Hoofdstuk 4 Functies van twee of meer variabelen

4.13 Herhalingsopgaven

1a

$z = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6$

Doorsnijden met grondvlak geeft

$$0 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + 6 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - 4x + \underline{4-4} + y^2 + 2y + \underline{1-1} + 6 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = -1$$

Omdat de som van twee kwadraten niet negatief kan zijn, is er geen enkel punt van het oppervlak dat in het grondvlak ligt.

Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het grondvlak en hoogte minstens 1 geeft een cirkel. Bijvoorbeeld snijden met het vlak $z = 5$ geeft via een berekening als hierboven

$$5 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Dit is de vergelijking van een cirkel in het vlak $z = 5$ met middelpunt $(2, -1, 5)$ en straal 2.

Doorsnijden met achtervlak $x = 0$ geeft

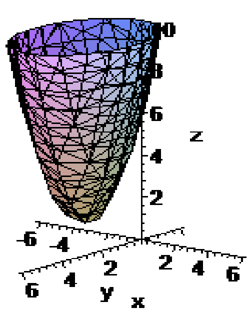
$$z = 0 + y^2 - 0 + 2y + 6 \Rightarrow z = y^2 + 2y + 6 \Rightarrow z = (y+1)^2 - 1 + 6 \Rightarrow (y+1)^2 = z - 5$$

Dit is de vergelijking van een parabool.

Doorsnijden met zijvlak $y = 0$ geeft $z = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow z = (x-2)^2 - 4 + 6 \Rightarrow (x-2)^2 = z - 2$

Ook dit is de vergelijking van een parabool.

Hieronder staat een Maple-plot van het beschreven oppervlak; het is een paraboloïde.
De *x*-as is getekend van -2 tot 6, de *y*-as van -6 tot 6 en de *z*-as van 0 tot 10.



1b

$x^2 + 4z^2 = y^2$

Doorsnijden met grondvlak $x^2+0=y^2 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=y$ of $x=-y$
Dit zijn twee rechte lijnen in het grondvlak.

Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het grondvlak geeft een hyperbool, kies bijvoorbeeld $z=1$: $x^2+4=y^2 \Rightarrow x^2-y^2=-4$

Doorsnijden met achtervlak $x=0$ geeft twee rechte lijnen $0+4z^2=y^2 \Rightarrow y=2z$ of $y=-2z$

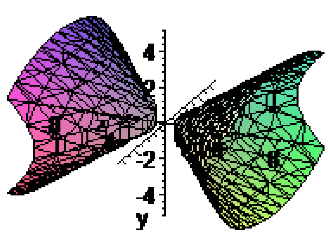
Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het achtervlak geeft een hyperbool, kies bijvoorbeeld $x=4$: $16+4z^2=y^2 \Rightarrow 4z^2-y^2=-16 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{4^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$

Doorsnijden met zijvlak $y=0$: $x^2+4z^2=0 \Rightarrow x=0$ én $z=0$
Dit geeft slechts één punt, namelijk $\mathrm{O}(0,0,0)$

Doorsnijden met een vlak evenwijdig aan het zijvlak geeft een ellips, kies bijvoorbeeld $y=2$:

$$x^2+4z^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{z^2}{1^2}=1$$

Hieronder staat een Maple-plot van het beschreven oppervlak.
De *x*-as is getekend van -6 tot 6, de *y*-as van -8 tot 8 en de *z*-as van -5 tot 5.



2

$u=\mathrm{e}^x(x-y)$, dus $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x)\cdot(x-y)+\mathrm{e}^x\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=\mathrm{e}^x\cdot(x-y)+\mathrm{e}^x\cdot 1=\mathrm{e}^x\cdot(x-y+1)$

en

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cdot(-1)=-\mathrm{e}^x$$

Dus geldt $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cdot(x-y+1)+(-\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\cdot(x-y)=u$

Hiermee is aangetoond wat aangetoond moest worden.

3

Voor de gevraagde maximale relatieve fout geldt

$$\frac{|\Delta Q|}{|Q|}=\frac{\left|\frac{\partial Q}{\partial R}\Delta R\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial I}\Delta I\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial t}\Delta t\right|}{|Q|}=\frac{|I^2t\Delta R|+|2RIt\Delta I|+|RI^2\Delta t|}{|RI^2t|}=$$

$$=\frac{|I^2t\Delta R|}{|RI^2t|}+\frac{|2RIt\Delta I|}{|RI^2t|}+\frac{|RI^2\Delta t|}{|RI^2t|}=\frac{|\Delta R|}{|R|}+2\frac{|\Delta I|}{|I|}+\frac{|\Delta t|}{|t|}=$$

$$=\frac{0,5}{1,5}+2\cdot\frac{0,05}{2,5}+\frac{0,5}{10}=\frac{1}{3}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}=\frac{127}{300}\approx 0,4233$$

