drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde
voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1
Vijfde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 3

ThiemeMeulenhoff

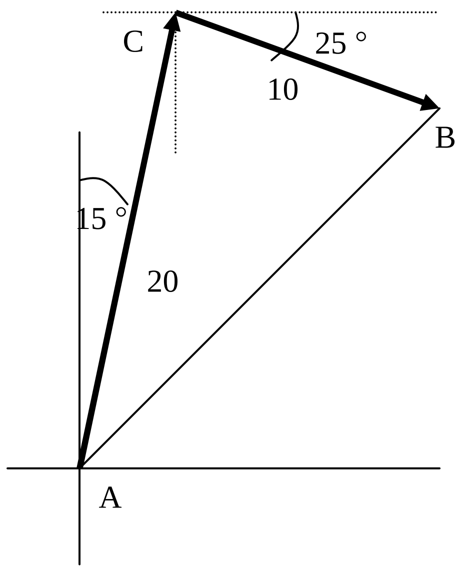
Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 3, paragraaf 3.7

1) Met de cosinusregel wordt AB berekend:

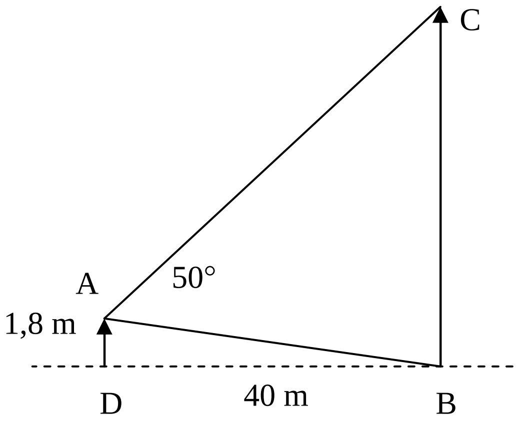
$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos \angle ACB$

$\angle ACB = 15° + (90° - 25°) = 80°$.

$$AB = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 80°}$$
$$= \sqrt{500 - 400 \cdot 0{,}173648}$$
$$= 20{,}75 \text{ km}$$



2)



Eerst wordt hoek ABC berekend:

$$\tan(\angle ABD) = \frac{1{,}8}{40} \Longrightarrow \angle ABD = 2{,}576°$$
$$\Rightarrow \angle CBA = 90° - \angle ABD = 87{,}42°$$

Met de stelling van Pythagoras wordt AB berekend: $AB = \sqrt{(1{,}8)^2 + (40)^2} = 40{,}040$ m

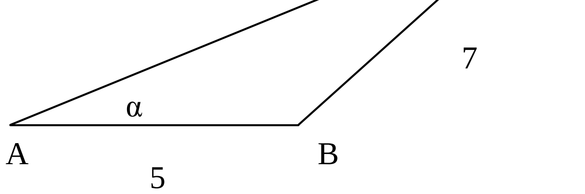
Met de sinusregel wordt BC berekend:

$$\frac{\sin(50°)}{BC} = \frac{\sin(\angle ACB)}{AB} = \frac{\sin(180 - 50 - 87{,}42)}{AB} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin(50°)}{\sin(42{,}58°)} = 45{,}33 \text{ m}$$

$$BC_{\max} = \frac{AB \cdot \sin(52°)}{\sin(180° - 52° - 87{,}42°)} = 48{,}51 \text{ m}$$

$$BC_{\min} = \frac{AB \cdot \sin(48°)}{\sin(180° - 48° - 87{,}42°)} = 42{,}40 \text{ m}$$

3)



Met de sinusregel wordt eerst hoek C berekend: $\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin\gamma}{AB}\Rightarrow \sin\gamma = AB\cdot\frac{\sin\alpha}{BC}$,

Dus $\sin\gamma=\frac{5\cdot\sin(25°)}{7}=0,3018\Rightarrow\gamma=17,57°$.

Hieruit volgt ook hoek B: $\beta=180°-\alpha-\gamma=180°-25°-17,57°=137,43°$.

