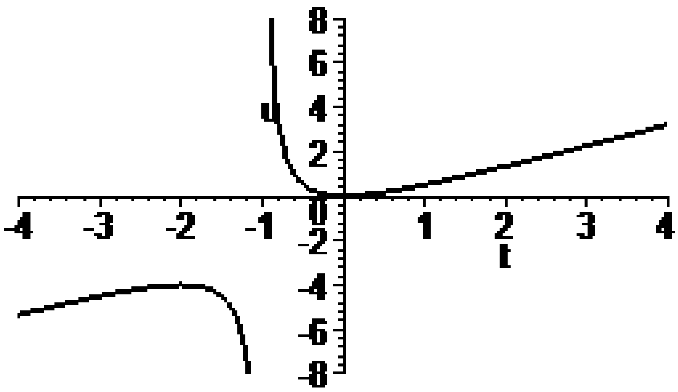
f'' heeft geen nulpunten

tekenoverzicht van f'':



de grafiek van f is dus concaaf voor $t<-1$ en convex voor $t>-1$.
Omdat -1 niet tot het domein behoort is er daar geen buigpunt.

<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>

Het bereik kan nu worden afgelezen: $\langle-\infty,-4]\cup[0,\infty\rangle$

2e $\quad y=f(t)=3+\sqrt[5]{(t+1)^3}$

<u>Domein</u>

Voor alle waarden van *t* is de functie gedefinieerd.
Dus domein= $\mathbb{R}$

<u>Verticale asymptoten</u>:

Gezien het domein kan er geen verticale asymptoot zijn.

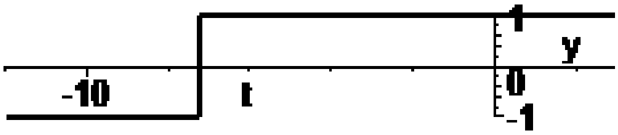
<u>Snijpunten met de coördinaatassen</u>.

Snijpunt(en) met *t*-as .
We lossen op: $f(t)=0$.

$$f(t) = 0 \Rightarrow$$
$$3 + \sqrt[5]{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow$$
$$\sqrt[5]{(t+1)^3} = -3 \Rightarrow$$
$$(t+1)^3 = (-3)^5 \Rightarrow$$
$$t + 1 = \sqrt[3]{(-3)^5} \Rightarrow$$
$$t = -1 + \sqrt[3]{(-3)^5} = -1 - 3\sqrt[3]{9} \approx -7,24$$

Dus één snijpunt met de *t*-as: $(-7,24;0)$.
Snijpunt met de *y*-as.
Omdat $f(0) = 3 + \sqrt[5]{1} = 4$ is $(0,4)$ het snijpunt met de *y*-as.

Tekenoverzicht
Het nulpunt van *f* is hierboven bepaald.
Het tekenoverzicht is als volgt.



Symmetrie-eigenschappen.
De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:
We bepalen de benodigde limieten.

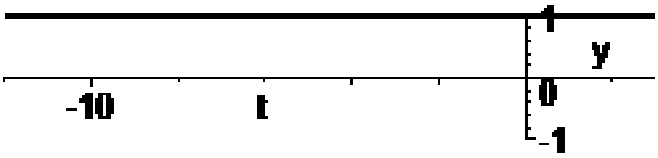
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(3 + \sqrt[5]{(t+1)^3}\right) = 3 + \infty = \infty$$
$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(3 + \sqrt[5]{(t+1)^3}\right) = 3 - \infty = -\infty$$

Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van *f*.

$$f(t) = 3 + \sqrt[5]{(t+1)^3} = 3 + (t+1)^{\frac{3}{5}} \Rightarrow$$
$$f'(t) = 0 + \tfrac{3}{5}(t+1)^{-\frac{2}{5}} \cdot 1 = \frac{3}{5\sqrt[5]{(t+1)^2}}$$

De afgeleide heeft geen nulpunten. Alleen voor $t = -1$ bestaat de afgeleide niet
Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



Behalve in het punt waar de afgeleide niet bestaat is de afgeleide steeds positief.
f is dus stijgend voor $t \neq -1$.
Er treedt geen tekenwisseling van de afgeleide op en dus zijn er geen extreme waarden

Convex/concaaf en buigpunten

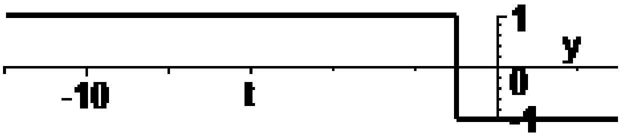
We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(t) = \tfrac{3}{5}(t+1)^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$f''(t) = \tfrac{3}{5}\cdot\left(-\tfrac{2}{5}\right)(t+1)^{-\frac{7}{5}}.1 = \frac{-6}{25(t+1)\sqrt[5]{(t+1)^2}}$$

f'' heeft geen nulpunten en bestaat niet voor $t=-1$

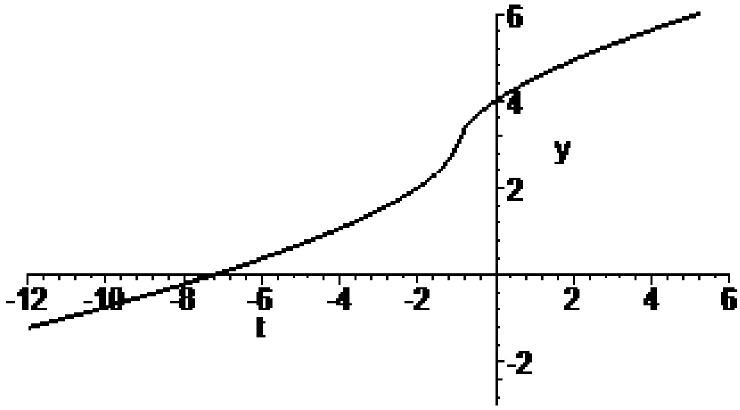
Het tekenoverzicht van f'' ziet er zo uit:



De grafiek van f is dus convex voor $t<-1$ en concaaf voor $t>-1$.

Hoewel de tweede afgeleide niet bestaat behoort $t=-1$ wel tot het domein van f. Er is daar tekenwisseling van de tweede afgeleide en dus is het punt $(-1,3)$ een buigpunt

Tekening van de grafiek



Bereik

Het bereik kan nu worden afgelezen: $\mathbb{R}$.

2f $y = f(x) = \dfrac{|x^3|}{x^2+1}$

Domein:

Voor alle waarden van x bestaat de functiewaarde.

Dus: domein= $\mathbb{R}$.

Verticale asymptoten:

Gezien het domein kan er geen verticale asymptoot zijn.

Snijpunten met de coördinaatassen.

Snijpunt(en) met *y*-as . We lossen op: $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{|x^3|}{x^2+1}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$$

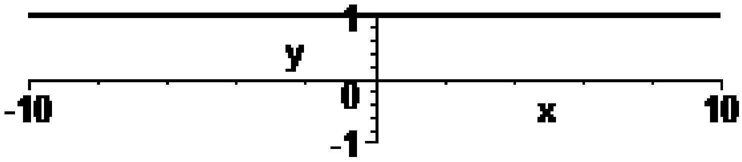
Dus één snijpunt met de *x*-as: $(0,0)$.

Omdat $f(0)=0$ is het snijpunt met de *y*-as ook het punt $(0,0)$.

Tekenoverzicht

Omdat zowel teller als noemer van f niet negatief zijn is het teken van $f(x)$ steeds positief, behalve voor het nulpunt natuurlijk.

Het tekenoverzicht ziet er zo uit.



Symmetrie-eigenschappen.

Er geldt:

$$f(-x) = \frac{\left|(-x)^3\right|}{(-x)^2+1} = \frac{\left|-x^3\right|}{x^2+1} = \frac{\left|x^3\right|}{x^2+1} = f(x)$$

De grafiek is dus symmetrisch in de y-asis een as. f is dus een even functie.

Horizontale asymptoten:

We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left|x^3\right|}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{\infty}{1+0} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left|x^3\right|}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{-\infty}{1+0} = -\infty$$

Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden

We bepalen de afgeleide van f.

$$f(x) = \frac{\left|x^3\right|}{x^2+1} = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{x^2+1} & \text{voor } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{x^2+1} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

We differentiëren $\dfrac{x^3}{x^2+1}$ naar x en vinden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(3x^2\right)-\left(x^3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Dus voor de afgeleide geldt:

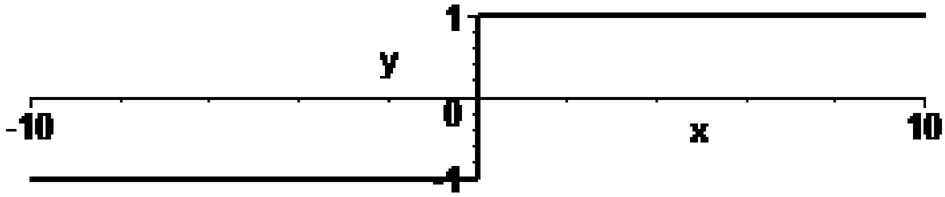
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{voor } x < 0 \\ \dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

We berekenen de nulpunten van f'.