4

Voor de gevraagde maximale relatieve fout geldt

$$\frac{|\Delta F|}{|F|}=\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial M}\Delta M\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial m}\Delta m\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial r}\Delta r\right|}{|F|}=\frac{\left|\gamma\frac{m}{r^2}\Delta M\right|+\left|\gamma\frac{M}{r^2}\Delta m\right|+\left|-2\gamma\frac{Mm}{r^3}\Delta r\right|}{\left|\gamma\frac{Mm}{r^2}\right|}=$$

$$=\frac{|\gamma mr\Delta M|+|\gamma Mr\Delta m|+|2\gamma Mm\Delta r|}{|\gamma Mmr|}=\frac{|\gamma mr\Delta M|}{|\gamma Mmr|}+\frac{|\gamma Mr\Delta m|}{|\gamma Mmr|}+\frac{|2\gamma Mm\Delta r|}{|\gamma Mmr|}=$$

$$=\frac{|\Delta M|}{|M|}+\frac{|\Delta m|}{|m|}+2\frac{|\Delta r|}{|r|}=\frac{0,05}{7,0}+2\cdot\frac{0,02}{2,0}+2\cdot\frac{0,05}{5,0}=\frac{1}{140}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}=\frac{33}{700}\approx 0,04714$$

5a

De impliciet gegeven functie $(\sin x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}=0$ is te schrijven als $F(x,y)=0$, met $F(x,y)=(\sin x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}$

Voor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ geldt dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Hieruit volgt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{(\cos x)(\sin y)-\mathrm{e}^{xy}\cdot y}{(\sin x)(\cos y)-\mathrm{e}^{xy}\cdot x}$

5b

De impliciet gegeven functie $\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=0$ is te schrijven als

$F(x,y)=0$, met $F(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Voor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ geldt dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

We bepalen eerst $\frac{\partial F}{\partial x}$ en $\frac{\partial F}{\partial y}$ afzonderlijk

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{y}{y^2+x^2} = \frac{2x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y^2+x^2} = \frac{2y-1}{x^2+y^2}$$

Hieruit volgt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{2x+y}{x^2+y^2}}{\frac{2y-1}{x^2+y^2}} = -\frac{2x+y}{2y-1} = \frac{2x+y}{1-2y}$

6

Omdat (x,y) de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 3 doorloopt geldt

$$x = 3\cos\varphi \text{ en } y = 3\sin\varphi$$

Voor de afgeleide van $z = 3x^2+2y^2$ naar de hoek φ geldt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = 6x\cdot(-3\sin\varphi) + 4y\cdot(3\cos\varphi) =$$
$$= 6\cdot 3\cos\varphi\cdot(-3\sin\varphi) + 4\cdot(3\sin\varphi)\cdot(3\cos\varphi) =$$
$$= -54\sin\varphi\cos\varphi + 36\sin\varphi\cos\varphi = -18\sin\varphi\cos\varphi = -9\sin(2\varphi)$$

7.

Voor de stationaire punten (x,y) geldt dat de beide partiële afgeleiden gelijk moeten zijn aan 0.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-0-6y+0 = 3x^2-6y$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2-0-6x+0 = -3y^2-6x$

Nulstellen levert twee vergelijkingen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2-6y=0 \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -3y^2-6x=0 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{2}y^2$$

De tweede vergelijking invullen in de eerste geeft

$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{8}y^4 \Rightarrow y^4-8y=0 \Rightarrow y\left(y^3-8\right)=0 \Rightarrow y=0 \text{ of } y^3=8 \Rightarrow y=0 \text{ of } y=2$

$y=0$ invullen in de tweede vergelijking levert: $x=0$

$y=2$ invullen in de tweede vergelijking levert: $x=-2$

Er zijn dus twee stationaire punten $(x,y)=(0,0)$ en $(x,y)=(-2,2)$

Voor het bepalen van de aard van de stationaire punten hebben we de tweede afgeleiden nodig

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\,,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-6 \text{ en } C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$$

Voor de Hessiaan H geldt dan $H=AC-B^2=6x\cdot(-6y)-(-6)^2=-36xy-36$

In het punt $(x,y)=(0,0)$ geldt $H=-36\cdot 0\cdot 0-36=-36<0$

Hier is dus sprake van een zadelpunt.

Voor de *z*-coördinaat van dit zadelpunt geldt $z=f(0,0)=0-0-0+2=2$

In het punt $(x,y)=(-2,2)$ geldt: $H=-36\cdot(-2)\cdot 2-36=144-36=108>0$

Bovendien geldt: $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6\cdot(-2)=-12<0$

Hier is dus sprake van een lokaal maximum.

