Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2
Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 2

Uitwerking herhalingsopgaven deel 2

Hoofdstuk 2.7 (Vectoren)

1a.

$$3\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}=3\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-6\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\12\\-20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15\\25\\-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-8-15\\-6-12+25\\12+20+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\7\\27\end{pmatrix}$$

1b.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-3)^2+(5)^2+(-1)^2}=\sqrt{35}$$

$$\left|\vec{a}-\vec{c}\right|=\left|\begin{matrix}1-(-3)\\-2-5\\4-(-1)\end{matrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+5^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

1c.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+(-2)\cdot 3+4\cdot(-5)=-24$$

1d.

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & 1 & -3\\ \vec{e}_2 & -2 & 5\\ \vec{e}_3 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{e}_1\begin{vmatrix}-2 & 5\\4 & -1\end{vmatrix}-\vec{e}_2\begin{vmatrix}1 & -3\\4 & -1\end{vmatrix}+\vec{e}_3\begin{vmatrix}1 & -3\\-2 & 5\end{vmatrix}$$

$$=\left((-2)(-1)-4\cdot 5\right)\vec{e}_1-\left((1)(-1)-4\cdot(-3)\right)\vec{e}_2+\left(1\cdot 5-(-2)(-3)\right)\vec{e}_3$$

$$=-18\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-11\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\-11\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -3 & 2 \\ \vec{e}_2 & 5 & 3 \\ \vec{e}_3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(5(-5)-(-1)\cdot 3\right)\vec{e}_1 - \left((-3)(-5)-(-1)\cdot(2)\right)\vec{e}_2 + \left((-3)\cdot 3 - 5\cdot 2\right)\vec{e}_3$$

$$= -22\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 17\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-19)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\-17\\-19\end{pmatrix}$$

2a.
Voor de hoek die $\vec{v}$ met de positieve *x*-as maakt bepalen we het inwendig product van $\vec{v}$ met $\vec{e}_1$:

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -1$$

Anderzijds geldt: $\vec{v}\cdot\vec{e}_1 = |\vec{v}|\cdot|\vec{e}_1|\cos\varphi_x = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2}\cdot 1\cdot\cos\varphi_x = \sqrt{17}\cos\varphi_x$

Dus $\cos\varphi_x = \dfrac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_x = 1{,}81577 \text{ rad} = 104{,}03624°$

De vector $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ ligt in het *xz*-vlak (de *y*-coördinaat is immers 0). Daardoor staat $\vec{v}$ loodrecht op de *y*-as.
Dus $\cos\varphi_y = 0 \Rightarrow \varphi_y = \frac{1}{2}\pi \text{ rad} = 90°$
Voor de hoek die $\vec{v}$ met de positieve *z*-as maakt bepalen we het inwendig product van $\vec{v}$ met $\vec{e}_3$:

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 4$$

Anderzijds geldt: $\vec{v}\cdot\vec{e}_3 = |\vec{v}|\cdot|\vec{e}_3|\cos\varphi_z = \sqrt{17}\cos\varphi_z$

Dus $\cos\varphi_z = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_y = 0{,}24497 \text{ rad} = 14{,}0362°$

2b. Voor de hoek die $\vec{w}$ met de positieve *x*-as maakt bepalen we het inwendig product van $\vec{w}$ met $\vec{e}_1$:

$$\vec{w}\cdot\vec{e_1} = \begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -2$$

Anderzijds geldt: $\vec{w}\cdot\vec{e_1} = |\vec{w}|\cdot|\vec{e_1}|\cos\varphi_x = \sqrt{(-2)^2+2^2+6^2}\cdot 1\cdot\cos\varphi_x = \sqrt{44}\cos\varphi_x$

Dus $\cos\varphi_x = \dfrac{-2}{\sqrt{44}} \Rightarrow \varphi_x = 1{,}87707 \text{ rad} = 107{,}5484°$

Voor de hoek die $\vec{w}$ met de positieve *y*-as maakt bepalen we het inwendig product van $\vec{w}$ met $\vec{e_2}$:

$$\vec{w}\cdot\vec{e_2} = \begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2$$

Anderzijds geldt: $\vec{w}\cdot\vec{e_2} = |\vec{w}|\cdot|\vec{e_2}|\cos\varphi_y = \sqrt{44}\cos\varphi_y$

Dus $\cos\varphi_y = \dfrac{2}{\sqrt{44}} \Rightarrow \varphi_y = 1{,}2645 \text{ rad} = 72{,}4516°$

Voor de hoek die $\vec{w}$ met de positieve *z*-as maakt bepalen we het inwendig product van $\vec{w}$ met $\vec{e_3}$:

$$\vec{w}\cdot\vec{e_3} = \begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 6$$

Anderzijds geldt: $\vec{w}\cdot\vec{e_3} = |\vec{w}|\cdot|\vec{e_3}|\cos\varphi_z = \sqrt{17}\cos\varphi_z$

Dus $\cos\varphi_z = \dfrac{6}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_y = 0{,}44051 \text{ rad} = 25{,}2394°$

3. De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staan loodrecht op elkaar als hun inwendig product gelijk is aan 0.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)p + p\cdot(-p) + 4\cdot 2 = -p^2 - p + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$p = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)(8)}}{-2} = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{33}$$

4a.

Voor de projectie $\vec{q}$ van $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ op $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ geldt:

$$\vec{q} = \left(\vec{a_e}\cdot\vec{b}\right)\vec{a_e}, \text{ waarbij } \vec{c_e} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-5)^2+1^2}}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Dus $\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{35}}\left((-2)(3)+(3)(-5)+5\cdot 1\right)\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$

$$= \frac{-16}{35}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

4b. Voor de projectie $\vec{p}$ van $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ op $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ geldt:

$\vec{p} = \left(\vec{c}_e \cdot \vec{a}\right)\vec{c}_e$, waarbij $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(3)^2+5^2}}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$

Dus $\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{38}}\left((-2)(2)+(3)(0)+5\cdot 4\right)\frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$

$$= \frac{16}{38}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix} = \frac{8}{19}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$$