Met de sinusregel kan nu ook AC berekend worden: $\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin\beta}{AC}\Rightarrow AC=\frac{BC\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Dus $AC=\frac{7\cdot\sin(137,43°)}{\sin(25°)}=11,20$

4a) $\sin(2x)=0,1487=\sin(0,1492\text{ (rad)})\Rightarrow$

$$2x=0,1492+k\cdot 2\pi\vee 2x=\pi-0,1492+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$x=0,0746+k\cdot\pi\vee x=\frac{2,9924}{2}+k\cdot\pi=1,4962+k\cdot\pi$$

4b) $\cos\left(3x-\frac{1}{3}\pi\right)=0,5621=\cos(0,9739)\Rightarrow$

$$3x-\tfrac{1}{3}\pi=\pm 0,9739+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$3x=1,047\pm 0,9739+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$x=0,6737+k\cdot\tfrac{2}{3}\pi\vee x=0,0244+k\cdot\tfrac{2}{3}\pi$$

4c) $\tan\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=4,6785=\tan(1,3602)\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{2}\pi-x=1,3602+k\cdot\pi\Rightarrow$$

$$x=\tfrac{1}{2}\pi-1,3602+k\cdot\pi\Rightarrow$$

$$x=0,2106+k\cdot\pi$$

4d) $\arcsin(2x)=\frac{1}{3}\pi\Rightarrow 2x=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{1}{4}\sqrt{3}$

5a) methode 1: $\sin x=\cos x\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=1=\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)\Rightarrow x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$

methode 2: $\sin x=\cos x\Rightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=\cos x\Rightarrow\frac{1}{2}\pi-x=\pm x+k\cdot 2\pi\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{2}\pi-x=\pm x+k\cdot 2\pi\Rightarrow 2x=\tfrac{1}{2}\pi\pm k\cdot 2\pi\Rightarrow x=\tfrac{1}{4}\pi\pm k\cdot\pi$$

5b)

$$\sin\left(2x-\tfrac{1}{4}\pi\right)=\cos(x-1)=\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi-(x-1)\right)\Rightarrow$$

$$2x-\tfrac{1}{4}\pi=\tfrac{1}{2}\pi-x+1+k\cdot 2\pi \vee 2x-\tfrac{1}{4}\pi=\pi-\left(\tfrac{1}{2}\pi-x+1\right)+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$3x=\tfrac{3}{4}\pi+1+k\cdot 2\pi \vee x=\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\pi-1+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$3x=3{,}3562+k\cdot 2\pi \vee x=\tfrac{3}{4}\pi-1+k\cdot 2\pi=1{,}3562+k\cdot 2\pi\Rightarrow$$

$$x=1{,}1187+k\cdot\tfrac{2}{3}\pi \vee x=1{,}3562+k\cdot 2\pi$$

5c) $\tan x=\sin x\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x=0\Rightarrow \sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)=0\Rightarrow \sin x=0\vee\cos x=1\Rightarrow$

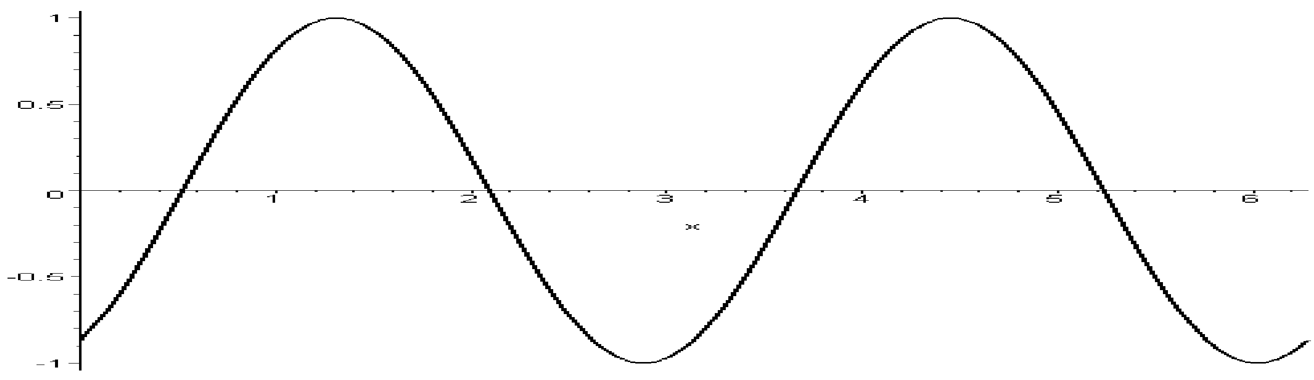
$$x=k\cdot\pi\vee x=k\cdot 2\pi\Rightarrow x=k\cdot\pi$$

5d) $(\cos x)^2=\tfrac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\Rightarrow$

