



Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 2 Functies

1.

$y = f(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ is minimaal -4 voor $x=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [-4, \infty)$.

$y = g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x+2)(x-2)}$ bestaat wanneer

$(x+2)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$, voor het domein en het bereik geldt dus

$D_g = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ en $B_g = [0, \infty)$.

$y = h(x) = \sqrt{-f(x)} = \sqrt{-(x^2 - 4)} = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(2-x)(2+x)}$ bestaat wanneer

$(2-x)(2+x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, het maximum is $\sqrt{4} = 2$ (voor $x=0$), voor het domein en het bereik geldt dus $D_h = [-2, 2]$ en $B_h = [0, 2]$.

$y = k(x) = |f(x)| = |x^2 - 4|$ bestaat voor alle waarden van x , heeft een minimale waarde 0

(voor $x = \pm 2$), voor het domein en het bereik geldt dus $D_k = \mathbb{R}$ en $B_k = [0, \infty)$.

2.

a.

De rechte lijn door de punten (2,1) en (5,-1) heeft als vergelijking:

$$y - (-1) = \frac{1 - (-1)}{2 - 5}(x - 5) \Rightarrow y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow y = -1 - \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Het antwoord is dus: $y = f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

b.

De rechte lijn door het punten (2,5) met rico 3 heeft als vergelijking:

$$y - 5 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 5 + 3x - 6 = 3x - 1.$$

Het antwoord is dus: $y = f(x) = 3x - 1$.

c.

Een parabool met als top (3,2) heeft de vergelijking $y = a(x-3)^2 + 2$. Omdat de parabool door de oorsprong gaat, geldt $0 = a(0-3)^2 + 2 \Rightarrow 9a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$. De gevraagde functie is dus $y = f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 + 2$.

3.

a.

$$x^2 - 2x - 7 = (x-1)^2 - 1 - 7 = (x-1)^2 - 8$$

b.

$$-x^2 - 2x - 6 = -(x^2 + 2x) - 6 = -((x+1)^2 - 1) - 6 = -(x+1)^2 + 1 - 6 = -(x+1)^2 - 5$$

c.

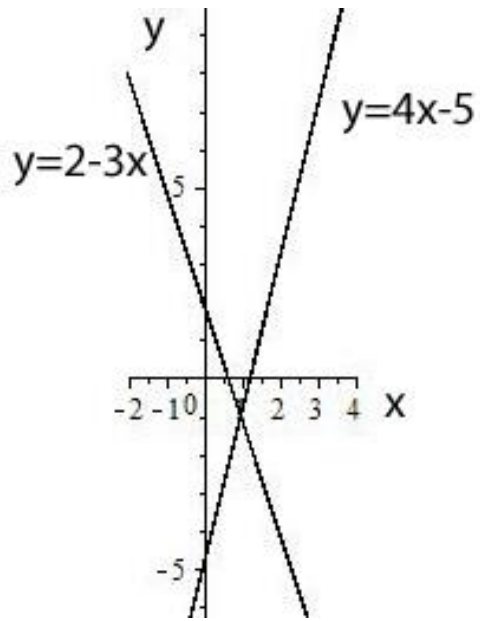
$$3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x) - 9 = 3((x-1)^2 - 1) - 9 = 3(x-1)^2 - 3 - 9 = 3(x-1)^2 - 12$$

d.

$$-2x^2 - x - 4 = -2(x^2 + \frac{1}{2}x) - 4 = -2((x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}) - 4 = -2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8} - 4 = -2(x + \frac{1}{4})^2 - 3\frac{7}{8}$$



4.

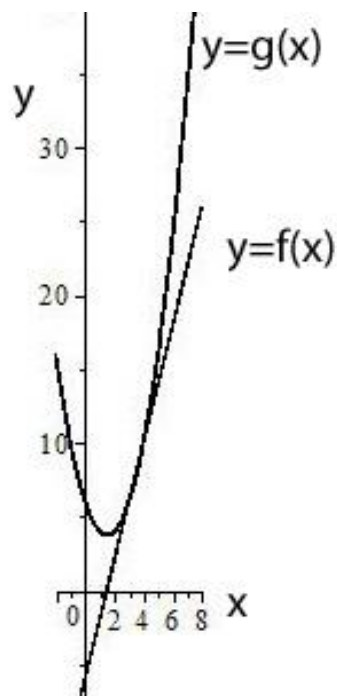


a.