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

We maken een tekenoverzicht van de eerste afgeleide.



De functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$;
Er treedt tekenwisseling van de afgeleide op bij $x = 0$.
Er is een minimum $f(0) = 0$ voor $x = 0$

Convex/concaaf en buigpunten
We bepalen de tweede afgeleide van *f*.
We differentiëren de vorm $\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$ naar x en vinden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (4x^3+6x) - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot(4x^3+6x) - (x^4+3x^2)\cdot 4x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{4x^5 + 6x^3 + 4x^3 + 6x - 4x^5 - 12x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2+1)^3}$$

Dus

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \text{ voor } x < 0 \\ \dfrac{-2x^3 + 6x}{(x^2+1)^3} \text{ voor } x \geq 0 \end{cases}$$

We berekenen de nulpunten van f''.

$f''(x) = 0 \Rightarrow$

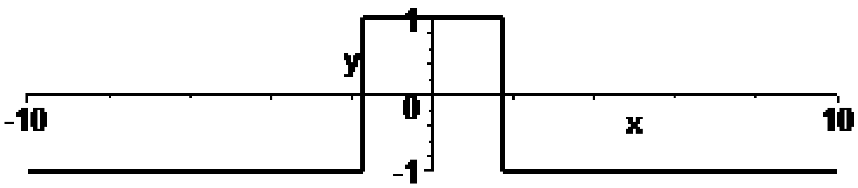
$$\frac{-2x^3 + 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow$$

$-2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow$

$-2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$

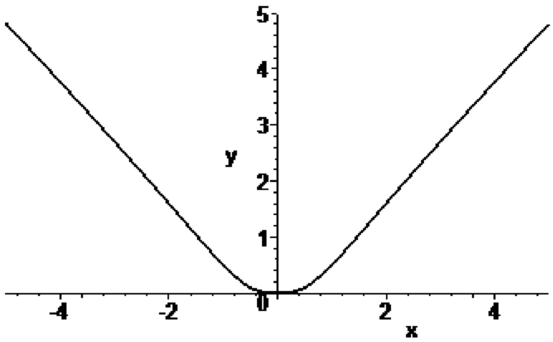
$x = 0 \vee x^2 = 3 \Rightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

We bepalen het tekenoverzicht van f''.



De grafiek van *f* is convex voor $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ en concaaf voor $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$.
Er treedt tekenwisseling van de tweede afgeleide op bij $x = \sqrt{3}$ en bij $x = -\sqrt{3}$
Er zijn twee buigpunten: $\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ en $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>
Uit de grafiek lezen we dat alle niet negatieve waarden aangenomen worden.
Dus bereik= $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

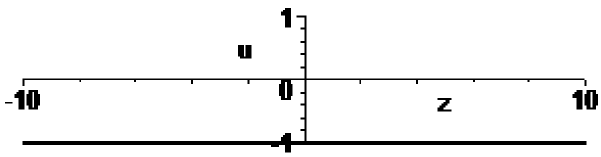
3 $u = f(z) = \dfrac{-18}{z^2 + 3z + 9}$

<u>Domein</u>:
Omdat de noemer voor geen enkele waarde van *z* gelijk wordt aan 0 (de discriminant is gelijk aan -27 en dus negatief) geldt: domein= $\mathbb{R}$;

<u>Verticale asymptoten</u>: *f* is voor alle waarden van *z* gedefinieerd; er zijn dus geen verticale asymptoten.

<u>Snijpunten met de coördinaatassen</u>.
Snijpunt(en) met *z*-as . De teller is nergens gelijk aan nul; *f* heeft dus geen nulpunten. Er zijn dus geen snijpunten met *z*-as.
Omdat $f(0) = -2$ is $(0, -2)$ het snijpunt met de *u*-as.

<u>Tekenoverzicht</u>
De teller van *f* is steeds negatief en de noemer is overal positief . Het teken van *f* is dus steeds negatief.



Symmetrie-eigenschappen.
De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:
We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{-18}{z^2+3z+9} = \lim_{z\to\infty} \frac{-\frac{18}{z^2}}{\frac{z^2}{z^2}+\frac{3z}{z^2}+\frac{9}{z^2}} = \lim_{z\to\infty} \frac{-\frac{18}{z^2}}{1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

De horizontale lijn met vergelijking $u = 0$ (z-as) is dus horizontale asymptoot naar rechts.

$$\lim_{z\to-\infty} f(z) = \lim_{z\to-\infty} \frac{-18}{z^2+3z+9} = \lim_{z\to-\infty} \frac{-\frac{18}{z^2}}{1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

De z-as is dus ook horizontale asymptoot naar links.

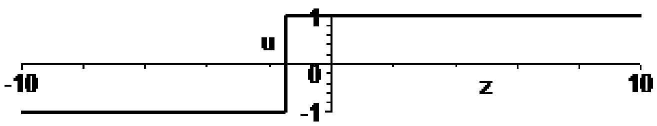
Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van f. We herschrijven enigzins.

$$f(z) = \frac{-18}{z^2+3z+9} = -18\cdot\left(z^2+3z+9\right)^{-1}$$

Nu differentiëren we:

$$f'(z) = -18\cdot(-1)\cdot\left(z^2+3z+9\right)^{-2}\cdot(2z+3) = \frac{18(2z+3)}{\left(z^2+3z+9\right)^2} = \frac{36z+54}{\left(z^2+3z+9\right)^2}$$

De teller van de afgeleide is gelijk aan 0 voor $z = -\frac{3}{2}$. De noemer is altijd positief, omdat de vorm z^2+3z+9 steeds positief is. Het tekenverloop van f' is als volgt:



f' is dus negatief voor $z < -\frac{3}{2}$ en positief voor $z > -\frac{3}{2}$. Dit betekent dat f dalend is voor $z < -\frac{3}{2}$ en stijgend voor $z > -\frac{3}{2}$. De functie heeft dus een minimum voor $z = -\frac{3}{2}$. De waarde van dit minimum is $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{18}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+9} = -\frac{8}{3}$.

Convex/concaaf en buigpunten
We bepalen de tweede afgeleide van f met behulp van de quotiëntregel.

$$f'(z) = 18 \cdot \frac{2z+3}{\left(z^2+3z+9\right)^2} \Rightarrow$$

$$f''(z) = 18 \cdot \frac{\left(z^2+3z+9\right)^2 \cdot 2 - (2z+3) \cdot 2 \cdot \left(z^2+3z+9\right)^1 \cdot (2z+3)}{\left(z^2+3z+9\right)^4} =$$

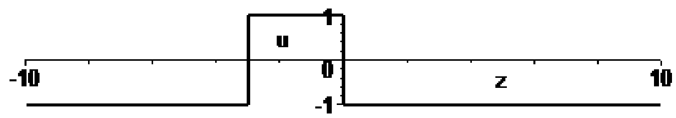
$$= 18 \cdot \frac{\left(z^2+3z+9\right) \cdot 2 - (2z+3) \cdot 2 \cdot (2z+3)}{\left(z^2+3z+9\right)^3} =$$

$$= 18 \cdot \frac{2z^2+6z+18-\left(8z^2+24z+18\right)}{\left(z^2+3z+9\right)^3} =$$

$$= 18 \cdot \frac{-6z^2-18z}{\left(z^2+3z+9\right)^3} = -108 \cdot \frac{z^2+3z}{\left(z^2+3z+9\right)^3}$$

De teller is gelijk aan 0 voor $z = -3$ en voor $z = 0$. De noemer is altijd positief, omdat de vorm $z^2 + 3z + 9$ steeds positief is. Er kan dus alleen tekenwisseling van de tweede afgeleide optreden bij $z = -3$ en bij $z = 0$.

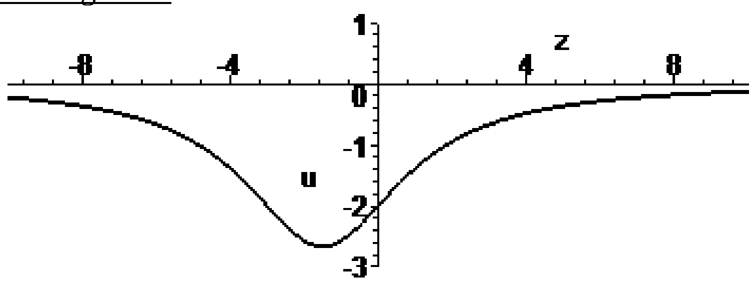
Het tekenverloop van f'' is als volgt:



Voor $z < -3$ is f'' negatief en de grafiek van f is dus concaaf (hol).
Voor $-3 < z < 0$ is f'' positief; de grafiek van f is daar dus convex (bol).
Voor $z > 0$ is f'' weer negatief en de grafiek van f is daar dus weer concaaf (hol).