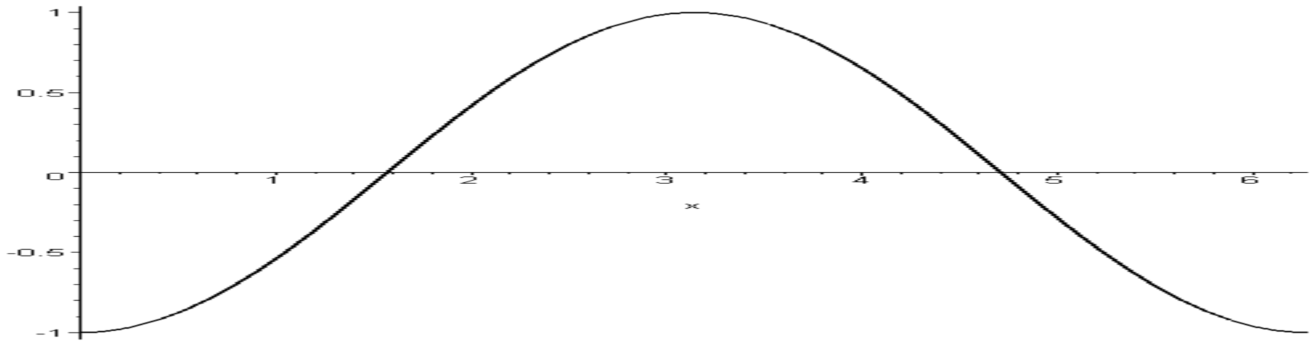
$$\cos x=\cos\left(\pm\tfrac{1}{4}\pi\right)=\cos(\pm 0{,}7854)\vee\cos x=\cos\left(\pm\tfrac{3}{4}\pi\right)=\cos(\pm 2{,}3562)\Rightarrow$$

$$x=\pm 0{,}7854+k\cdot 2\pi\vee x=\pm 2{,}3562+k\cdot 2\pi$$

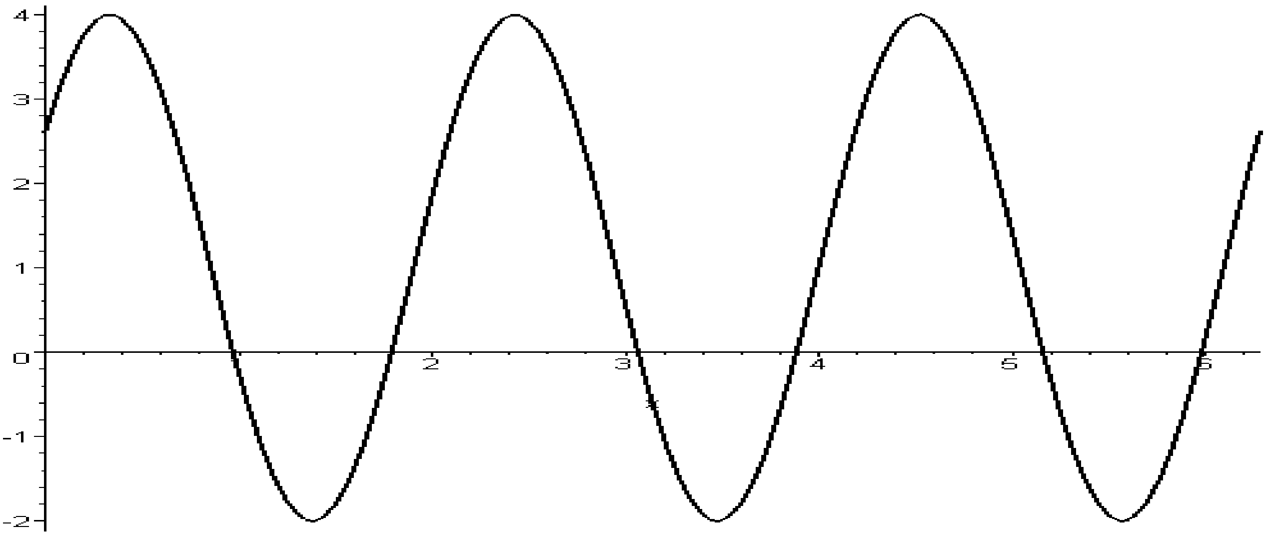
6a) De grafiek van $f(x)=\sin\left(2x-\tfrac{1}{3}\pi\right)=\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x)=\sin(2x)$ door deze over een afstand $\tfrac{1}{3}\pi$ naar rechts te verplaatsen (de grafiek van $f_1(x)=\sin(2x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x)=\sin x$ door deze met een factor 2 in te krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een sinusfunctie met periode $\tfrac{2\pi}{2}=\pi$, amplitude 1, voorlopig beginpunt $\left(\tfrac{1}{3}\pi,0\right)$ en evenwichtslijn $y=0$.



