Hoofdstuk 3 Matrices en determinanten

3.8 Herhalingsopgaven

1a

$$3A+2B=3\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3 & -8\\ 9 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -19\\ 18 & 10\end{pmatrix}$$

1b

$A+2B+D$ is niet mogelijk.

1c

$$\left(B-A\right)^T=\left(\begin{pmatrix}3 & -8\\ 9 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}0 & -7\\ 9 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 9\\ -7 & 0\end{pmatrix}$$

1d

$$BD=\begin{pmatrix}3 & -8\\ 9 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-40 & 9 & -12-8\\ -9+10 & 27 & -36+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-43 & 9 & -20\\ 1 & 27 & -34\end{pmatrix}$$

DB is niet mogelijk.

1e

$$DC=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-3-4 & 6+24 & -2-15\\ 15+1 & -6 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 30 & -17\\ 16 & -6 & 10\end{pmatrix}$$

$$CD^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-8 & 15+2\\ 1+6+20 & -5-5\\ -1-18 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 17\\ 27 & -10\\ -19 & 5\end{pmatrix}$$

2a

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{2} & -3 & 1 & -2\\ 4 & 4 & -3 & 6\\ 2 & 3 & -1 & -10\end{array}\right)\begin{array}{cc}-2 & -1\\ \downarrow & \\ & \downarrow\end{array}\quad\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 10 & -5 & 10\\ 0 & 6 & -2 & -8\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&-2\\0&2&-1&2\\0&3&\boxed{-1}&-4\end{array}\right)\begin{array}{ll}&\uparrow\\\uparrow&\\-1&1\end{array}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-6\\0&\boxed{-1}&0&6\\0&3&-1&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\3\\\downarrow\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-6\\0&-1&0&6\\0&0&1&-14\end{array}\right)\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\-1\\\ \end{array}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&-6\\0&0&1&-14\end{array}\right)$$

Het bijbehorende stelsel luidt $\begin{cases}x_1 \qquad\quad = -3\\ \quad x_2 \qquad = -6\\ \qquad\quad x_3 = -14\end{cases}$

Oplossing: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\-14\end{pmatrix}$

2b

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&5&1\\1&-1&5&1\\6&-6&6&2\end{array}\right)\begin{array}{ll}-1&-6\\\downarrow&\\&\downarrow\end{array}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&1\\0&0&0&0\\0&0&-24&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}6\\\\-\frac{1}{4}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}6&-6&30&6\\0&0&6&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\uparrow\\-5\end{array}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}6&-6&0&1\\0&0&6&1\end{array}\right)$$

Meer kolommen zijn er niet schoon te vegen zonder de reeds verkregen schoongeveegde kolommen te verstoren. Het stelsel dat overblijft is

$$\begin{cases}6x_1 - 6x_2 \qquad = 1\\ \qquad\qquad 6x_3 = 1\end{cases}$$

Stel $x_2 = \alpha$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is $x_1 = \frac{1}{6} + \alpha$; $x_3 = \frac{1}{6}$

Algemene oplossing $\quad \vec{x} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

2c

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 5 & -3 \\ 2 & -6 & 6 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} -1\ -2 \\ \downarrow \\ \qquad\downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & \boxed{4} & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \uparrow \\ -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Van het bijbehorende stelsel luidt de tweede vergelijking: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$
Hier kan geen enkele waarde van x_1, x_2 en x_3 aan voldoen: het stelsel is strijdig.

3a

$$A^2 - 4A + I = O \Leftrightarrow I = 4A - A^2 \Leftrightarrow A^{-1}I = A^{-1}\left(4A - A^2\right)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = 4I - A$$

3b

$$A^2 - 4A + I = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4+p & 4p \\ 4 & 4+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4p \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3+p & 0 \\ 0 & -3+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p = 3$$

3c

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A|I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ -2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} 2 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \updownarrow \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opmerking: inderdaad geldt $A^{-1} = 4I - A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4a

Het stelsel is van de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$, waarbij $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

4b

Inverse matrix bestaat als $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{array}{|ccc|l} 2 & -3 & 5 & \uparrow \\ 0 & 5 & -p & \\ \boxed{1} & p & 1 & -2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -3-2p & 3 \\ 0 & 5 & -p \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-2p & 3 \\ 5 & -p \end{vmatrix} = 2p^2 + 3p - 15$$

$$|A| = 0:\ 2p^2 + 3p - 15 = 0$$

We lossen deze vergelijking op met de abc-formule

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 129$$

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{129}$$

Inverse matrix bestaat voor $p \neq -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{129}$