Bij $z = -3$ wisselt de tweede afgeleide van teken. Het punt $\left(-3, f(-3)\right) = (-3,-2)$ is een concaaf-convex buigpunt.
Ook bij $z = 0$ wisselt de tweede afgeleide van teken. Het punt $\left(0, f(0)\right) = (0,-2)$ is een convex-concaaf buigpunt.

<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>
Uit de grafiek lezen we het bereik af: $\left[-\frac{8}{3}, 0\right\rangle$, oftewel $-\frac{8}{3} \le u < 0$.

4a $\quad s = f(t) = (\cos t)^2 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$

<u>Domein</u>
Op het gegeven interval is f overal gedefinieerd, dus: domein $0 \le t \le 2\pi$

Verticale asymptoten:
f is op het gehele interval $[0, 2\pi]$ gedefinieerd, dus er zijn geen verticale asymptoten.

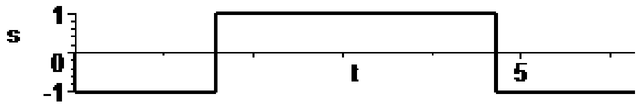
Snijpunten met de coördinaatassen.
Snijpunt(en) met t-as . We lossen op: $f(t) = 0$.

$$f(t) = 0 \Rightarrow$$
$$(\cos t)^2 - \cos t = 0 \Rightarrow$$
$$\cos t(\cos t - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos t = 0 \vee \cos t = 1 \Rightarrow$$
$$t = \tfrac{1}{2}\pi \vee t = \tfrac{3}{2}\pi \vee t = 0 \vee t = 2\pi$$

Dus op het gegeven domein zijn er 4 snijpunten met de t-as:
$(0,0)$, $\left(\tfrac{1}{2}\pi,0\right)$, $\left(\tfrac{3}{2}\pi,0\right)$ en $(2\pi,0)$

Snijpunt met de s-as. Omdat $f(0) = (\cos 0)^2 - \cos 0 = 1^2 - 1 = 0$ is $(0,0)$ het snijpunt met de y-as.

Tekenoverzicht
De nulpunten van f zijn hierboven bepaald. Het tekenoverzicht is als volgt.



Symmetrie-eigenschappen.
De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is door het gegeven domein ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:
Omdat er sprake is van een begrensd domein kan t niet tot $-\infty$ en ook niet tot $+\infty$ naderen. Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

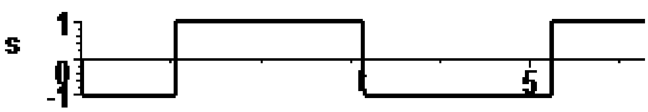
Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van f.

$$f(t) = (\cos t)^2 - \cos t \Rightarrow$$
$$f'(t) = 2(\cos t)^1 \cdot (-\sin t) - (-\sin t) = -2\cos t \sin t + \sin t$$

De nulpunten van f'':

$$f'(t) = 0 \Rightarrow$$
$$-2\cos t \sin t + \sin t = 0 \Rightarrow$$
$$-\sin t(2\cos t - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\sin t = 0 \vee \cos t = \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$
$$t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi \vee t = \tfrac{1}{3}\pi \vee t = \tfrac{5}{3}\pi \Rightarrow$$
$$t = 0 \vee t = \tfrac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = \tfrac{5}{3}\pi \vee t = 2\pi$$

Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $\frac{1}{3}\pi < t < \pi$ en voor $\frac{5}{3}\pi < t < 2\pi$;

f is dalend voor $0 < t < \frac{1}{3}\pi$ en voor $\pi < t < \frac{5}{3}\pi$;

Er is een minimum $f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 - \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ voor $t = \frac{1}{3}\pi$.

Er is een maximum $f(\pi) = (\cos(\pi))^2 - \cos(\pi) = (-1)^2 - (-1) = 2$ voor $t = \pi$.

Er is een minimum $f\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 - \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ voor $t = -\frac{1}{3}\pi$.

Bovendien zijn er twee randextremen:

een randmaximum $f(0) = (\cos(0))^2 - \cos(0) = (1)^2 - (1) = 0$ voor $t = 0$ en

een randmaximum $f(2\pi) = (\cos(2\pi))^2 - \cos(2\pi) = (1)^2 - (1) = 0$ voor $t = 2\pi$.

<u>Convex/concaaf en buigpunten</u>

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(t) = -2\cos t \sin t + \sin t \Rightarrow$$

$$f''(t) = -2(-\sin t \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t) + \cos t = 2(\sin t)^2 - 2(\cos t)^2 + \cos t$$

nulpunten van f'':

$$f''(t) = 0 \Rightarrow$$

$$2(\sin t)^2 - 2(\cos t)^2 + \cos t = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(1 - (\cos t)^2\right) - 2(\cos t)^2 + \cos t = 0 \Rightarrow$$

$$-4(\cos t)^2 + \cos t + 2 = 0$$

We stellen $\cos t = c$ en lossen de kwadratische vergelijking op:

$$-4c^2 + c + 2 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2 = 33$$

$$c = \frac{-1 + \sqrt{33}}{-8} \vee c = \frac{-1 - \sqrt{33}}{-8} \Rightarrow$$

$$c \approx -0{,}593 \vee c \approx 0{,}843$$

Dus moet gelden:

$$\cos t \approx -0{,}593 \vee \cos t \approx 0{,}843 \Rightarrow$$

$$\cos t \approx \cos(2{,}206) \vee \cos t \approx \cos(0{,}568) \Rightarrow$$ Op het

$$t \approx 2{,}206 + k \cdot 2\pi \vee t \approx -2{,}206 + k \cdot 2\pi \vee t \approx 0{,}568 + k \cdot 2\pi \vee t \approx -0{,}568 + k \cdot 2\pi$$

gegeven domein geeft dit de oplossingen:

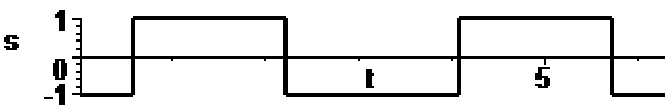
$$t \approx 2{,}206 \vee t \approx -2{,}206 + 2\pi \vee t \approx 0{,}568 \vee t \approx -0{,}568 + 2\pi \Rightarrow$$

$$t \approx 2{,}206 \vee t \approx 4{,}077 \vee t \approx 0{,}568 \vee t \approx 5{,}715 \Rightarrow$$

$$t \approx 0{,}568 \vee t \approx 2{,}206 \vee t \approx 4{,}077 \vee t \approx 5{,}715$$

(het gebruik van een computeralgebrapakket zou hier niet zo gek zijn!)

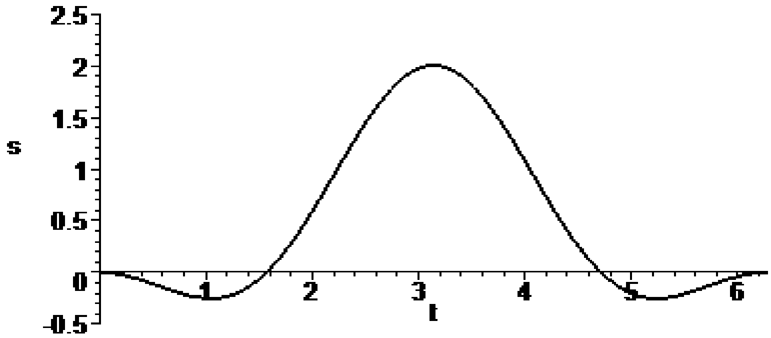
Tekenoverzicht van f'':



De grafiek van *f* is dus concaaf (hol) op de intervallen $[0;0{,}568\rangle$, $\langle 2{,}206;4{,}077\rangle$ en $\langle 5{,}715;2\pi]$ en convex (bol) op de intervallen $\langle 0{,}568;2{,}206\rangle$ en $\langle 4{,}077;5{,}715\rangle$.

Voor $t \approx 0,568$ is er een concaaf-convex buigpunt, namelijk $(0,568,\ f(0,568)) \approx (0,568,-0,132)$
Voor $t \approx 2,2067$ is er een convex-concaaf buigpunt, namelijk $(2,206,\ f(2,206)) \approx (2,206;0,945)$
Voor $t \approx 4,077$ is er een concaaf-convex buigpunt, namelijk. $(4,077,\ f(4,077)) \approx (4,077,0,945)$
Voor $t \approx 5,715$ is er een convex-concaaf buigpunt, namelijk $(5,715,\ f(5,715)) \approx (5,715;-0,132)$

<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>
Het bereik kan nu worden afgelezen: $-\frac{1}{4} < s < 2$

4b $y = f(u) = 2\sin u + \cos(2u),\ u \in [0,2\pi]$

<u>Domein</u>
Op het gegeven interval is *f* overal gedefinieerd, dus: domein $0 \le u \le 2\pi$;

<u>Verticale asymptoten</u>:
f is op het gehele interval $[0,2\pi]$ gedefinieerd, dus er zijn geen verticale asymptoten.

