

Module 9

Uitwerkingen van de opdrachten

Hoofdstuk 1 Inleiding

Opdracht 1

Zie voor de gevraagde begrippen de tekst van dit onderdeel.

Hoofdstuk 2 Op buiging belaste doorsneden

Opdracht 2

De vormfactor wordt bepaald door:

$$\alpha = \frac{W_p}{W}$$

De weerstandsmomenten van de gegeven doorsneden kunnen worden bepaald met de theorie uit module 3. Voor een niet-symmetrische doorsnede moet het kleinste (elastische) weerstandsmoment worden aangehouden (W_{onder} of W_{boven}). Het plastisch weerstandsmoment wordt bepaald uit het statisch moment van de oppervlakjes van de doorsnede boven en onder de halveringslijn.

I-profiel (zie figuur 9.1):

Elastisch

$$z_{\text{n.l. boven}} = 194,3 \text{ mm}$$

$$I_{yy} = 16\,145 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$W_b = 831 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Plastisch

$$z_{\text{half boven}} = 267,5 \text{ mm}$$

$$W_p = 1140 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\alpha = \frac{1140}{831} = 1,37$$

Cirkel (zie figuur 9.1):

$$W = \frac{\pi R^3}{4} = 1534 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$z_{\text{half}} = \frac{4R}{3\pi} = 53,1 \text{ mm}$$

$$W_p = 2\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) \frac{4R}{3\pi} = \frac{4R^3}{3} = 2604 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\alpha = \frac{2604}{1534} = 1,70$$

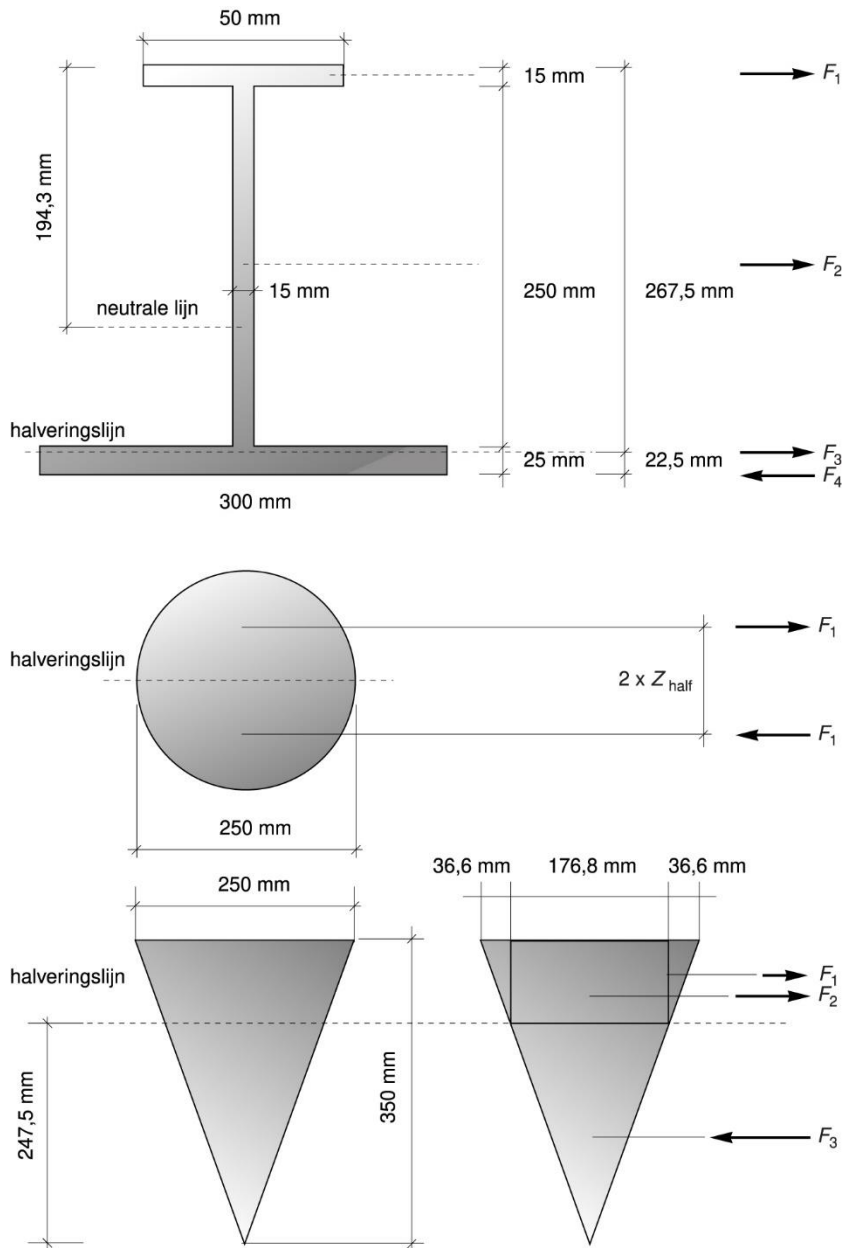
Driehoek (zie figuur 9.1):