4c

Inverse matrix berekenen voor $p = 1$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ \\ -2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \uparrow \\ 1 & 3 \\ \downarrow & \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ 5 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{10} & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 30 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{ll} -1 & -3 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -3 & -4 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -5 \\ 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & -10 \\ 10 & 0 & 0 & -6 & -8 & 22 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -6 & -8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Er volgt $\qquad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & -8 & 22 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

4d

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & -8 & 22 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5

Dit stelsel is van de vorm $A\vec{x}=\vec{b}$, met

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Regel van Cramer $x_3=\dfrac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b},\vec{a}_4\right)}{|A|}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & \boxed{-1} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \uparrow \\ \\ 2 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot 5\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1\ -2 \\ \downarrow \\ \ \ \downarrow \end{matrix}=-5\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}=-5\cdot 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}=-5\cdot 13=-65$$

Omdat $|A|\neq 0$ is de regel van Cramer toe te passen.

$$\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b},\vec{a}_4\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & \boxed{-1} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \uparrow \\ \\ 2 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-5\cdot 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-40$$

$$\leftarrow\ 1$$

$$x_3=\frac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b},\vec{a}_4\right)}{|A|}=\tfrac{-40}{-65}=\tfrac{8}{13}$$

6a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & q & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

6b

$$\left(A\,|\,\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & p \\ -1 & q & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \uparrow \\ -2\ 1 \\ \downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & 1-2p \\ 1 & 2 & -1 & p \\ 0 & q+2 & -3 & p \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & \boxed{5} & 1-2p \\ 5 & 10 & -5 & p \\ 0 & 5q+10 & -15 & p \end{array}\right)\begin{array}{l} 1\ 3 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & 1-2p \\ 5 & 5 & 0 & 1+3p \\ 0 & 5q-5 & 0 & 3-p \end{array}\right)$$

Als $5q-5 \neq 0$, dat is zo als $q \neq 1$, dan kunnen we de totaalmatrix verder schoonvegen en hebben we precies één oplossing voor elke waarde van *p*.
Voor $q=1$ en $p=3$ wordt de derde vergelijking in de laatste totaalmatrix $0x_1+0x_2+0x_3=0$, zodat het stelsel dan oneindig veel oplossingen heeft.
Voor $q=1$ en $p \neq 3$ is het stelsel strijdig.
Samenvattend hebben we

- één oplossing als $q \neq 1$ en $p \in \mathbb{R}$
- het stelsel heeft oneindig veel oplossingen voor $q=1 \wedge p=3$
- het stelsel is strijdig als $q=1 \wedge p \neq 3$

6c

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ \boxed{-1} & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ 1\ 2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

Omdat $|A| \neq 0$ is de regel van Cramer toepasbaar.

$$\det\left(\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)=\begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} 2 \\ \downarrow \\ \ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{array}{c} \det\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{a}_3\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \\ -2 \qquad\quad \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ \boxed{-1} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 \\ 2 \ \rightarrow \end{array}$$

Voor de oplossing vinden we

$$x_1 = \frac{\det\left(\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)}{|A|} = -2,\ x_2 = \frac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{a}_3\right)}{|A|} = 1 \text{ en } x_3 = \frac{\det\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}\right)}{|A|} = 2$$

6d Voor $q = 1$

6e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7a

De eigenwaarden zijn oplossingen van

$$0 = |A - \lambda I| = \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} 2-6\lambda & 5 & -1 \\ 2 & -1-6\lambda & 5 \\ \boxed{2} & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \uparrow \\ -1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} 2-6\lambda & 5 & -1 \\ 0 & -3-6\lambda & 3+6\lambda \\ 2 & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6^3}(3+6\lambda)\begin{vmatrix} 2-6\lambda & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 2 & 2 & 2-6\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 \rightarrow & \end{array}$$

$$= \frac{1}{6^3}(3+6\lambda)\begin{vmatrix} 2-6\lambda & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4-6\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6^3}(3+6\lambda)(-1)\begin{vmatrix} 2-6\lambda & 4 \\ 2 & 4-6\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6^3}(3+6\lambda)\left\{(2-6\lambda)(4-6\lambda)-8\right\}$$

$$= -\frac{1}{6^3}(3+6\lambda)\left(36\lambda^2-36\lambda\right)$$

$$= -\frac{1}{6^3}(3+6\lambda)36\lambda(\lambda-1)$$

zodat de eigenwaarden van A zijn: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = 1$

