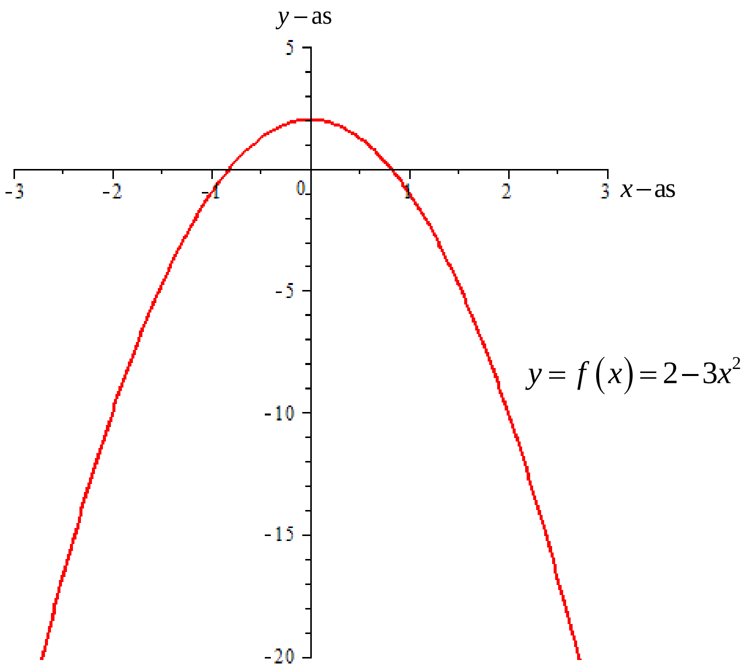
Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 5 Functies

1

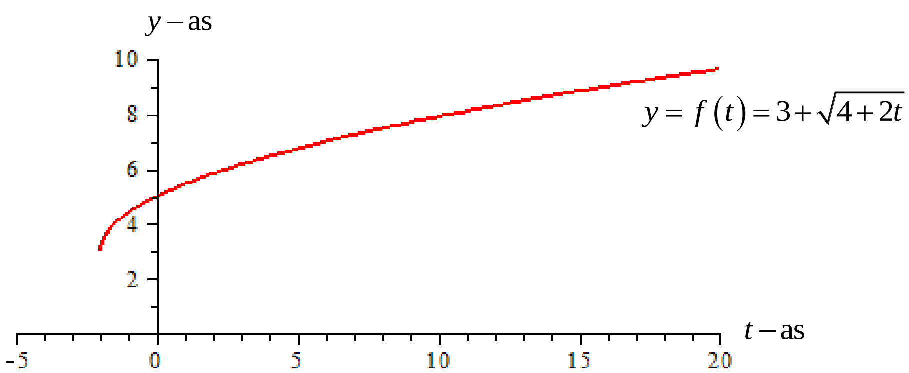
a Voor het domein geldt $D_f = \mathbb{R}$: voor elke waarde van *x* bestaat de functiewaarde *y*
Een schets van de grafiek



Figuur 5.1

Voor het bereik geldt: $B_f = \langle -\infty, 2]$.

b Voor het domein bedenken we dat de wortel uit een negatief getal niet bestaat, zodat moet gelden: $4+2t \geq 0$. De oplossing van deze ongelijkheid is: $t \geq -2$, zodat $D_f = [-2, \infty\rangle$. Een schets van de grafiek



Figuur 5.2

Voor het bereik geldt: $B_f = [3, \infty\rangle$.

2. Berekenen het functievoorschrift van de lijn die gaat door de gegeven punten:.

a $(-2,1)$ en $(7,3)$ in het *xy*-vlak.