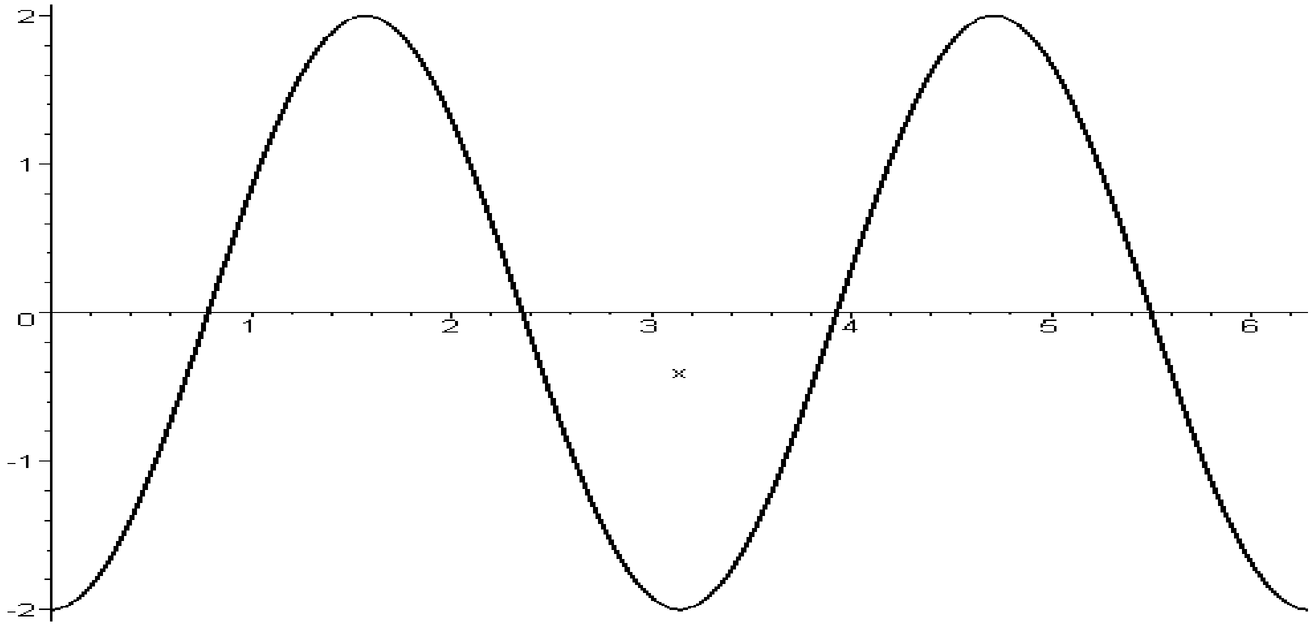
6b) De grafiek van $f(x)=\cos(\pi-x)=[\cos\pi\cdot\cos x+\sin\pi\cdot\sin x]=-\cos x$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x)=\cos x$ door deze te spiegelen t.o.v. de x-as.



6c) De grafiek van $f(x) = 3 \cdot \cos(3x-1)+1 = 3 \cdot \cos\left(3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)+1$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x) = \cos(3x)$ door deze over een afstand $\frac{1}{3}$ naar rechts te verplaatsen , de y-coördinaten met 3 te vermenigvuldigen (oprekken) en vervolgens met een bedrag 1 omhoog te schuiven (de grafiek van $f_1(x) = \cos(3x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x) = \cos x$ door deze met een factor 3 in te krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een cosinusfunctie met periode $\frac{2}{3}\pi$, amplitude 3, voorlopig beginpunt $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$ en evenwichtslijn $y = 1$.



6d) De grafiek van $f(x) = -2 \cdot \sin\left(2x+\frac{1}{2}\pi\right) = -2 \cdot \sin\left(2\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\right)$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x) = \sin(2x)$ door deze over een afstand $\frac{1}{6}\pi$ naar links te verplaatsen , de y-coördinaten met -2 te vermenigvuldigen (oprekken en spiegelen t.o.v. x-as); (de grafiek van $f_1(x) = \sin(2x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x) = \sin x$ door deze met een factor 2 in te krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een sinusfunctie met periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$, amplitude 2, voorlopig beginpunt $\left(-\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ of $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ en evenwichtslijn $y = 0$.