$$f(x) = 4x - 5 \text{ en } g(x) = 2 - 3x$$

$$\text{Bepalen snijpunt: } f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - 5 = 2 - 3x \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < g(x)$ wanneer $x < 1$



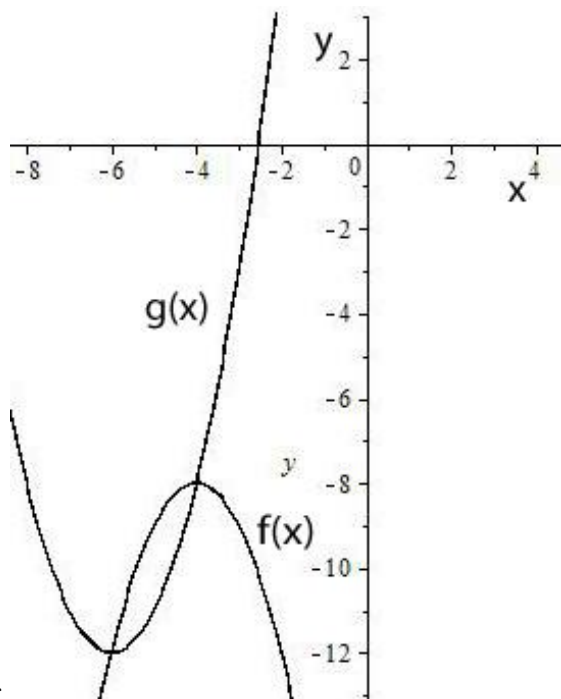
b.

$$f(x) = 4x - 6 \text{ en } g(x) = x^2 - 3x + 6$$

$$\text{Bepalen snijpunten: } f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - 6 = x^2 - 3x + 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = 4$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < g(x)$ wanneer $x < 3$ of $x > 4$



c.

$$f(x) = -x^2 - 8x - 24 \text{ en } g(x) = x^2 + 12x + 24$$

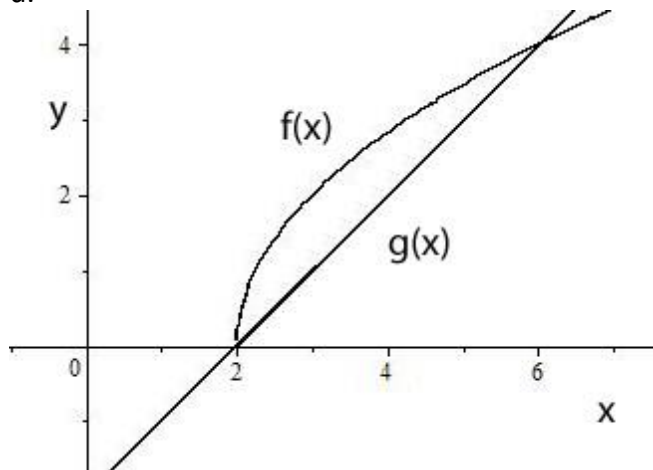
$$\text{Bepalen snijpunten: } f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 - 8x - 24 = x^2 + 12x + 24 \Rightarrow 2x^2 + 20x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+6) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = -6$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < g(x)$ wanneer $x < -6$ of $x > -4$.



d.



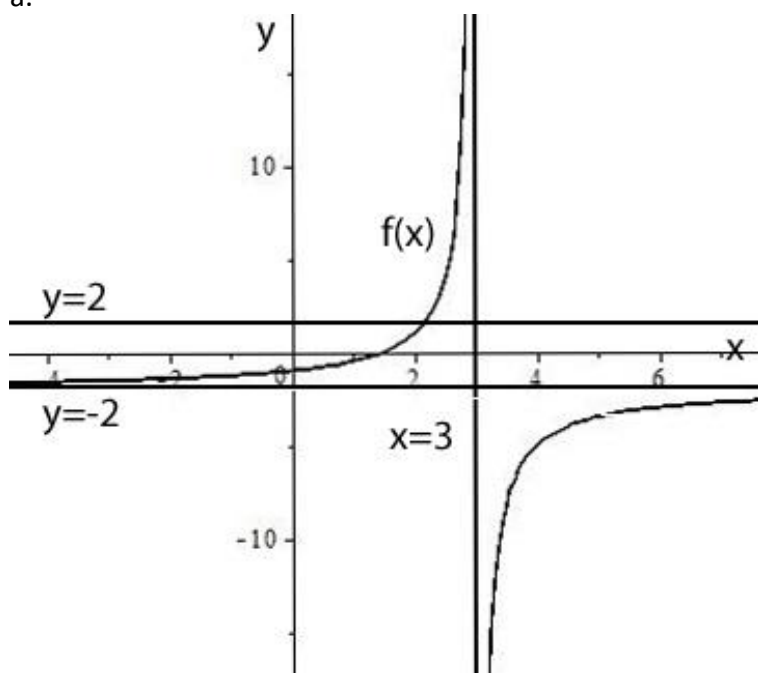
$$f(x) = \sqrt{4x-8} \text{ en } g(x) = x-2$$