Algemene vorm vergelijking lijn: $y = ax + b$

$$a = \text{rc} = \frac{\text{toename } y\text{-waarde}}{\text{toename } x\text{-waarde}}$$

$$= \frac{3-1}{7-(-2)} = \frac{2}{9}$$

De vergelijking van de lijn is dan: $y = \frac{2}{9}x + b$

De lijn gaat door het punt $(-2,1)$, dit resulteert in de vergelijking:

$$1 = \frac{2}{9} \cdot -2 + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$$

Het functievoorschrift van de lijn: $y = \frac{2}{9}x + \frac{13}{9}$.

b Invullen van de gegeven punten in $v = a \cdot t + b$ levert het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = -2 \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = -2 \end{cases} -$$

$$-4a = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4}$$

Substitutie van deze waarde van *a* in de eerste vergelijking leidt tot:

$$-\frac{7}{4} + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 + \frac{7}{4} = \frac{27}{4}$$

Het functievoorschrift van de lijn is weer: $v = -\frac{7}{4}t + \frac{27}{4}$.

3.

a We lossen op de vergelijking $2x - 3 = -x + 5$:

$$2x - 3 = -x + 5 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

De *y*-coördinaat van het snijpunt: $g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3} + 5 = \frac{7}{3}$

Het snijpunt is: $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

b We lossen op de vergelijking $3x - 7 = 6x + 1$:

$$3x - 7 = 6x + 1 \Leftrightarrow -3x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

De y-coördinaat van het snijpunt: $f\left(-\frac{8}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)-7=-15$

Het snijpunt is: $\left(-\frac{8}{3},-15\right)$.

4.

a

$$\begin{aligned} x^2+12x+10 &= x^2+12x+36-36+10 \\ &= (x+6)^2-26 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} -2t^2+12t-5 &= -2\left(t^2-6t\right)-5 \\ &= -2\left((t-3)^2-9\right)-5 \\ &= -2(t-3)^2+18-5 \\ &= -2(t-3)^2+13 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x^2+4x+3 &= \tfrac{2}{5}\left(x^2+10x\right)+3 \\ &= \tfrac{2}{5}\left((x+5)^2-25\right)+3 \\ &= \tfrac{2}{5}(x+5)^2-10+3 \\ &= \tfrac{2}{5}(x+5)^2-7 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned} -6x^2+18x+5 &= -6\left(x^2-3x\right)+5 \\ &= -6\left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right)+5 \\ &= -6\left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\right)+5 \\ &= -6\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{27}{2}+5 \\ &= -6\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{37}{2} \end{aligned}$$

5.

a De coëfficiënt van x^2 is 1: een positieve waarde, zodat de grafiek een dalparabool is.
De top kunnen wordt berekend met kwadraatafplitsen:

$$y=x^2+8x-20=(x+4)^2-36$$

De coördinaten van de top zijn: $(-4,-36)$.

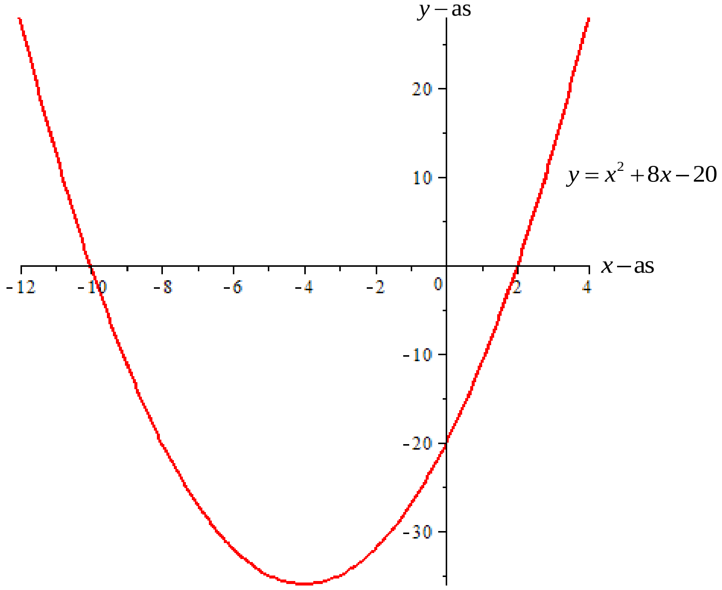
Het snijpunt met de y-as is $(0,-20)$.