<u>Snijpunten met de coördinaatassen</u>.
Snijpunt(en) met *u*-as . We lossen op: $f(u) = 0$.

$$f(u) = 0 \Rightarrow$$
$$2\sin u + \cos(2u) = 0 \Rightarrow$$
$$2\sin u + 1 - 2(\sin u)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$2(\sin u)^2 - 2\sin u - 1 = 0$$

We stellen $\sin u = s$ en lossen de kwadratische vergelijking op:

$$2s^2 - 2s - 1 = 0$$
$$\mathrm{D} = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12$$
$$s = \frac{2+\sqrt{12}}{4} \vee s = \frac{2-\sqrt{12}}{4} \Rightarrow$$
$$s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \vee s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$s \approx 1,366 \vee s \approx -0,366$$

Dus moet gelden:
$$\sin t \approx 1,366 \vee \sin t \approx -0,366$$
De eerste vergelijking heeft geen oplossingen. We gaan verder met de tweede:

$\sin t \approx -0,366 \Rightarrow$

$\sin t \approx \sin(-0,375) \Rightarrow$

$t \approx -0,375 + k \cdot 2\pi \vee t \approx \pi - (-0,375) + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$t \approx -0,375 + k \cdot 2\pi \vee t \approx 3,516 + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven domein geeft dit de oplossingen:

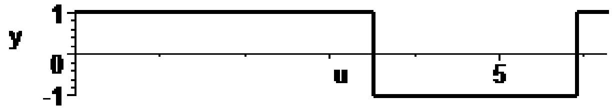
$t \approx -0,375 + 2\pi \vee t \approx 3,516 \Rightarrow$

$t \approx 5,908 \vee t \approx 3,516$

Dus op het gegeven domein zijn er twee snijpunten met de u-as: $(3,516;0)$ en $(5,908;0)$.

Snijpunt met de *y*-as. Omdat $f(0) = 2\sin 0 + \cos(2 \cdot 0) = 0 + 1 = 1$ is $(0,1)$ het snijpunt met de *y*-as.

<u>Tekenoverzicht</u>
De nulpunten van *f* zijn hierboven bepaald. Het tekenoverzicht is als volgt.



<u>Symmetrie-eigenschappen</u>.
De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is door het gegeven domein ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

<u>Horizontale asymptoten:</u>
Omdat er sprake is van een begrensd domein kan *u* niet tot $-\infty$ en ook niet tot $+\infty$ naderen. Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

<u>Stijgend/dalend; extreme waarden</u>
We bepalen eerst de afgeleide van *f*.

$f(u) = 2\sin u + \cos(2u) \Rightarrow$

$f'(u) = 2\cos u - \sin(2u) \cdot 2 = 2\cos u - 2\sin(2u)$

De nulpunten van $f'´$:

$f'(u) = 0 \Rightarrow$

$2\cos u - 2\sin(2u) = 0 \Rightarrow$

$\cos u - \sin(2u) = 0 \Rightarrow$

$\cos u - 2\sin u \cos u = 0 \Rightarrow$

$\cos u(1 - 2\sin u) = 0 \Rightarrow$

$\cos u = 0 \vee \sin u = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\cos u = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) \vee \sin u = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \Rightarrow$

$u = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$u = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee u = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

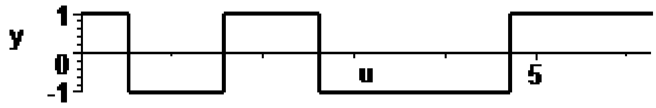
Op het gegeven domein geeft dit:

$u = \frac{1}{2}\pi \vee u = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi \vee u = \frac{1}{6}\pi \vee u = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow$

$u = \frac{1}{2}\pi \vee u = \frac{3}{2}\pi \vee u = \frac{1}{6}\pi \vee u = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow$

$u = \frac{1}{6}\pi \vee u = \frac{1}{2}\pi \vee u = \frac{5}{6}\pi \vee u = \frac{3}{2}\pi$

Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $0 \le t < \frac{1}{6}\pi$, voor $\frac{1}{2}\pi < t < \frac{5}{6}\pi$ en voor $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$.

f is dalend voor $\frac{1}{6}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ en voor $\frac{5}{6}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$.

Er is een maximum $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ voor $t = \frac{1}{6}\pi$.

Er is een minimum $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 + (-1) = 1$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$.

Er is een maximum $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ voor $t = \frac{5}{6}\pi$.

Er is een minimum $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) + (-1) = -3$ voor $t = \frac{3}{2}\pi$.

Bovendien zijn er twee randextremen:
een randminimum $f(0) = 2\sin(0) + \cos(2 \cdot 0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ voor $t = 0$ en
een randmaximum $f(2\pi) = 2\sin(2\pi) + \cos(2 \cdot 2\pi) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ voor $t = 2\pi$.

<u>Convex/concaaf en buigpunten</u>

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$f'(u) = 2\cos u - 2\sin(2u) \Rightarrow$

$f''(u) = -2\sin u - 2\cos(2u) \cdot 2 = -2\sin u - 4\cos(2u)$

nulpunten van f'':

$f''(u) = 0 \Rightarrow$

$-2\sin u - 4\cos(2u) = 0 \Rightarrow$

$-2\sin u - 4\left(1 - 2(\sin u)^2\right) = 0 \Rightarrow$

$8(\sin u)^2 - 2\sin u - 4 = 0 \Rightarrow$

$4(\sin u)^2 - \sin u - 2 = 0$

We stellen $\sin u = s$ en lossen de kwadratische vergelijking op:

$4s^2 - s - 2 = 0$

$\mathrm{D} = (-1)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (-2) = 33$

$s = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{8} \vee s = \dfrac{1 - \sqrt{33}}{8} \Rightarrow$

$s \approx 0{,}843 \vee s \approx -0{,}593$

Dus moet gelden:

$\sin u \approx 0{,}843 \vee \sin u \approx -0{,}593 \Rightarrow$

$\sin u \approx \sin(1{,}003) \vee \sin u \approx \sin(-0{,}635) \Rightarrow$

$u \approx 1{,}003 + k \cdot 2\pi \vee u \approx \pi - 1{,}003 + k \cdot 2\pi \vee u \approx -0{,}635 + k \cdot 2\pi \vee u \approx \pi - (-0{,}604) + k \cdot 2\pi$

$u \approx 1{,}003 + k \cdot 2\pi \vee u \approx 2{,}139 + k \cdot 2\pi \vee u \approx -0{,}635 + k \cdot 2\pi \vee u \approx 3{,}776 + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven domein geeft dit de oplossingen:

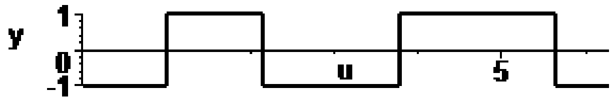
$u \approx 1{,}003 \vee u \approx 2{,}139 \vee u \approx -0{,}635 + 2\pi \vee u \approx 3{,}776 \Rightarrow$

$u \approx 1{,}003 \vee u \approx 2{,}139 \vee u \approx 5{,}648 \vee u \approx 3{,}776 \Rightarrow$

$u \approx 1{,}003 \vee u \approx 2{,}139 \vee u \approx 3{,}776 \vee u \approx 5{,}648 \Rightarrow$

(het gebruik van een computeralgebrapakket zou ook hier niet zo gek zijn!)

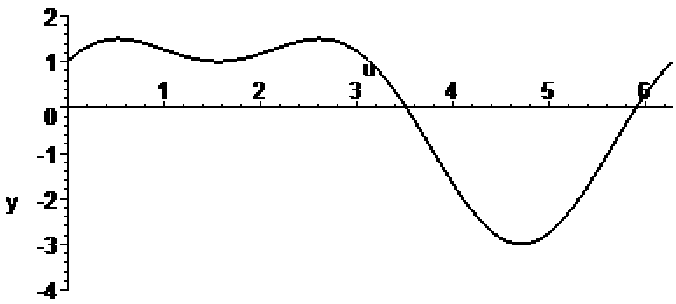
Tekenoverzicht van f'':



De grafiek van f is dus concaaf (hol) op de intervallen $[0;1{,}003\rangle$, $\langle 2{,}139;3{,}776\rangle$ en $\langle 5{,}648;2\pi]$ en convex (bol) op de intervallen $\langle 1{,}003;2{,}139\rangle$ en $\langle 3{,}776;5{,}648\rangle$.