$$\begin{aligned} \text{Bepalen snijpunten: } f(x) = g(x) &\Rightarrow \sqrt{4x-8} = x-2 \Rightarrow 4x-8 = (x-2)^2 \Rightarrow 4(x-2) = (x-2)^2 \\ &\Rightarrow x=2 \vee x-2=4 \Rightarrow x=6 \end{aligned}$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < g(x)$ wanneer $x > 6$.

5.

a.



Zie tekening.

Bepalen snijpunt grafiek $y = f(x) = \frac{3-2x}{x-3}$ met lijn $y = 2$:

$$\frac{3-2x}{x-3} = 2 \Rightarrow 3-2x = 2x-6 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2\frac{1}{4}$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < 2$ wanneer $x < 2\frac{1}{4}$ of wanneer $x > 3$

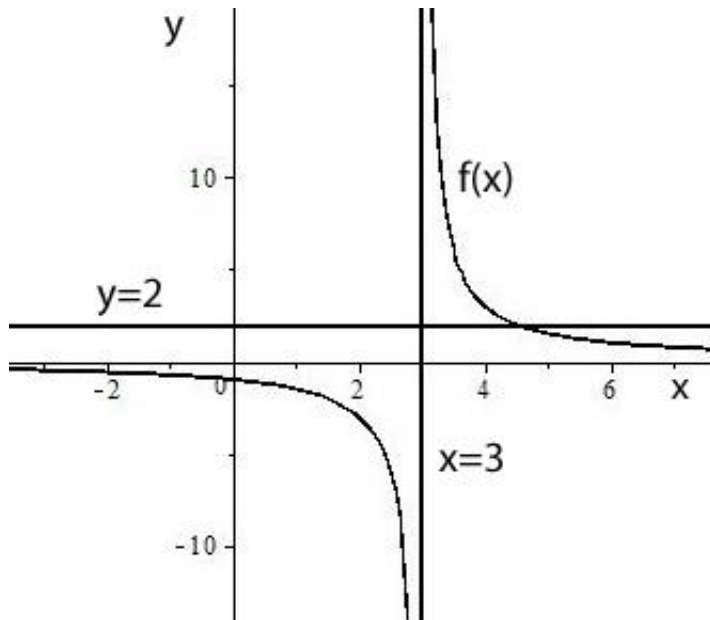
b. Zie tekening.



Bepalen snijpunt grafiek $y = f(x) = \frac{3}{x-3}$ met lijn $y = 2$:

$$\frac{3}{x-3} = 2 \Rightarrow 3 = 2x - 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4\frac{1}{2}$$

Uit de tekening blijkt: $f(x) < 2$ wanneer $x < 3$ of wanneer $x > 4\frac{1}{2}$



6.

a. $(0,6)^x < 0,36 \Rightarrow (0,6)^x < (0,6)^2 \Rightarrow x > 2$ (het ongelijkheidsteken klapt om, omdat het grondtal kleiner is dan 1).

$$\begin{aligned} \text{b. } \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} > 10 &\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}\log 10} \Rightarrow -x > \frac{3}{2}\log 10 \sim \\ &\Rightarrow -x > \frac{\log 10}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} \approx \frac{1}{0,176} \approx 5,68 \Rightarrow x < -5,68 \end{aligned}$$

(het ongelijkheidsteken klapt om, omdat gedeeld wordt door -1).

c. $2^x < 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x > 0$ (het ongelijkheidsteken klapt om, omdat het grondtal kleiner is dan 1).