De *x*- coördinaten van de snijpunten met de *x*-as zijn de oplossingen van de vergelijking: $x^2+8x-20=0$

$x^2+8x-20=0 \Leftrightarrow (x+10)(x-2)=0 \Rightarrow x=-10 \vee x=2$

De snijpunten met de *x*-as zijn: $(-10,0)$ en $(2,0)$.

. Een grafiek kan nu getekend worden, zie figuur 5.3



b De coëfficiënt van t^2 is -3: een negatieve waarde, zodat de grafiek een bergparabool is.

De top kunnen we vinden met kwadraatafplitsen:

$$\begin{aligned} s=-3t^2+12t-10 &= -3\left(t^2-4t\right)-10 \\ &= -3\left((t-2)^2-4\right)-10 \\ &= -3(t-2)^2+12-10 \\ &= -3(t-2)^2+2 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn: $(2,2)$.

Het snijpunt met de *s*-as is $(0,-10)$.

De snijpunten van de parabool met de *t*-as bepalen we met de *abc*-formule.

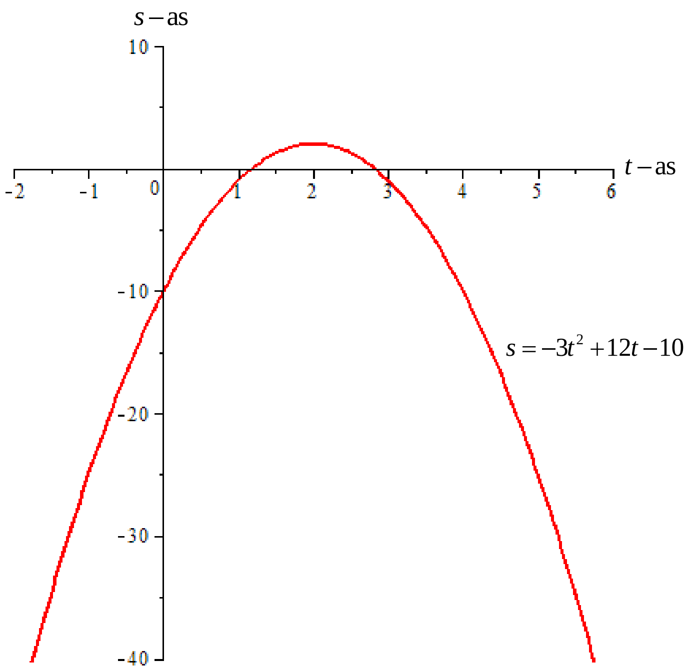
Voor de discriminant *D* geldt: $D=12^2-4\cdot -3\cdot -10=24>0$.

De *t*-coördinaten van de snijpunten met de *t*-as zijn:

$$t_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{24}}{2\cdot(-3)}=\frac{-12\pm 2\sqrt{6}}{-6}=2\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

Snijpunten met de de *t*-as zijn: $\left(2-\frac{1}{3}\sqrt{6}\,,0\right)$ en $\left(2+\frac{1}{3}\sqrt{6}\;2,0\right)$.

De grafiek kan nu getekend worden, zie figuur 5.4



Figuur 5.4

c De coëfficiënt van x^2 is $\frac{1}{5}$: een positieve waarde, zodat de grafiek een dalparabool is.

De top berekenen we met kwadraatafplitsen:

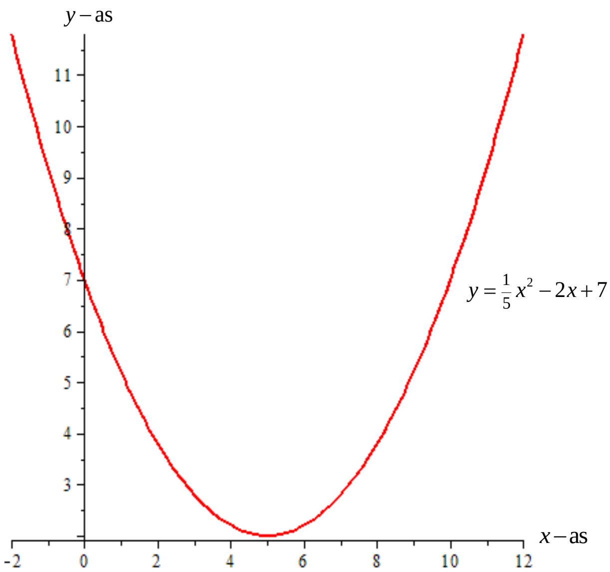
$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{5}x^2-2x+7=\tfrac{1}{5}\left(x^2-10x\right)+7 \\ &= \tfrac{1}{5}\left(\left(x-5\right)^2-25\right)+7 \\ &= \tfrac{1}{5}\left(x-5\right)^2-5+7 \\ &= \tfrac{1}{5}\left(x-5\right)^2+2 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn: $(5,2)$.

Het snijpunt met de *y*-as is $(0,7)$.

Er zijn geen snijpunten met de *x*-as, omdat de top van de dalparabool boven de *x*-as ligt

De grafiek is geschetst in figuur 5.5



Figuur 5.5

6.

a De x-coördinaten van de snijpunten zijn oplossingen van de vergelijking $x^2-6x+5=2x+5$:

$$x^2-6x+5=2x+5 \Leftrightarrow x^2-8x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-8)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=8$$

De bijbehorende y-coördinaten zijn:

$$x=0 \Rightarrow y=5$$
$$x=8 \Rightarrow y=21$$

De snijpunten zijn : $(0,5)$ en $(8,21)$

b De x-coördinaten van de snijpunten zijn oplossingen van de vergelijking $-x^2+8x+2=3x^2+8x$:

$$-x^2+8x+2=3x^2+8x \Leftrightarrow 4x^2=2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \vee x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

De bijbehorende y-coördinaten zijn:

$$x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y=\tfrac{3}{2}-4\sqrt{2}$$
$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y=\tfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$$

De snijpunten zijn : $\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\tfrac{3}{2}-4\sqrt{2}\right)$ en $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\tfrac{3}{2}+4\sqrt{2}\right)$

7.

a Op te lossen vergelijking: $-4,9t^2+50t=0$

$$-4,9t^2+50t=0 \Leftrightarrow t(-4,9t+50)=0$$
$$\Leftrightarrow t=0 \vee -4,9t+50=0$$
$$\Rightarrow t=0 \vee t=\frac{50}{4,9} \approx 10,2041$$

Na $10,2041$ sec is het projectiel weer op de grond.

b Voor het domein geldt $D_h=[0;10,2041]$:

c,d De coördinaten van de top worden berekend met kwadraat afsplitsen.

$$\begin{aligned} h(t) &= -4,9t^2+50t \\ &= -4,9\left(t^2-\frac{50}{4,9}t\right) \\ &= -4,9\left(\left(t-\frac{25}{4,9}\right)^2-\left(\frac{25}{4,9}\right)^2\right) \\ &= -4,9\left(t-\frac{25}{4,9}\right)^2+\frac{625}{4,9} \end{aligned}$$

Het hoogste punt wordt bereikt op tijdstip $t = \frac{25}{4{,}9} \approx 5{,}102$ sec

De maximale hoogte: $h = \frac{625}{4{,}9} \approx 127{,}551$ m

8. We berekenen de discriminant:

$D = b^2 - 4ac = 36 - 4p$

a De grafiek heeft geen snijpunten met de *x*-as als $D < 0$:

$D < 0 \Leftrightarrow 36 - 4p < 0 \Leftrightarrow p > 9$

b De grafiek heeft 2 snijpunten met de *x*-as als $D > 0$:

$D > 0 \Leftrightarrow 36 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < 9$

c De grafiek heeft een raakpunt met de *x*-as als $D = 0$:

$D = 0 \Leftrightarrow 36 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 9$