Voor $t \approx 1{,}003$ is er een concaaf-convex buigpunt, nl. $(1{,}003, f(1{,}003)) \approx (1{,}003;1{,}265)$.
Voor $t \approx 2{,}139$ is er een convex-concaaf buigpunt, nl. $(2{,}139, f(2{,}139)) \approx (2{,}206;1{,}265)$.
Voor $t \approx 3{,}776$ is er een concaaf-convex buigpunt, nl. $(3{,}776, f(3{,}776)) \approx (3{,}776;-0{,}888)$.
Voor $t \approx 5{,}648$ is er een convex-concaaf buigpunt, nl. $(5{,}648, f(5{,}648)) \approx (5{,}648;-0{,}891)$.
Merk op: bij exacte berekening zouden de laatste 2 buigpunten gelijke y-coördinaten hebben.

<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>
Het bereik kan nu worden afgelezen: $-3 < y < \frac{3}{2}$

4c $\quad y = f(x) = \dfrac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x},\ x \in [0, 2\pi]$

<u>Domein</u>
Op het gegeven interval is f niet gedefinieerd als de noemer in het voorschrift gelijk is aan 0.
We gaan daarom na of de noemer gelijk aan 0 kan worden.

$\cos x = 0 \Rightarrow$

$\cos x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven interval $[0, 2\pi]$ geeft dit de oplossingen:

$$x = \tfrac{1}{2}\pi \vee x = -\tfrac{1}{2}\pi + 2\pi \Rightarrow$$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi \vee x = \tfrac{3}{2}\pi$$

Voor het domein geldt dus: $0 \le x \le 2\pi \wedge x \ne \tfrac{1}{2}\pi \wedge x \ne \tfrac{3}{2}\pi$.

Verticale asymptoten:

f is niet gedefinieerd voor $x = \tfrac{1}{2}\pi$ en voor $x = \tfrac{3}{2}\pi$. Daar zou sprake kunnen zijn van een verticale asymptoot. We bepalen de benodigde limieten.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x} = \left(\frac{1-1^2}{0} = \frac{0}{0}\right) = \text{(regel van l´Hopital toepasssen)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin x - (\sin x)^2\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x - 2\sin x\cos x}{-\sin x} = \frac{0 - 2\cdot 1\cdot 0}{-1} = 0$$

Voor $x = \tfrac{1}{2}\pi$ is er dus geen verticale asymptoot, maar een perforatie in de grafiek.

$$\lim_{x\uparrow\frac{3}{2}\pi} f(x) = \lim_{x\uparrow\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x} = \left(\frac{-1-(-1)^2}{0^-} = \frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\downarrow\frac{3}{2}\pi} f(x) = \lim_{x\downarrow\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x} = \left(\frac{-1-(-1)^2}{0^+} = \frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

De verticale lijn $x = \tfrac{3}{2}\pi$ is dus zowel van links als rechts verticale asymptoot.

Snijpunten met de coördinaatassen.

Snijpunt(en) met *x*-as . We lossen op: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x - (\sin x)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x = 0 \vee \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \sin 0 \vee \sin x = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow$$

$$x = 0 + k\cdot 2\pi \vee x = \pi - 0 + k\cdot 2\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = \pi - \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$x = k\cdot 2\pi \vee x = \pi + k\cdot 2\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$x = \pi + k\cdot\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$$

Op het interval $[0, 2\pi]$ geeft dit de oplossingen:

$$x = \pi - \pi \vee x = \pi \vee x = \pi + \pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow$$

$$x = 0 \vee x = \tfrac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

Maar $x = \tfrac{1}{2}\pi$ behoort niet tot het domein van *f*. Deze oplossing vervalt. Er blijven dus drie oplossingen over.

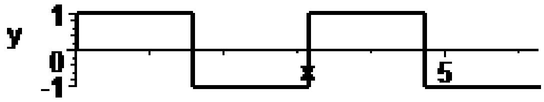
$x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

Dus op domein zijn er drie snijpunten met de *x*-as: $(0,0)$, $(\pi,0)$ en $(2\pi,0)$.

Snijpunt met de *y*-as. Omdat $f(0) = \dfrac{\sin 0 - (\sin 0)^2}{\cos 0} = 0$ is $(0,0)$ het snijpunt met de *y*-as.

Tekenoverzicht

De nulpunten van *f* zijn hierboven bepaald. Het tekenoverzicht is als volgt.



Symmetrie-eigenschappen.

De grafiek is niet symmetrisch is een as en de functie is door het gegeven domein ook niet periodiek. Er zijn dus geen symmetrie-eigenschappen.

Horizontale asymptoten:

Omdat er sprake is van een begrensd domein kan *x* niet tot $-\infty$ en ook niet tot $+\infty$ naderen. Er zijn dus geen horizontale asymptoten.

Stijgend/dalend; extreme waarden

We bepalen eerst de afgeleide van *f*.

$$f(x) = \frac{\sin x - (\sin x)^2}{\cos x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \left(\cos x - 2(\sin x)^1 \cos x\right) - \left(\sin x - (\sin x)^2\right) \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)^2 - 2\sin x(\cos x)^2 + (\sin x)^2 - (\sin x)^3}{(\cos x)^2}$$

Voordat we de nulpunten van f' bepalen herschrijven we de teller van deze breuk.

$$(\cos x)^2 - 2\sin x(\cos x)^2 + (\sin x)^2 - (\sin x)^3 =$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 - 2\sin x(\cos x)^2 - (\sin x)^3 =$$

$$1 - 2\sin x \cdot \left(1 - (\sin x)^2\right) - (\sin x)^3 =$$

$$1 - 2\sin x + 2(\sin x)^3 - (\sin x)^3 =$$

$$1 - 2\sin x + (\sin x)^3$$

Daarmee geldt:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\sin x + (\sin x)^3}{(\cos x)^2}$$

De nulpunten van f'´:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2\sin x + (\sin x)^3 = 0 \wedge (\cos x)^2 \neq 0$$

De voorwaarde $(\cos x)^2 \neq 0$ bekijken we pas achteraf.

Eerst lossen we op: $1 - 2\sin x + (\sin x)^3 = 0$

Stel $\sin x = s$

$$1 - 2s + s^3 = 0 \Rightarrow$$

$$s^3 - 2s + 1 = 0$$

$s = 1$ is een oplossing van deze vergelijking.
Uitdelen van de factor $s - 1$ geeft:

$$s^3 - 2s + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(s-1)(s^2 + s - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$s = 1 \vee s^2 + s - 1 = 0$$

We bekijken even de tweede vergelijking:

$$s^2 + s - 1 = 0$$

$$\mathrm{D} = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$s = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee s = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$s \approx 0,618 \vee s \approx -1,618$$

In totaal krijgen we dus

$$\sin x = 1 \vee \sin x \approx 0,618 \vee \sin x \approx -1,618$$

De derde vergelijking heeft geen oplossingen, dus

$$\sin x = 1 \vee \sin x \approx 0,618$$

$$\sin x = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \vee \sin x = \sin(0,666)$$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 0,666 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - 0,666 + k \cdot 2\pi$$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 0,666 + k \cdot 2\pi \vee x = 2,476 + k \cdot 2\pi$$

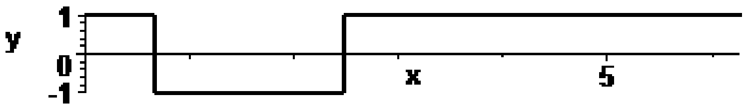
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 0,666 + k \cdot 2\pi \vee x = 2,476 + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[0, 2\pi]$ geeft dit de oplossingen:

$$x = \tfrac{1}{2}\pi \vee x = 0,666 \vee x = 2,476$$

We bekijken de gestelde voorwaarde $(\cos x)^2 \neq 0$.
De gevonden oplossing $x = \tfrac{1}{2}\pi$ voldoet daar niet aan en vervalt dus als oplossing.
(Merk op: $x = \tfrac{1}{2}\pi$ behoort ook niet tot het domein !)
Uiteindelijk vinden we dus als nulpunten van de afgeleide: $x = 0,666 \vee x = 2,476$

Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $0 \leq x < 0,666$ en voor $2,476 < x \leq 2\pi$.
f is dalend voor $0,666 < x < \tfrac{1}{2}\pi$ en voor $\tfrac{1}{2}\pi < x < 2,476$.

Er is een maximum $f(0,666) = \dfrac{\sin 0,666 - (\sin 0,666)^2}{\cos 0,666} = 0,300$ voor $x = 0,666$.

Er is een minimum $f(2,476) = \dfrac{\sin 2,476 - (\sin 2,476)^2}{\cos 2,476} = -0,300$ voor $x = 2,476$.