$$\text{d. } 2^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \Rightarrow 2^{2x} < 2^{-(x+1)} \Rightarrow 2x < -(x+1) \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}$$

$$\text{e. } {}^2\log x > 0,2 \Rightarrow x > 2^{0,2} \approx 1,149$$

$$\begin{aligned} \text{f. } 2^{x+2} < 3^{2x+3} &\Rightarrow \log(2^{x+2}) < \log(3^{2x+3}) \Rightarrow (x+2)\log 2 < (2x+3)\log 3 \\ &\Rightarrow x\log 2 + 2\log 2 < 2x\log 3 + 3\log 3 \Rightarrow x(\log 2 - 2\log 3) < 3\log 3 - 2\log 2 \\ &\Rightarrow (-0,653)x < 0,829 \Rightarrow x > -1,2696 \end{aligned}$$



g. $2^{2x} + 2^x < 6 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x < 6$

stel $2^x = y \Rightarrow y^2 + y - 6 < 0 \Rightarrow (y+3)(y-2) < 0 \Rightarrow -3 < y < 2$.

Los dus op: $2^x < 2$ (want $2^x > 0 > -3$).

$2^x < 2 \Rightarrow 2^x < 2^1 \Rightarrow x < 1$

h.

$${}^3 \log(2x-5) < {}^{\frac{1}{3}} \log(x-1) \Rightarrow \frac{\log(2x-5)}{\log 3} < \frac{\log(x-1)}{\log 1 - \log 3} \Rightarrow \frac{\log(2x-5)}{\log 3} < -\frac{\log(x-1)}{\log 3}$$

$$\Rightarrow \log(2x-5) < -\log(x-1) \Rightarrow \log(2x-5) + \log(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow \log((2x-5)(x-1)) < \log 1 \Rightarrow (2x-5)(x-1) < 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 2x + 5 < 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 < 0.$$

Stel $2x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{4} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{17}$

$$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17} \approx 2,781$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17} \approx 0,719 \text{ (vervalt, want de logaritmen bestaan alleen wanneer } x > 2,5)$$

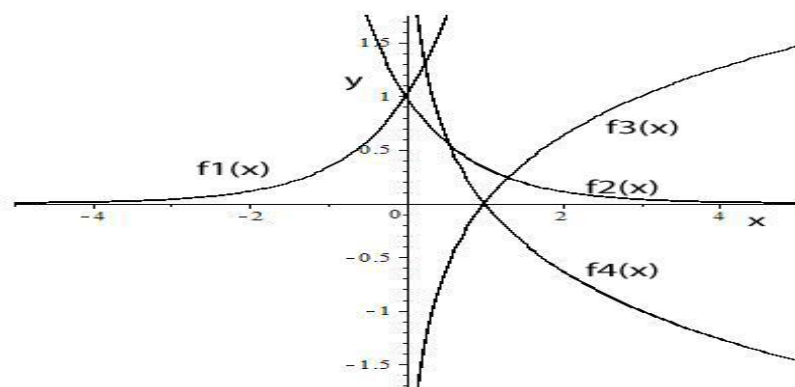
i. $\frac{1}{2} \log x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \log x \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{2} \log x \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow x \geq \frac{1}{8}$ (het ongelijkheidsteken klapt om, omdat het grondtal kleiner is dan 1).

j. $\frac{3}{2} \log(2x+1) < 2 \Rightarrow \frac{3}{2} \log(2x+1) < \frac{3}{2} \log \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{2} \log(2x+1) < \frac{3}{2} \log \left(\frac{9}{4}\right)$

$$\Rightarrow 2x+1 < \frac{9}{4} \Rightarrow 2x < \frac{5}{4} \Rightarrow x < \frac{5}{8}$$

$2x+1$ moet wel > 0 zijn, dus $x > -\frac{1}{2}$

Conclusie: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}$



7.

