Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 7 Meetkunde

7.1 Hoeken en driehoeken

1. ΔAEC is gelijkvormig met ΔBEC en ΔACB (twee hoeken zijn steeds gelijk).
Daaruit volgt:

a. $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE}{AC}\Rightarrow AE=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{16}{8}=2$. Met de stelling van Pythagoras berekenen we CE en BC:

$$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

Verder is $BE=8-2=6$

b. $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BE}{CE}\Rightarrow BE=\dfrac{CE^2}{AE}=\dfrac{25}{3}=8\tfrac{1}{3}\Rightarrow AB=AE+BE=3+8\tfrac{1}{3}=11\tfrac{1}{3}$

Met de stelling van Pythagoras worden de overige lijnstukken berekend:

$$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$
$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(11\tfrac{1}{3})^2-34}=\sqrt{\tfrac{850}{9}}=\tfrac{5}{3}\sqrt{34}$$

2. ΔDBE is gelijkvormig met ΔABC, dus

$$\frac{BD}{AB}=\frac{DE}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AD+BD}=\frac{DE}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{3+BD}=\frac{5}{7}\Rightarrow 7\cdot BD=15+5\cdot BD\Rightarrow 2\cdot BD=15\Rightarrow BD=7\tfrac{1}{2}$$

3. Omdat CD en AE evenwijdig zijn geldt $\angle C_1=\angle CAE$ maar ook $\angle C_2=\angle CEA$. Omdat gegeven is dat $\angle C_1=\angle C_2$ is ΔEAC een gelijkbenige driehoek ($CE=AC$).
In deze driehoek geldt dus:

$$\frac{BC}{BE}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{BC}{CE+BC}=\frac{BD}{AD+BD}\Rightarrow\frac{CE+BC}{BC}=\frac{AD+BD}{BD}\Rightarrow\frac{CE}{BC}+1=\frac{AD}{BD}+1\Rightarrow\frac{CE}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

Omdat $CE=AC$, geldt dus $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$

7.2 Vierhoeken

4. Voor een ruit geldt dat het oppervlak gelijk is aan de helft van het product van de beide diagonalen (N.B. zie de errata op de website; in het boek staat namelijk ten onrechte dat het oppervlak gelijk is aan het product van de beide diagonalen).
Het oppervlak is dus $\tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 20=120$

5. Van een trapezium met evenwijdige zijden DC (de kortste zijde) en AB (de langste zijde) en hoogte *h* is het oppervlak gelijk aan $\tfrac{1}{2}h(CD+AB)$.
Hier geldt dus: $72=\tfrac{1}{2}h(4+8)\Rightarrow h=12$.

Omdat het trapezium gelijkbenig is geldt voor beide diagonalen (AD en BC): ze zijn de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met zijden *h* (=12) en $p = \mathrm{BC} + \frac{1}{2}(\mathrm{AB} - \mathrm{BC}) = 4 + \frac{1}{2}(8-4) = 6$ (dit volgt uit figuur 7.30, met daarin $a = c$). Volgens de stelling van Pythagoras zijn de diagonalen dus beide gelijk aan $\sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

7.3 De cirkel

6. We brengen de vergelijking van de cirkel in een andere vorm met kwadraatafslitsing:

a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 11 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16 = 4^2$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt (1,-2) en straal 4.

b. $x^2 + y^2 - 4x = 12 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 12 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16 = 4^2$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt (2,0) en straal 4.

c. $2x^2 + 2y^2 = 8x + 12y - 24 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x + 6y - 12 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \Rightarrow$

$(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 = 5^2$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt (2,0) en straal 4.

d. $4x - x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4 = 2^2$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt (2,0) en straal 2.

7.

Hoek in graden	Hoek in radialen	Hoek in graden	Hoek in radialen
53	$\frac{\pi}{180} \cdot 53 = 0{,}9250245035$ rad	$\frac{180}{\pi} \cdot 1{,}07 = 61{,}30648406$	1,07
45	$\frac{\pi}{180} \cdot 45 = 0{,}7853981635$ rad	$\frac{180}{\pi} \cdot 2{,}78 = 159{,}2822670$	2,78
143	$\frac{\pi}{180} \cdot 143 = 2{,}495820831$ rad	$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\pi = 135$	$\frac{3}{4}\pi$
60	$\frac{\pi}{180} \cdot 60 = 1{,}047197551$ rad	$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5}{3}\pi = 300$	$\frac{5}{3}\pi$
270	$\frac{\pi}{180} \cdot 270 = 4{,}712388981$ rad	$\frac{180}{\pi} \cdot 0{,}5 = 28{,}64788975$	0,5

8. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20$

$(x+1)^2 + (y+10)^2 = 169 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 20y + 100 = 169 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 20y = 68$

Trekken we linker- en rechterlid van beide vergelijkingen van elkaar af, dan krijgen we:

$4x + 16y = 48 \Rightarrow x + 4y = 12 \Rightarrow x = 12 - 4y$.

Substitueren we dit vervolgens in de eerste cirkelvergelijking, dan krijgen we:

$(12-4y)^2 - 2(12-4y) + y^2 + 4y = 20 \Rightarrow 144 - 96y + 16y^2 - 24 + 8y + y^2 + 4y - 20 = 0 \Rightarrow$

$17y^2 - 84y + 100 = 0$

Met de *abc*-formule wordt *y* opgelost:

$$y=\frac{84\pm\sqrt{(84)^2-4\cdot 17\cdot 100}}{2\cdot 17}=\frac{84\pm\sqrt{256}}{34}=\frac{84\pm 16}{34}$$

$$y_1=\frac{68}{34}=2\Rightarrow x_1=12-4\cdot 2=4$$

$$y_2=\frac{100}{34}=2\tfrac{16}{17}\Rightarrow x_1=12-4\cdot 2\tfrac{16}{17}=\tfrac{4}{17}$$

De snijpunten van de twee cirkels zijn dus: (4,2) en $\left(\tfrac{4}{17},2\tfrac{16}{17}\right)$

9. De cirkel van het reuzenrad heeft een omtrek $2\pi r=20\pi$ meter. Er zijn 21 gondels, dus 20 gondelafstanden. De boogafstand tussen elke twee gondels is dus $\frac{20\pi}{20}=\pi\approx 3{,}14$ meter.

10. Voor het oppervlak van de hele cirkel geldt: $O=\pi r^2=25\pi$. Bij de hele cirkel hoort een middelpuntshoek 2π radialen. Een cirkelsector met een middelpuntshoek $30^\circ=\tfrac{1}{6}\pi$ radialen heeft dus een oppervlak: $O=\frac{\tfrac{1}{6}\pi}{2\pi}\cdot 25\pi=\tfrac{25}{12}\pi$.