Bovendien zijn er twee randextremen:

een randminimum $f(0)=\dfrac{\sin 0-(\sin 0)^2}{\cos 0}=0$ voor $x=0$ en

een randmaximum $f(2\pi)=\dfrac{\sin(2\pi)-(\sin(2\pi))^2}{\cos(2\pi)}=0$ voor $x=2\pi$.

<u>Convex/concaaf en buigpunten</u>

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(x)=\frac{1-2\sin x+(\sin x)^3}{(\cos x)^2}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(\cos x)^2\cdot\left(-2\cos x+3(\sin x)^2\cdot\cos x\right)-\left(1-2\sin x+(\sin x)^3\right)\cdot 2\cdot(\cos x)^1\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^4}$$

$$=\frac{(\cos x)\cdot\left(-2\cos x+3(\sin x)^2\cdot\cos x\right)-\left(1-2\sin x+(\sin x)^3\right)\cdot 2(-\sin x)}{(\cos x)^3}$$

$$=\frac{-2(\cos x)^2+3(\sin x)^2\cdot(\cos x)^2+2\sin x-4(\sin x)^2+2(\sin x)^4}{(\cos x)^3}$$

$$=\frac{-2(\cos x)^2+3(\sin x)^2\cdot(\cos x)^2+2\sin x-4(\sin x)^2+2(\sin x)^4}{(\cos x)^3}$$

Voordat we de nulpunten van f' bepalen herschrijven we de teller van deze breuk.

$$-2\cdot(\cos x)^2+3(\sin x)^2\cdot(\cos x)^2+2\sin x-4(\sin x)^2+2(\sin x)^4$$

$$=-2\left(1-(\sin x)^2\right)+3(\sin x)^2\cdot\left(1-(\sin x)^2\right)+2\sin x-4(\sin x)^2+2(\sin x)^4$$

$$=-2+2(\sin x)^2+3(\sin x)^2-3(\sin x)^4+2\sin x-4(\sin x)^2+2(\sin x)^4$$

$$=-2+2\sin x+(\sin x)^2-(\sin x)^4$$

Daarmee geldt:

$$f''(x)=\frac{-2+2\sin x+(\sin x)^2-(\sin x)^4}{(\cos x)^3}$$

De nulpunten van f'':

$$f''(x)=0\Rightarrow$$

$$-2+2\sin x+(\sin x)^2-(\sin x)^4=0\wedge(\cos x)^3\neq 0\Rightarrow$$

$$-2+2\sin x+(\sin x)^2-(\sin x)^4=0\wedge\cos x\neq 0$$

We lossen de eerste vergelijking op en kijken achteraf naar de voorwaarde.

De voorwaarde $\cos x\neq 0$ bekijken we pas achteraf.

Eerst lossen we op: $-2+2\sin x+(\sin x)^2-(\sin x)^4=0$

Stel $\sin x=s$:

$$-2+2s+s^2-s^4=0\Rightarrow$$

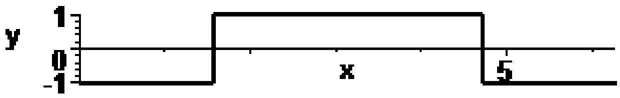
$$s^4-s^2-2s+2=0$$

$s=1$ is een oplossing van deze vergelijking.

Uitdelen van de factor $s-1$ geeft:

$$s^4 - s^2 - 2s + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$(s-1)\left(s^3 + s^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow$$
$$s = 1 \vee s^3 + s^2 - 2 = 0$$
$s = 1$ is ook weer een oplossing van de tweede vergelijking.
Uitdelen van de factor $s - 1$ geeft:
$$s = 1 \vee (s-1)\left(s^2 + 2s + 2\right) = 0 \Rightarrow$$
$$s = 1 \vee s = 1 \vee s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$s = 1 \vee s^2 + 2s + 2 = 0$$
De tweede vergelijking heeft geen oplossingen (de discriminant is negatief). Dus blijft over:
$$s = 1 \Rightarrow$$
$$\sin x = 1 \Rightarrow$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
(zie de berekening bij de nulpunten van de eerste afgeleide)
Omdat $\frac{1}{2}\pi$ niet tot het domein van *f* behoort zijn er dus geen oplossingen.

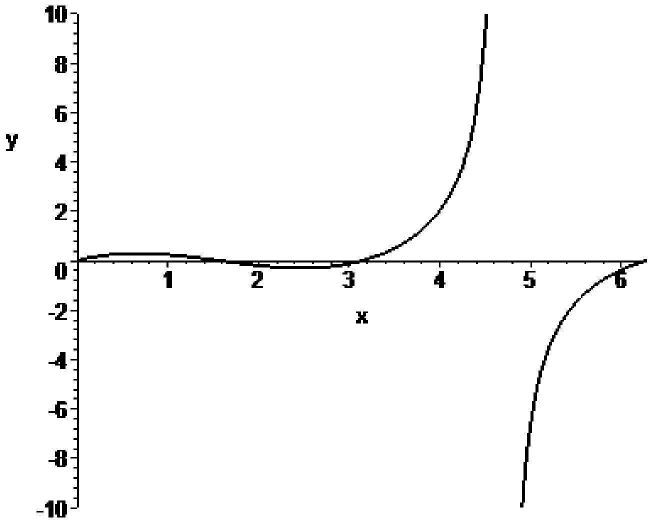
tekenoverzicht van f'':



De grafiek van f is dus concaaf (hol) op de intervallen $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$ en $\left\langle\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ en convex (bol) op het interval $\left\langle\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\rangle$.

Omdat $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{3}{2}\pi$ niet tot het domein van *f* behoren kunnen er daar geen buigpunten zijn. Verdere kandidaten voor buigpunten zijn er evenmin.

<u>Tekening van de grafiek</u>



Merk op: bij $x = \frac{1}{2}\pi$ is er sprake van een perforatie

<u>Bereik</u>
Afgelezen kan worden dat alle reële getallen tot het bereik behoren.

4d $y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

Domein
Uit het voorschrift blijkt dat f voor iedere waarde van x gedefinieerd. Het dpmein is dus $\mathbb{R}$.

Verticale asymptoten:
Omdat het domein gelijk is aan $\mathbb{R}$ is er is geen enkele lijn die in aanmerking komt om verticale asymptoot te zijn.

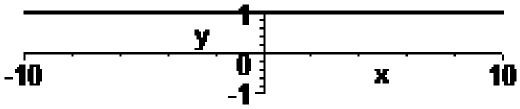
Snijpunten met de coördinaatassen.
Snijpunt(en) met x-as . We lossen op: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 = 0 \vee e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Bedenk hierbij dat een e-macht niet gelijk aan 0 kan worden.
Er is dus precies één snijpunt met de x-as, namelijk $(0,0)$.

Snijpunt met de y-as. Omdat $f(0) = 0^2 \cdot e^{-0^2} = 0$ is $(0,0)$ ook het snijpunt met de y-as.

Tekenoverzicht
Het nulpunt van f is hierboven bepaald. Het tekenoverzicht is als volgt.



De functiewaarde is steeds positief, behalve natuurlijk voor $x = 0$

Symmetrie-eigenschappen.
Er geldt:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)^2} = x^2 \cdot e^{-x^2} = f(x).$$

f is dus een even functie en de grafiek van f is symmetrisch is de y-as.

Horizontale asymptoten:
We onderzoeken de eventuele aanwezigheid van horizontale asymptoten met behulp van een limiet.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = (\infty \cdot 0) \quad \text{(de regel van l´Hopital is wellicht toepasbaar)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{(pas de regel van l´Hopital toe)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$$

De lijn $y = 0$ (x-as) is dus horizontale asymptoot naar rechts.
Vanwege de symmetrie sis deze lijn ook horizontale asymptoot naar links.

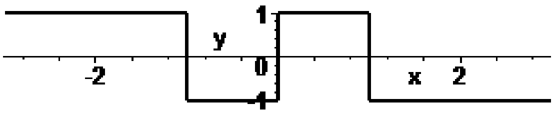
Stijgend/dalend; extreme waarden
We bepalen eerst de afgeleide van f.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} \cdot (-2x) = \left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2}$$

De nulpunten van f'´:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$2x\left(1 - x^2\right)e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$x = 0 \vee x^2 = 1 \vee e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

Het tekenoverzicht van f' is als volgt:



f is dus stijgend voor $x < -1$ en voor $0 < x < 1$.
f is dalend voor $-1 < x < 0$ en voor $x > 1$.

Er is een maximum $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{(-1)^2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} = 0,368$ voor $x = -1$.

Er is een minimum $f(0) = 0$ voor $x = 0$.

Er is een maximum $f(1) = 1^2 \cdot e^{-1^2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} = 0,368$ voor $x = 1$.

Deze laatste extreme waarde kon ook met behulp van de symmetrie bepaald worden..