Merk op:



$$f_1(x) = 3^x$$

$$f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x} = f_1(-x)$$

$$f_3(x) = {}^3\log x = \frac{\log x}{\log 3}$$

$$f_4(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x = \frac{\log x}{\log(\frac{1}{3})} = \frac{\log x}{-\log 3} = -f_3(x)$$

Als $y = 3^x \Rightarrow x = {}^3\log y \Rightarrow f_1$ is de inverse van f_3

Als $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow x = {}^{\frac{1}{3}}\log y \Rightarrow f_2$ is de inverse van f_4

De grafieken van f_1 en f_2 zijn gespiegeld t.o.v. de y -as

De grafieken van f_3 en f_4 zijn gespiegeld t.o.v. de x -as

De grafieken van f_1 en f_3 zijn gespiegeld t.o.v. de lijn $y = x$

De grafieken van f_2 en f_4 zijn gespiegeld t.o.v. de lijn $y = x$

8.

a. $f(x) = x \rightarrow f_1(x) = -x \rightarrow g(x) = 4 - x$: eerst spiegelen t.o.v. de y -as , vervolgens 4 omhoog schuiven

b. $f(x) = x^2 \rightarrow f_1(x) = (x-4)^2 \rightarrow f_2(x) = 2(x-4)^2 \rightarrow g(x) = 2(x-4)^2 + 3$: eerst over een afstand 4 naar rechts schuiven, dan met een factor 2 uitrekken (vertikaal), vervolgens 3 omhoog schuiven

c. $f(x) = \log x \rightarrow f_1(x) = \log(-x) \rightarrow g(x) = -\log(-x)$: eerst spiegelen t.o.v. de x -as , vervolgens spiegelen t.o.v. de y -as

d. $f(x) = 2^x \rightarrow f_1(x) = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x = g(x)$: inkrimpen (horizontaal) met een factor 2.

e. $f(x) = 2^x \rightarrow f_1(x) = 2^{x-2} \rightarrow g(x) = 2^{x-2} + 1$: eerst over een afstand 2 naar rechts verschuiven, vervolgens 1 omhoog schuiven.

f. $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_1(x) = \sqrt{-x} \rightarrow f_2(x) = \sqrt{-(x-5)} = \sqrt{5-x} \rightarrow g(x) = 2\sqrt{5-x}$: eerst spiegelen t.o.v. de x -as , dan 5 naar rechts schuiven, vervolgens met een factor 2 uitrekken (vertikaal).

g. $f(x) = |x| \rightarrow f_1(x) = 2|x| = |2x| \rightarrow g(x) = |2x| + 5$: eerst met een factor 2 uitrekken (vertikaal), dan 5 omhoog schuiven.

h. $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f_1(x) = \frac{1}{x-4} \rightarrow f_2(x) = \frac{3}{x-4} \rightarrow g(x) = 1 + \frac{3}{x-4}$: eerst 4 naar rechts verschuiven, dan met een factor 3 uitrekken (vertikaal), vervolgens 1 omhoog schuiven.

9.

a. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ is samengesteld uit de standaardfuncties $u = g(x) = x^2 + 1$ en $y = h(u) = \sqrt{u}$



b. $y = f(x) = \left({}^2 \log \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)^2$ is samengesteld uit de standaardfuncties $u = g(x) = x + \frac{1}{x}$ (dit is de som van twee standaardfuncties), $v = h(u) = {}^2 \log u$ en $y = k(v) = v^2$.

c. $y = f(x) = \log(3^{2x} + 3x + 1)$ is samengesteld uit de standaardfuncties $u = h(x) = 3^x$, $v = k(u) = u^2$, $w = m(x) = v + 3x + 1$ (w is feitelijk de som van een samengestelde functie en een standaardfunctie) en $y = n(w) = \log(w)$.

d. $y = f(x) = (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}$ is samengesteld uit de standaardfuncties $y = h(v) = v^{\frac{3}{2}}$ en $v = g(x) = x^2 + 4$

e. $y = f(x) = \sqrt[3]{(\log x)^2}$ is samengesteld uit de standaardfuncties $y = h(v) = v^{\frac{2}{3}}$ en $v = g(x) = \log x$

f. $y = f(x) = (x^2 + 2x + 3)^5$ is samengesteld uit de standaardfuncties $y = h(v) = v^5$ en $v = g(x) = x^2 + 2x + 3$

10.

a.

$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 1$ (met $y \geq 0$), dus $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ en $y = g(x) = x^2 - 1$ zijn elkaars inversen (voor $x \geq 0$).

b.