7) $(\sin x+\cos x)^2=(\sin x)^2+2\sin x\cos x+(\cos x)^2$

$$=(\sin x)^2+(\cos x)^2+2\sin x\cos x$$

$$=1+\sin(2x)$$

8) $\cos(2x)=2(\cos x)^2-1\Rightarrow$

$$\cos x=2\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)^2-1\Rightarrow$$

$$2\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)^2=1+\cos x\Rightarrow$$

$$\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)^2=\tfrac{1}{2}(1+\cos x)$$

9a) $\cos(2x)+\cos x=2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}(2x+x)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(2x-x)\right)$

$$=2\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$

9b) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin x+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos x\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)+\cos x\cdot\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{1}{4}\pi\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\left(x+\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi-x\right)$$

9c) $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}(x-y+(x+y))\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x+y-(x-y))\right)$

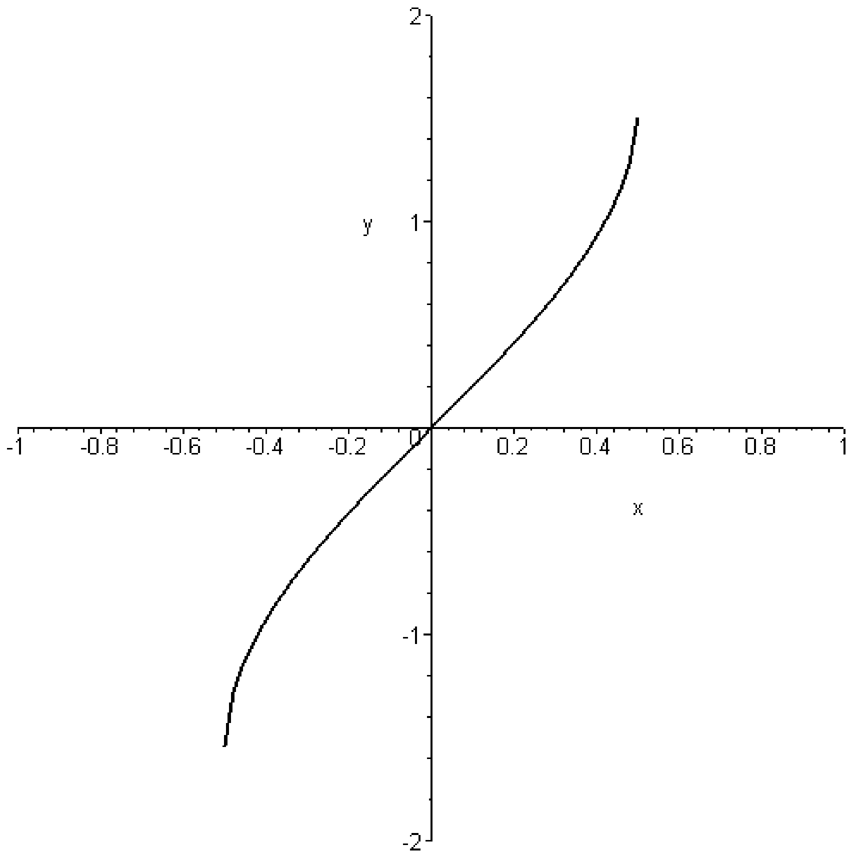
$$=2\cdot\sin\left(x\right)\sin\left(y\right)$$

9d) $\sin(2x)-\sin(3x)=2\cos\left(\frac{1}{2}(2x+3x)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(2x-3x)\right)$

$$=2\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$=-2\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

10) De grafiek van $f(x)=\arcsin(2x)$ ontstaat uit de grafiek van $f_1(x)=\arcsin(x)$ door deze met een factor 2 in te krimpen in de richting van de verticale as.



$\arcsin(2x)<0,67\Rightarrow$

$\arcsin(2x)<\arcsin(\sin(0,67))\Rightarrow$

$-1\le 2x<\sin(0,67)$

$-1\le 2x<0,6210\Rightarrow$

$-\frac{1}{2}\le x<0,3105\Rightarrow$

$-0,5\le x<0,3105$