Voor de *z*-coördinaat van het betreffende punt geldt

$z=f(-2,2)=(-2)^3-2^3-6\cdot(-2)\cdot 2+2=-8-8+24+2=10$

8

$\sum x=(-2)+-1+0+1+2=0$

$\sum x^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$

$\sum y=7{,}7+4{,}2+1{,}8+(-1{,}3)+(-5{,}0)=7{,}4$

$\sum xy=(-2)\cdot 7{,}7+(-1)\cdot 4{,}2+0\cdot 1{,}8+1\cdot(-1{,}3)+2\cdot(-5{,}0)=-30{,}9$

aantal waarnemingen: 5

Normaalvergelijkingen van Gauss

$$\begin{cases} a\cdot 10+b\cdot 0=-30{,}9 \\ a\cdot 0+b\cdot 5=7{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a=-30{,}9 \\ 5b=7{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3{,}09\approx -3{,}1 \\ b=1{,}48\approx 1{,}5 \end{cases}$$

Gevraagde eerstegraadsfunctie $y=-3{,}1x+1{,}5$

9

We leiden eerst de formules af waarmee *a* en *b* te bepalen zijn. Dat gaat op dezelfde manier als de afleiding van de normaalvergelijkingen van Gauss voor het bepalen van een rechte lijn met de kleinste kwadratenmethode. We kiezen een parabool, zodanig dat de som van de kwadraten van de afwijkingen ten opzichte van deze parabool zo klein mogelijk is. Met afwijking bedoelen we de verticale afstand tussen een punt op de parabool met dezelfde *x*-coördinaat en het meetpunt. De waarden van *y* op de parabool $y=a+bx^2$ krijgen we door invullen van de *x*-waarde. Bij x_k hoort voor iedere waarde van *k* de *y*-waarde $y(x_k)=a+bx_k{}^2$

Voor *n* meetpunten is de genoemde som van de kwadraten $f(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\left(a+bx_k{}^2-y_k\right)^2$

Dit is een functie van twee onafhankelijke variabelen *a* en *b*. We willen een minimale waarde van $f(a,b)$ bepalen. Het is dan noodzakelijk dat de partiële afgeleiden van de eerste orde gelijk zijn aan nul. Dus moet gelden $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$

Op vergelijkbare wijze als in paragraaf 4.12 leiden we twee vergelijkingen af. Let op: er staat nu ${x_k}^2$ in plaats van x_k en de rol van *a* en *b* is verwisseld. De vergelijkingen zijn

$$\begin{cases} b\sum_{k=1}^{n} {x_k}^4 + a\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left({x_k}^2 y_k\right) \\ b\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 + na = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases} \text{, oftewel } \begin{cases} a\sum {x_k}^2 + b\sum {x_k}^4 = \sum \left({x_k}^2 y_k\right) \\ na + b\sum {x_k}^2 = \sum y_k \end{cases}$$

In de gegeven situatie van de opgave geldt

$$\sum {x_k}^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum {x_k}^4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$$

$$\sum y_k = 1{,}9 + 2{,}5 + 4{,}1 + 6{,}4 + 10{,}0 = 24{,}9$$

$$\sum {x_k}^2 y_k = 0^2 \cdot 1{,}9 + 1^2 \cdot 2{,}5 + 2^2 \cdot 4{,}1 + 3^2 \cdot 6{,}4 + 4^2 \cdot 10{,}0 = 236{,}5$$

aantal waarnemingen: $n = 5$

We bepalen *a* en *b* met behulp van bovenstaand stelsel en vinden

$$\begin{cases} a \cdot 30 + b \cdot 354 = 236{,}5 \\ 5a + b \cdot 30 = 24{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 1{,}98 \\ b \approx 0{,}50 \end{cases}$$

De gevraagde vergelijking van de parabool is daarmee $y = 1{,}98 + 0{,}50x^2$.

10

Het punt C beweegt zich in een rechte lijn. Op $t = 0$ bevindt C zich in het punt $(0,2)$, op $t = 1$ ligt C in het punt $(3,4)$. Maak een tekening van de situatie.

Voor de hoek *A*, die we α noemen, geldt $\tan(\alpha) = \frac{y_C}{x_C} = \frac{2+2t}{3t}$

Hieruit volgt $\alpha = \arctan\left(\frac{2+2t}{3t}\right)$

De gevraagde snelheid is $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$

Er geldt

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\left(\frac{2+2t}{3t}\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{2+2t}{3t}\right)^2}\cdot\frac{3t\cdot 2-(2+2t)\cdot 3}{(3t)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(2+2t)^2}{9t^2}}\cdot\frac{-6}{9t^2}=\frac{-6}{9t^2+(2+2t)^2}=\frac{-6}{13t^2+8t+4}$$

Op $t=1$ geldt dus: $\left[\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1}=\left[\frac{-6}{13t^2+8t+4}\right]_{t=1}=-\frac{6}{25}\,\text{rad/s}$