$y = 3 \log x \Rightarrow \log x = \frac{1}{3} y \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{3}y}$, dus $y = f(x) = 3 \log x$ en $y = g(x) = 10^{\frac{1}{3}x}$ zijn elkaars inversen.

c.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1 \Rightarrow yx - y = x+1 \Rightarrow yx - x = y+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

dus $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $y = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ zijn elkaars inversen.

d.

$$y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = y+4 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y+4} \text{ (alleen +, want } x > -1) \Rightarrow x = -1 + \sqrt{y+4}$$

Dus $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $y = g(x) = -1 + \sqrt{x+4}$ zijn elkaars inversen.

e.

$y = 3^{x+1} \Rightarrow x+1 = {}^3 \log y \Rightarrow x = -1 + {}^3 \log y$, dus $y = f(x) = 3^{x+1}$ en $y = g(x) = -1 + {}^3 \log x$ zijn elkaars inversen.

f.

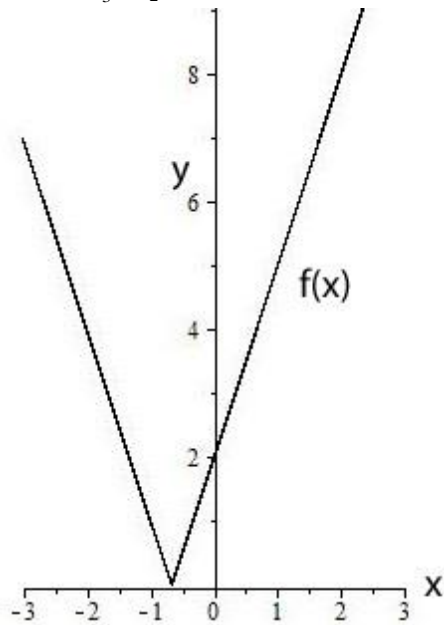


$y = 2x - 5 \Rightarrow 2x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 5) = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$, dus $y = f(x) = 2x - 5$ en $y = g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ zijn elkaars inversen.

11.

a. $x \geq -\frac{2}{3}: f_1(x) = 3x + 2$

$x < -\frac{2}{3}: f_2(x) = -(3x + 2)$

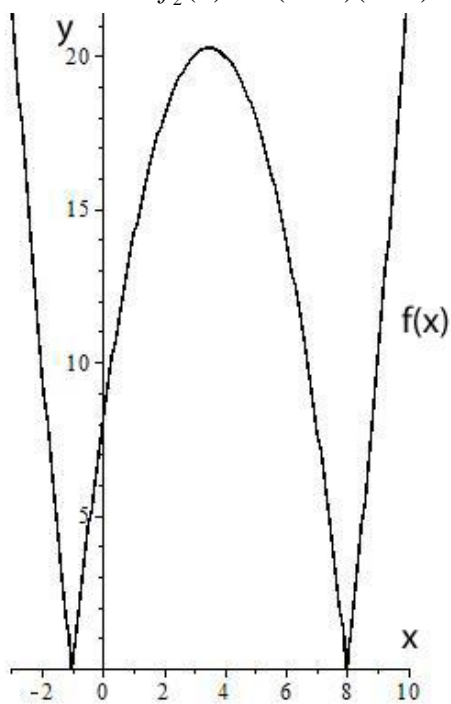


b.

$$f(x) = |x^2 - 7x - 8| = |(x - 8)(x + 1)|$$

$-1 \leq x \leq 8: f_1(x) = (x - 8)(x - 1)$

$x < -1 \vee x > 8: f_2(x) = -(x - 8)(x - 1)$



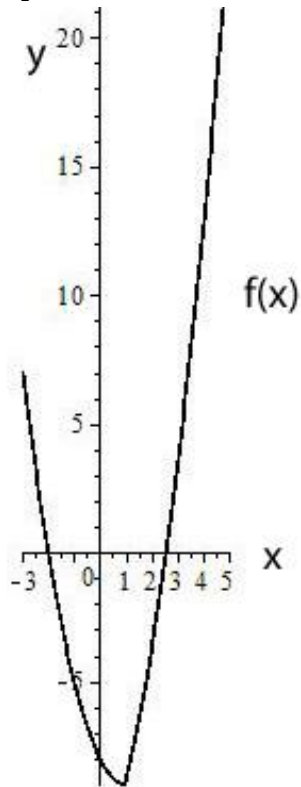


c.