Convex/concaaf en buigpunten

We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(x) = \left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$f''(x) = \left(2 - 6x^2\right)e^{-x^2} + \left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2} \cdot (-2x) =$$
$$= \left(2 - 6x^2 - 4x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2} = \left(2 - 10x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2}$$

De nulpunten van f'':

$$f''(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(2 - 10x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$4x^4 - 10x^2 + 2 = 0 \vee e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

We stellen $x^2 = k$ en lossen de kwadratische vergelijking op:

$$2k^2 - 5k + 1 = 0$$
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$$
$$k = \frac{-(-5) + \sqrt{17}}{2 \cdot 2} \vee k = \frac{-(-5) - \sqrt{17}}{2 \cdot 2}$$
$$k = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \vee k = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$
$$k = 2,281 \vee k = 0,219$$

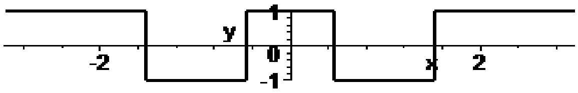
Terug naar *x*.

$x^2 = 2,281 \vee x^2 = 0,219 \Rightarrow$

$x = 1,510 \vee x = -1,510 \vee x = 0,468 \vee x = -0,468 \Rightarrow$

$x = -1,510 \vee x = -0,468 \vee x = 0,468 \vee x = 1,510$

tekenoverzicht van f'':



De grafiek van f is dus convex (bol) voor $x < -1,510 \vee -0,468 < x < 0,468 \vee x > 1,510$ en concaaf (hol) voor $x = -1,510 < x < -0,468 \vee 0,468 < x < 1,510$.

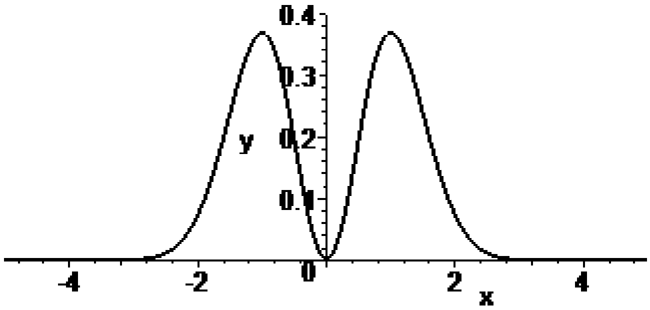
Er is een bol-hol buigpunt $(-1,510, f(-1,510)) = (-1,510; 0,233)$.

Er is Er is een bol-hol buigpunt $(-0,468; 0,176)$.

Er is een bol-hol buigpunt $(0,468; 0,176)$.

Tenslotte is er een bol-hol buigpunt $(1,510, f(1,510)) = (1,510; 0,233)$.

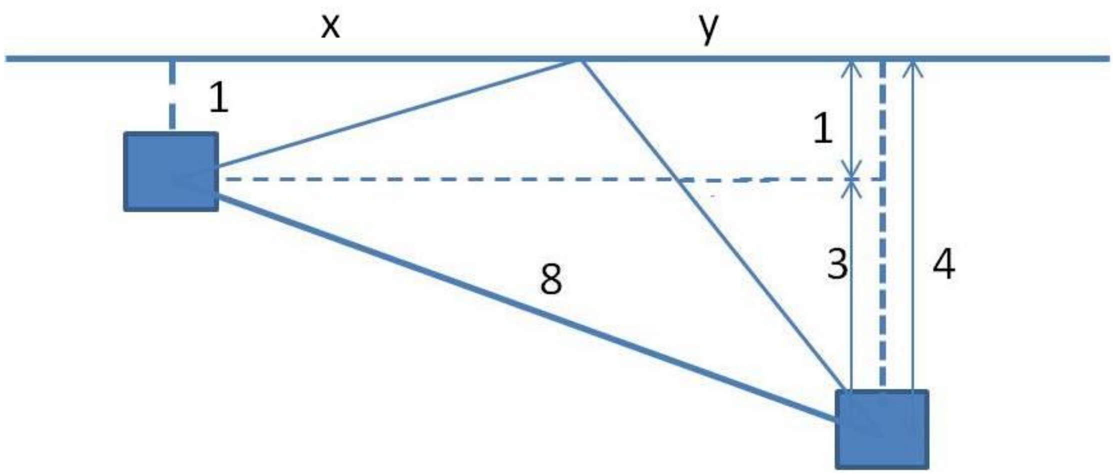
<u>Tekening van de grafiek</u>



<u>Bereik</u>

Afgelezen kan worden dat geldt: $0 \le y \le \frac{1}{\mathrm{e}}$ alle reële getallen tot het bereik behoren.

5



Zie bovenstaande figuur, links stad A en rechts stad B, met alle gegevens.
Voor de som van de afstand van A tot de centrale en de afstand van B tot de centrale geldt (stelling van Pythagora:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{y^2 + 4^2} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 16}$,

y kan in x uitgedrukt worden: $y + x = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} \Rightarrow y = \sqrt{55} - x$.

De te minimaliseren functie is dus.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{55 - 2x\sqrt{55} + x^2 + 16} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{71 - 2x\sqrt{55} + x^2}$$

Differentiëren we naar x, dan krijgen we:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{-2\sqrt{55}+2x}{2\sqrt{71-2x\sqrt{55}+x^2}}$$

Door deze afgeleide gelijk aan 0 te stellen krijgen we de vergelijking:

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{55}-2x}{2\sqrt{71-2x\sqrt{55}+x^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{55}-x}{\sqrt{71-2x\sqrt{55}+x^2}}$$

Door kruislings te vermenigvuldigen krijgen we

$$x\sqrt{71-2x\sqrt{55}+x^2} = \left(\sqrt{55}-x\right)\sqrt{x^2+1}.$$

Beide leden kwadrateren levert

$$x^2\left(71-2x\sqrt{55}+x^2\right) = \left(55-2x\sqrt{55}+x^2\right)\left(x^2+1\right) \Rightarrow$$

$$x^4 - 2x^3\sqrt{55} + 71x^2 = x^4 - 2x^3\sqrt{55} + 55x^2 + x^2 - 2x\sqrt{55} + 55 \Rightarrow$$

$$15x^2 + 2x\sqrt{55} - 55 = 0$$

Met de abc-formule vinden we:

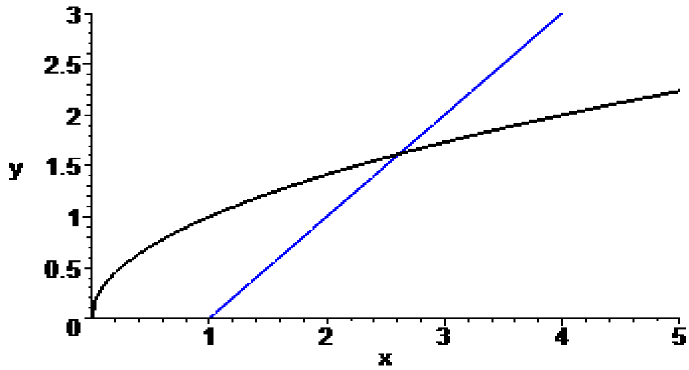
$$x = \frac{-2\sqrt{55} \pm \sqrt{4\cdot 55 + 60\cdot 55}}{30} = \frac{-2\sqrt{55} \pm 8\sqrt{55}}{30}$$

Uiteraard voldoet alleen $x = \frac{-2\sqrt{55}+8\sqrt{55}}{30} = \frac{1}{5}\sqrt{55} \Rightarrow y = \sqrt{55} - \frac{1}{5}\sqrt{55} = \frac{4}{5}\sqrt{55}$

De totale lengte van de leidingen is dus $\sqrt{\frac{55}{25}+1} + \sqrt{\frac{16\cdot 55}{25}+16} = \sqrt{\frac{80}{25}} + 4\sqrt{\frac{80}{25}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

6a $\sqrt{x} = x - 1$

We bepalen een startwaarde voor het NR-proces, dooe een tekening van de grafieken van $y = \sqrt{x}$ en $y = x - 1$ te maken.



Het is duidelijk dat de gevraagde oplossing tussen $x = 2$ en $x = 3$ ligt en waarschijnlijk wat dichter bij $x = 2$ dan bij $x = 3$. Een voor de hand liggende keuze voor de startwaarde is dus $x = 3$.

Nu de iteratiefunctie.

De vergelijking is om te schrijven naar: $\sqrt{x} - x + 1 = 0$. De gevraagde oplossing is het nulpunt van de functie met voorschrift $y = f(x) = \sqrt{x} - x + 1$.