Voor $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ wordt het op te lossen stelsel $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & \boxed{-1} & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 5\ 5 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 27 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 27 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\,-5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

Kies $x_1 = \alpha$ dan is $x_2 = -\alpha$, zodat de algemene oplossing is $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

We kiezen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voor $\lambda = \lambda_2 = 0$ wordt het op te lossen stelsel $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\,-1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1\,-1 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Kies $x_3 = \alpha$ dan is $x_2 = \alpha$ en $x_1 = -2\alpha$, zodat de algemene oplossing is $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

We kiezen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voor $\lambda = \lambda_3 = 1$ wordt het op te lossen stelsel $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\ 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1\ -1 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

Kies $x_3 = \alpha$ dan is $x_2 = \alpha$ en $x_1 = \alpha$, zodat de algemene oplossing is $\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

We kiezen $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7b

$$\det\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \uparrow \\ 1 \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Omdat $\det\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right) \neq 0$ is het stelsel een basis.

7c

Het inwendig product van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ is niet nul: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = -3$. Dit betekent dat de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ niet loodrecht op elkaar staan en dat de eigenvectoren dus niet onderling loodrecht op elkaar staan.

7d

We schrijven $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$

Het op te lossen stelsel is $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$

Schoonvegen van de totaalmatrix van het stelsel leidt tot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} & \uparrow \\ \uparrow & \\ -3 & -2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Er volgt $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ en $\alpha_3 = 1$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_v$

8

A is een symmetrische matrix en daarmee diagonaliseerbaar.

We berekenen een matrix *V* van eigenvectoren zodat $D = V^{-1}AV$ en vervolgens A^5 volgens $A^5 = VD^5V^{-1}$

De eigenwaarden zijn oplossingen van

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \boxed{2} & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-1 \rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1+\lambda \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & \boxed{1} \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ 1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & 7-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\left(-\lambda(7-\lambda) - 8\right) = -(1+\lambda)\left(\lambda^2 - 7\lambda - 8\right)$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda - 8)(\lambda + 1)$$

De eigenwaarden van A zijn $\lambda_{1,2} = -1$ en $\lambda_3 = 8$

Voor $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ wordt het op te lossen stelsel $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Dit stelsel is gelijkwaardig met de vergelijking $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

Kies $x_2 = \alpha$ en $x_3 = \beta$, dan is $x_1 = -2\alpha - 2\beta$ en geldt voor de algemene oplossing

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We kiezen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voor $\lambda_3 = 8$ wordt het op te lossen stelsel $\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Schoonvegen met de totaalmatrix van het stelsel leidt tot:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad\uparrow \\ \uparrow \\ -1\ 4 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 18 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1\ -4 \\ \downarrow \\ \quad\downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel behorend bij de laatste totaalmatrix $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

Kies $x_3 = 2\alpha$ dan is $x_2 = 2\alpha$ en $x_1 = \alpha$, zodat de algemene oplossing is $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

We kiezen $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

De matrix van eigenvectoren is $V = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3\right) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Opmerking: de eigenvectoren staan niet paarsgewijs loodrecht op elkaar, zodat de matrix van eigenvectoren geen orthogonale matrix kan worden en we dus de inverse van V moeten berekenen.
We berekenen de inverse van V

$$\left(V\,|\,I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\uparrow\\ 2\\ \end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -2 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\uparrow\\ \\ 2\end{array}$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ 9\\ 9\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & \boxed{9} & 1 & 2 & 2\\ 9 & 0 & 18 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 9 & 18 & 0 & 0 & 9\end{array}\right)\begin{array}{cc}-2 & -2\\ \downarrow & \\ & \downarrow\end{array}$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\\ 9 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4\\ 0 & 9 & 0 & -2 & -4 & 5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4\\ 0 & 9 & 0 & -2 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 2\end{array}\right)$$

Er volgt $\quad V^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$$D=V^{-1}AV=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Ten slotte berekenen we A^5

$$A^5=V\,D^5V^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^5 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^5 & 0\\ 0 & 0 & 8^5\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 8^5\\ -1 & 0 & 2\cdot 8^5\\ 0 & -1 & 2\cdot 8^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3640 & 7282 & 7282\\ 7282 & 14563 & 14564\\ 7282 & 14564 & 14563\end{pmatrix}$$

9
$I_1=4\text{ A}\,;I_2=2\text{ A}\,;I_3=1\text{ A}\,;I_4=1\text{ A}$