$$f(x) = x^2 + 2|x-1| - 10$$

$$x \geq 1: f_1(x) = x^2 + 2(x-1) - 10 = x^2 + 2x - 12 = (x+1)^2 - 13$$

$$x < 1: f_2(x) = x^2 - 2(x-1) - 10 = x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9$$



d.

$$f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$$

$$x \geq 0: f_1(x) = |x^2 - 2x - 3| = |(x-3)(x+1)|$$

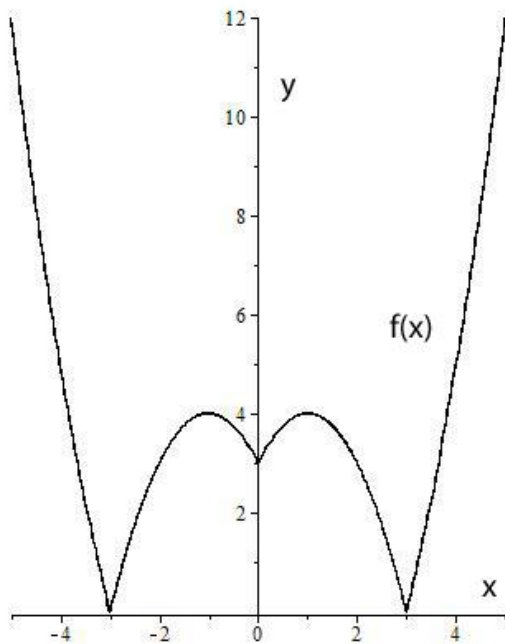
$$x \geq 3: f_{11}(x) = (x-3)(x+1)$$

$$0 < x < 3: f_{12}(x) = -(x-3)(x+1)$$

$$x < 0: f_2(x) = |x^2 + 2x - 3| = |(x+3)(x-1)|$$

$$x < -3: f_{21}(x) = -(x+3)(x-1)$$

$$0 \leq x < 3: f_{22}(x) = (x+3)(x-1)$$



12.

a. $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p \geq 0 \Rightarrow 25 - 4p \geq 0 \Rightarrow p \leq \frac{25}{4}$

b. $D = (p+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+1) \geq 0 \Rightarrow p^2 + 6p + 9 - 4p - 4 \geq 0 \Rightarrow p^2 + 2p + 5 \geq 0$
 $p^2 + 2p + 5 = (p+1)^2 - 1 + 5 = (p+1)^2 + 4 \geq 4$

De discriminant is dus positief voor elke waarde van p

c. $D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \geq 0 \Rightarrow p^2 - 24 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{24} \leq p \leq \sqrt{24} \Rightarrow -2\sqrt{6} \leq p \leq 2\sqrt{6}$

d. $D = (p)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) \geq 0 \Rightarrow p^2 + 4p \geq 0 \Rightarrow p(p+4) \geq 0 \Rightarrow p \leq -4 \vee p > 0$ ($p = 0$ vervalt, want dan is de vergelijking niet kwadratisch).

13. $f(x) = 3x^2 - px + q = 3\left(x^2 - \frac{p}{3}x\right) + q = 3\left(\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 - \frac{p^2}{36}\right) + q = 3\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 - \frac{p^2}{12} + q$.

Het minimum is dus gelijk aan: $-\frac{p^2}{12} + q = 10$.

Verder is $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2p + q = 12 - 2p + q = 13 \Rightarrow q - 2p = 1$.

Combinatie van de beide voorwaarden leidt tot: $q = 10 + \frac{p^2}{12} = 2p + 1$.

Hieruit volgt: $120 + p^2 = 24p + 12 \Rightarrow p^2 - 24p + 108 = 0 \Rightarrow$

$$p = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 432}}{2} = \frac{24 \pm 12}{2} \Rightarrow p_1 = 18 \text{ en } p_2 = 6$$

Voor q volgt: $q_1 = 2 \cdot 18 + 1 = 37$ en $q_2 = 2 \cdot 6 + 1 = 13$

14.

$L = 25 \log\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$, met de gegevens ingevuld:

$$17 = 25 \log\left(\frac{250}{V_i}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{250}{V_i}\right) = \frac{17}{25} \Rightarrow \frac{250}{V_i} = 10^{\frac{17}{25}} \Rightarrow V_i = \frac{250}{10^{0,68}} = 52,23 \text{ mV}$$