De afgeleide van deze functie is: $y = f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$´

Voor de iteratiefunctie g van het NR proces geldt daarom:

Er geldt dus

$$x_0 = 3 \text{ en}$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n} - x_n + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x_n}} - 1}$$

We zoeken een benaderde oplossing in 4 decimalen en werken in 6 decimalen

Dit geeft:

$$x_1 = x_0 - \frac{\sqrt{x_0} - x_0 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} - 1} = 3 - \frac{\sqrt{3} - 3 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}} - 1} = 3 - \frac{-0,2679491924}{-0,7113248654} = 2,623310$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\sqrt{x_1} - x_1 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} - 1}$$

$$= 2,623310 - \frac{\sqrt{2,623310} - 2,623310 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{2,623310}} - 1} = 2,623310 - \frac{-0,0036464547}{-0,6912939101} = 2,618035$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\sqrt{x_2} - x_2 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} - 1}$$

$$= 2,618035 - \frac{\sqrt{2,618035} - 2,618035 + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{2,618035}} - 1} = 2,618035 - \frac{-6,987567 \cdot 10^{-7}}{-0,6909830653} = 2,618034$$

We stoppen nu de berekening. De vijfde decimaal wijzigt niet meer. We nemen daarom aan dat er zeker 4 decimalen correct zijn. Dus de gevraagde benaderde oplossing is: $\alpha \approx 2,6180$.

We kunnen er ook voor kiezen eerst de iteratiefunctie te vereenvoudigen. Dit kan als volgt.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1}$$

$$= x - \frac{2x - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{1 - 2\sqrt{x}} - \frac{2x - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x - 2x\sqrt{x} - 2x + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}} = \frac{-x - 2\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

Er geldt dus

$$x_0 = 3 \text{ en}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n + 2\sqrt{x_n}}{2\sqrt{x_n} - 1}$$

De berekening verloopt dan als volgt.

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0 + 2\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_0} - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} = 2,623310$$

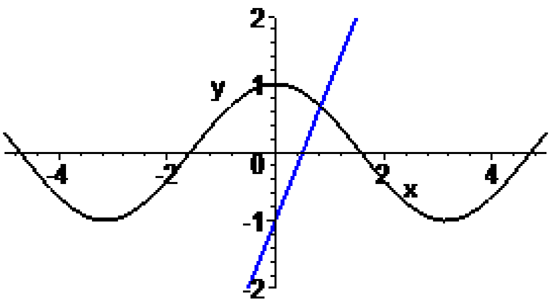
$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1 + 2\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_1} - 1} = \frac{2,623310 + 2\sqrt{2,623310}}{2\sqrt{2,623310} - 1} = 2,618035$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{x_2 + 2\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2} - 1} = \frac{2,618035 + 2\sqrt{2,618035}}{2\sqrt{2,618035} - 1} = 2,618034$$

Het rekenwerk is nu eenvoudiger, maar er moest wel eerst een herleiding plaatsvinden. Bij de eerste methode is ook beter te zien dat de verandering in de benaderde oplossing steeds kleiner wordt.

6b $\cos x = 2x - 1$

We bepalen een startwaarde voor het NR-proces, door een tekening van de grafieken van $y = \cos x$ en $y = 2x - 1$ te maken.



Het is duidelijk dat de gevraagde oplossing in de buurt van $x = 1$ ligt. Bovendien is duidelijk dat er slechts één snijpunt van de grafieken is (dit is analytisch vrij eenvoudig aan te tonen. Een voor de hand liggende keuze voor de startwaarde is $x = 1$.

Nu de iteratiefunctie.
De vergelijking is om te schrijven naar: $\cos x - 2x + 1 = 0$. De gevraagde oplossing is het nulpunt van de functie met voorschrift $y = f(x) = \cos x - 2x + 1$.
De afgeleide van deze functie is: $y = f'(x) = -\sin x - 2$
Voor de iteratiefunctie g van het NR proces geldt daarom:

Er geldt dus

$$x_0 = 1 \text{ en}$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\cos x_n - 2x_n + 1}{-\sin x_n - 2} = x_n + \frac{\cos x_n - 2x_n + 1}{\sin x_n + 2}$$

We zoeken een benaderde oplossing in 4 decimalen en werken in 6 decimalen

Dit geeft:

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos x_0 - 2x_0 + 1}{\sin x_0 + 2} = 1 + \frac{\cos 1 - 2\cdot 1 + 1}{\sin 1 + 2} = 1 + \frac{-0,459698}{2,841471} = 0,838218$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos x_1 - 2x_1 + 1}{\sin x_1 + 2} = 0,838218 + \frac{\cos 0,838218 - 2\cdot 0,838218 + 1}{\sin 0,838218 + 2}$$

$$= 0,838218 + \frac{-0,007647}{2,743453} = 0,835431$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos x_2 - 2x_2 + 1}{\sin x_2 + 2} = 0,835431 + \frac{\cos 0,835431 - 2\cdot 0,835431 + 1}{\sin 0,835431 + 2}$$

$$= 0,835431 + \frac{-3,878466\cdot 10^{-6}}{2,741585} = 0,835430$$

We stoppen nu de berekening. De vijfde decimaal wijzigt niet meer. We nemen daarom aan dat er zeker 4 decimalen correct zijn. Dus de gevraagde benaderde oplossing is: $\alpha \approx 0,8354$.

We kunnen er ook nu weer voor kiezen eerst de iteratiefunctie te vereenvoudigen. Dit kan als volgt.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{\cos x - 2x + 1}{-\sin x - 2} = \frac{x(\sin x + 2)}{\sin x + 2} + \frac{\cos x - 2x + 1}{\sin x + 2}$$

$$= \frac{x\sin x + 2x + \cos x - 2x + 1}{\sin x + 2} = \frac{x\sin x + \cos x + 1}{\sin x + 2}$$

Er geldt dus

$x_0 = 1$ en

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n \sin x_n + \cos x_n + 1}{\sin x_n + 2}$$

De berekening kan dan verder worden uitgevoerd..

7a

Een vergelijking waarvan $\sqrt{10}$ een oplossing is, is $x^2 = 10$. We zoeken dus een nulpunt van de functie $y = f(x) = x^2 - 10$. Als startwaarde kiezen we, zoals in de opgave aangegeven: $x_0 = 3$. In het benaderingsproces hebben we ook de afgeleide van *f* nodig: $f'(x) = 2x$.

We kiezen er voor om eerst de iteratiefunctie te vereenvoudigen. Dit gaat als volgt.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 10}{2x} = \frac{1}{2}\left(2x - x + \frac{10}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{10}{x}\right)$$

Er geldt dus

$x_0 = 3$ en

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right).$$

We zoeken een benaderde oplossing in 6 decimalen en werken in 7 decimalen.

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = 3\frac{1}{6} = 3,1666667$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3,1666667 + \frac{10}{3,1666667}\right) = 3,1622807$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(3{,}1622807 + \frac{10}{3{,}1622807}\right) = 3{,}1622777$$

$$x_4 = g(x_3) = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(3{,}1622777 + \frac{10}{3{,}1622777}\right) = 3{,}1622777$$

Kennelijk wijzigt er niets meer aan de benadering.
Dus geldt: $\sqrt{10} \approx 3{,}162278$

7b

Om $\sqrt[7]{100}$ te kunnen benaderen zoeken we een vergelijking waarvan $\sqrt[7]{100}$ een oplossing is. Een eenvoudige vergelijking die hieraan voldoet is $x^7 = 100$. We zoeken dus een nulpunt van de functie $y = f(x) = x^7 - 100$. Als startwaarde kiezen we, zoals in de opgave aangegeven: $x_0 = 2$. In het benaderingsproces hebben we ook de afgeleide van *f* nodig: $f'(x) = 7x^6$.

We kiezen er voor om eerst de iteratiefunctie te vereenvoudigen. Dit gaat als volgt.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^7 - 100}{7x^6} = \frac{1}{7}\left(7x - x + \frac{100}{x^6}\right) = \frac{1}{7}\left(6x + \frac{100}{x^6}\right)$$

Er geldt dus

$x_0 = 2$ en

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{7}\left(6x_n + \frac{100}{{x_n}^6}\right).$$

We zoeken een benaderde oplossing in 6 decimalen en werken in 7 decimalen.

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{7}\left(6x_0 + \frac{100}{{x_0}^6}\right) = \frac{1}{7}\left(6 \cdot 2 + \frac{100}{2^6}\right) = 1{,}9375$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{7}\left(6x_1 + \frac{100}{{x_1}^6}\right) = \frac{1}{7}\left(6 \cdot 1{,}9375 + \frac{100}{1{,}9375^6}\right) = 1{,}9307690$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{1}{7}\left(6x_2 + \frac{100}{{x_2}^6}\right) = \frac{1}{7}\left(6 \cdot 1{,}9307690 + \frac{100}{1{,}9307690^6}\right) = 1{,}9306977$$

$$x_4 = g(x_3) = \frac{1}{7}\left(6x_3 + \frac{100}{{x_3}^6}\right) = \frac{1}{7}\left(6 \cdot 1{,}9306977 + \frac{100}{1{,}9306977^6}\right) = 1{,}9306977$$

De gevraagde benadering is: $\sqrt[7]{100} \approx 1{,}9306977$