$$W = \frac{250 \cdot 350^2}{24} = 1276,0 \text{ mm}^3$$

$$Z_{\text{half onder}} = 247,5 \text{ mm}$$

$$W_p = 21\,875 \cdot \frac{1}{3} \cdot 247,5 + 176,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 102,3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 36,6 \cdot \frac{2}{3} + 102,3^2 = 2985,1 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\alpha = \frac{2985,1}{1276,0} = 2,33$$



Figuur 9.1

Opdracht 3

De benodigde wapening is als volgt te bepalen:

$$M_p = A_s f_{sy} \left(d - \frac{1}{2} x_u \right) \quad \text{met: } x_u = \frac{A_s f_{sy}}{b f'_b}$$

$$200 \cdot 10^6 = A_s \cdot 435 \left(461 - \frac{A_s \cdot 435}{2 \cdot 300 \cdot 21} \right)$$

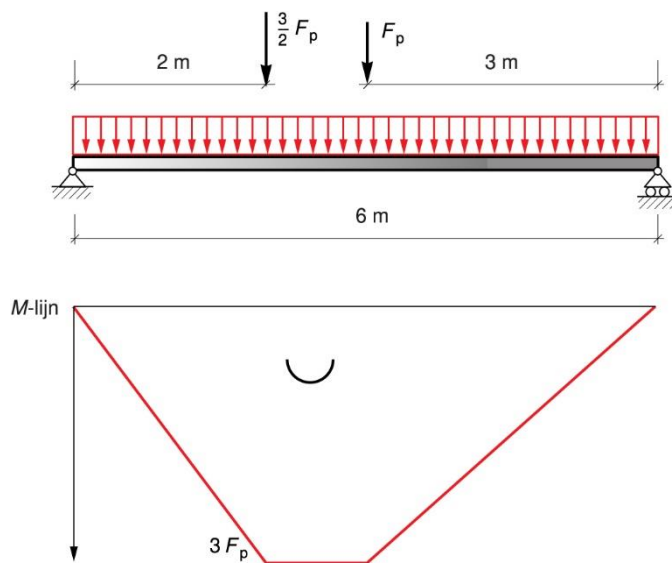
$$15,018 A_s - 200\,535 A_s + 200 \cdot 10^6 = 0$$

$$A_s = 1085 \text{ mm}^2$$

Hoofdstuk 3 Beziggedrag van liggerconstructies

Opdracht 4 en 5

Voor deze ligger moet een bezwijkbelasting worden bepaald. Bezwijken treedt op als ergens in de ligger een volplastisch scharnier ontstaat. De plaats waar een scharnier zal ontstaan, kan worden gevonden door eerst de momentenlijn te bepalen. In figuur 9.2 is deze M -lijn getekend.



Figuur 9.2

Evenwichtsmethode

Het maximale moment kan niet groter worden dan het volplastisch moment. Er moet dus gelden:

$$3F_p = M_p$$

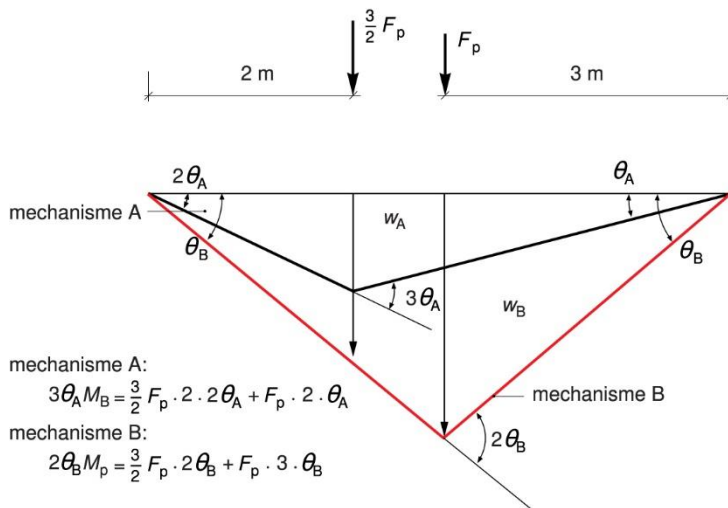
$$F_p = \frac{1}{3} M_p$$

Mechanisme

Het blijkt dat een scharnier kan ontstaan op een plaats precies tussen de twee puntlasten aangezien daar het moment het eerst maximaal wordt. Er kunnen nu twee mechanismen worden geprobeerd.

Het eerste mechanisme is A met een scharnier onder de linker puntlast. Het tweede mechanisme is B met een scharnier onder de rechter puntlast.

Met behulp van figuur 9.3 kan de bezwijkbelasting voor de beide mechanismen worden bepaald.



Figuur 9.3

Mechanisme A: $F_p = \frac{1}{3} M_p$

Mechanisme B: $F_p = \frac{1}{3} M_p$

Blijkbaar maakt het geen verschil welk mechanisme ontstaat. Aan te tonen valt dat elke positie van een plastisch scharnier precies tussen de beide puntlasten dezelfde bezwijkbelasting geeft als de hiervoor onderzochte mechanismen. (Ga dat zelf na!)

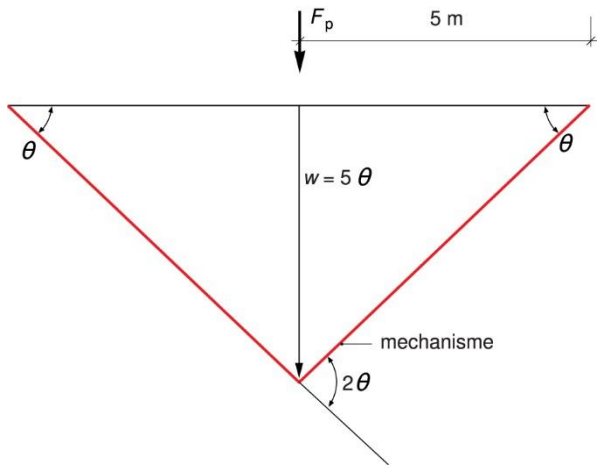
Opdracht 6

De weergegeven constructie is tweevoudig statisch onbepaald. Er zijn drie volplastische scharnieren nodig om een bezwijkmechanisme te verkrijgen. Neem bij de inklemmingen en onder de puntlast een volplastisch scharnier aan. In figuur 9.4 is het mechanisme weergegeven.

Uit deze figuur volgt dat volgens de virtuele arbeidsvergelijking moet gelden:

$$M_p \theta + 2M_p \theta + M_p \theta = F_p \cdot 5\theta$$

$$F_p = \frac{4}{5} M_p$$



Figuur 9.4

Opdracht 7

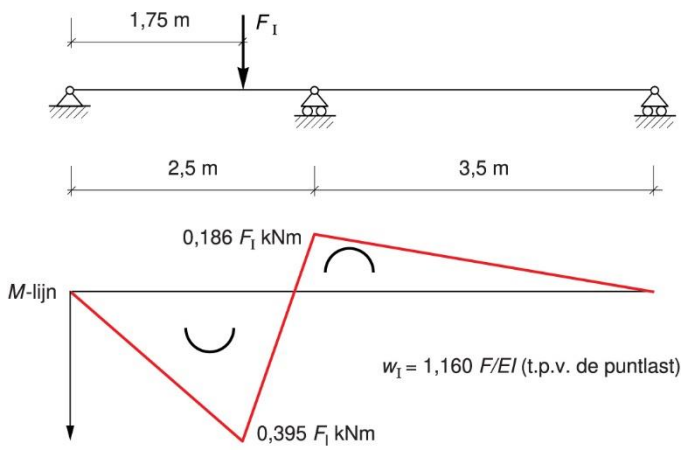
Het volplastisch moment kan worden bepaald door het volplastisch moment van twee rechthoeken van elkaar af te trekken:

$$M_p = \frac{1}{4}bh^2f_y - \frac{1}{4}b_oh_0f_y = \frac{1}{4}(bh^2 - b_oh_0)f_y$$

$$M_p = 0,25(100 \cdot 250^2 - 76 \cdot 226^2) \cdot 235 \cdot 235 = 139 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

$$M_p = 139 \text{ kNm}$$

Voor deze statisch onbepaalde ligger is in figuur 9.5 de M-lijn weergegeven.



Figuur 9.5

Het eerste volplastische scharnier ontstaat onder de puntlast bij een belasting:

$$0,395F_1 = M_p$$

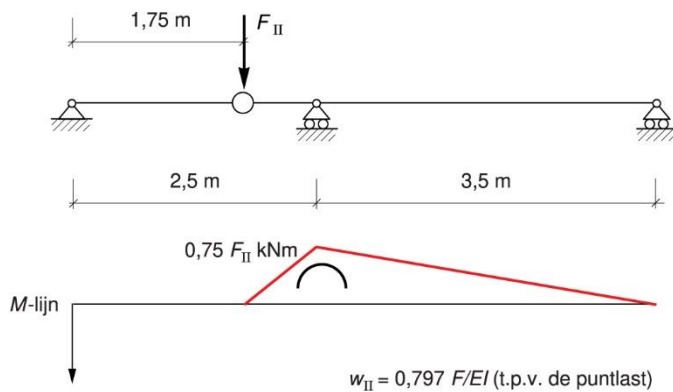
$$F_1 = 2,53M_p$$

De verplaatsing onder de puntlast is dan:

$$w_I = \frac{0,16F_I}{EI} = \frac{0,41M_p}{EI}$$

De verplaatsing kan worden bepaald met de gereduceerde M -lijn. De zakking onder de puntlast is in de M -lijn weergegeven. Ga zelf na of deze zakking klopt!

Er ontstaat nu een ligger met een scharnier onder de puntlast. Wanneer de ligger nu verder wordt belast, ontstaat de momentenlijn van figuur 9.6 als gevolg van deze additionele belasting.



Figuur 9.6

Bij de oplegging rechts van de puntlast was het moment als gevolg van F_I :

$$M_I = 0,186F_I = 0,47M_p$$

Om het volplastisch moment ook hier te bereiken kan een belasting worden toegevoegd (additionele belasting) tot M_p ontstaat.

$$\begin{aligned} 0,75F_{II} &= (1 - 0,47)M_p \\ F_{II} &= 0,71M_p \end{aligned}$$

De verplaatsing onder de puntlast als gevolg van deze additionele belasting is:

$$w_{II} = \frac{0,799F_{II}}{EI} = \frac{0,56M_p}{EI}$$

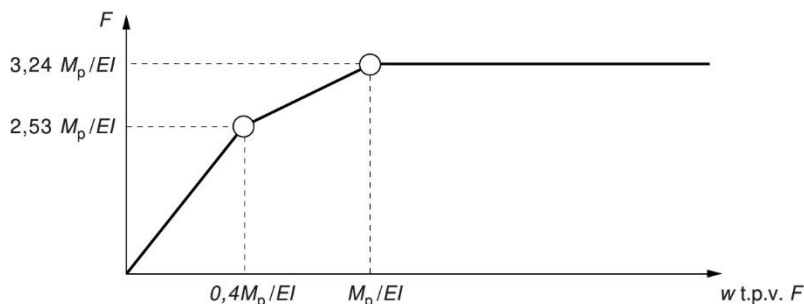
De totale bezwijkbelasting komt hiermee op:

$$F_p = F_I + F_{II} = (2,53 + 0,71)M_p = 3,24M_p$$

Bij het bereiken van deze belasting heeft de ligger op de plaats van de puntlast een zakking bereikt van:

$$w_p = w_I + w_{II} = \frac{(0,41 + 0,56)M_p}{EI} = \frac{0,97M_p}{EI}$$

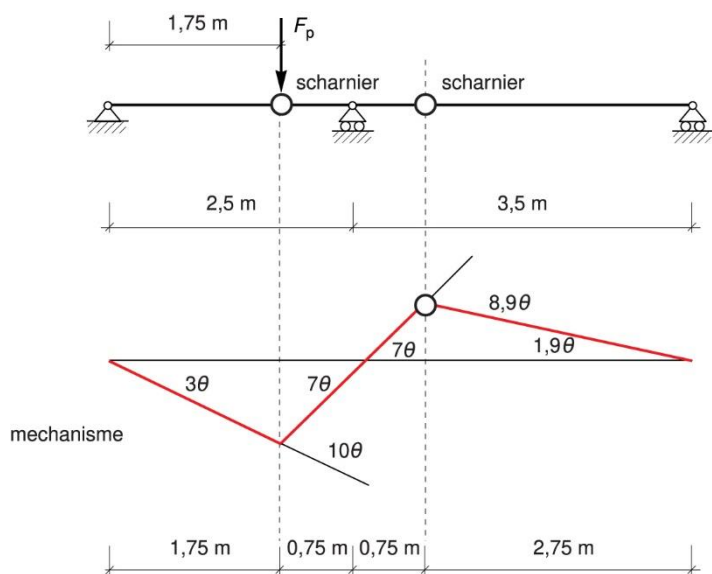
Het last-zakkingsdiagram voor het punt op de plaats van de puntlast op de ligger is weergegeven in figuur 9.7.



Figuur 9.7

De gevonden bezwijklast kan natuurlijk altijd gevonden worden door direct de virtuele arbeidsvergelijking op te stellen voor het beschouwde mechanisme. Toon zelf aan dat dan inderdaad dezelfde bezwijklast wordt gevonden.

Het is verder nog aardig te vermelden dat we ook nog een ander mechanisme kunnen onderzoeken. In figuur 9.8 is dit mechanisme weergegeven. Kinematisch kan dit mechanisme optreden. De vraag is of dit een lagere bezwijklast oplevert dan het tot nu toe bekeken mechanisme.



Figuur 9.8

Uitwerken van de virtuele arbeidsvergelijking voor dit mechanisme levert:

$$10M_p\theta + 8,9M_p\theta = 3\theta \cdot 1,75F_p$$

$$F_p = 3,6M_p$$

Deze bezwijklast is groter dan de eerder gevonden bezwijklast. Het hier beschouwde mechanisme is dus niet maatgevend. Teken zelf de hierbij horende M -lijn en constateer dat het moment ter plaatse van het tussensteunpunt groter moet zijn dan M_p . Dit kan uiteraard niet zo zijn en dus is dit mechanisme niet maatgevend.

Opdracht 8

Het volplastisch moment wordt bepaald door zowel de flenzen als het lijf. Het betreft een symmetrisch profiel waarbij de halveringslijn dus halverwege de profielhoogte ligt. Er geldt:

$$M_p = 2(150 \cdot 15 \cdot 107,5 + 100 \cdot 15 \cdot 50) \cdot 235 = 148,9 \cdot 10^6 \text{ N/mm} = 148,9 \text{ kNm}$$

Als alleen de flenzen worden meegerekend, ontstaat:

$$M_p = 2(150 \cdot 15 \cdot 107,5) \cdot 235 = 113,7 \cdot 10^6 \text{ N/mm} = 113,7 \text{ kNm}$$

Als de normaalspanningen als gevolg van het moment alleen aan de flenzen worden toegekend, dan kan het lijf de dwarskracht opnemen in de vorm van de maximale schuifspanning die dan over het hele lijf kan optreden.

Volgens Von Mises is de schuifspanning, zonder een optredende normaalspanning, maximaal:

$$\tau_{\max} = 0,58f_y = 136,3 \text{ N/mm}^2$$

De maximale dwarskracht in het lijf kan nu worden bepaald:

$$V_p = 200 \cdot 15 \cdot 136,2 = 408,9 \cdot 10^3 \text{ N} = 408,9 \text{ kN}$$

Module 9

Uitwerkingen van de toetsopgaven

Opgave 1

$$M_p = 63,2 \text{ kNm}$$

Opgave 2

$$F_p = 84,4 \text{ kN}$$