

drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1

Zesde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 3 Goniometrie

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2016



Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 3, paragraaf 3.7

1) Met de cosinusregel wordt AB berekend:

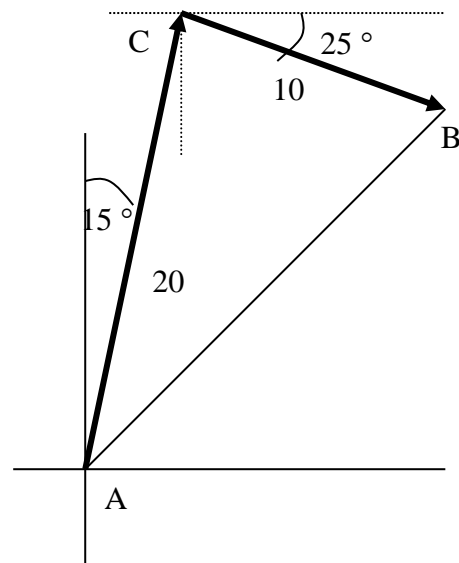
$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos \angle ACB$$

$$\angle ACB = 15^\circ + (90^\circ - 25^\circ) = 80^\circ .$$

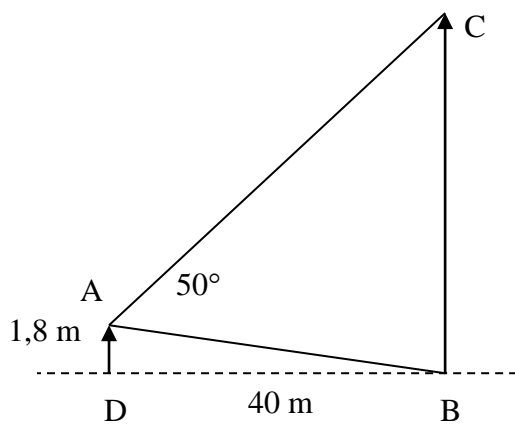
$$AB = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 80^\circ}$$

$$= \sqrt{500 - 400 \cdot 0,173648}$$

$$= 20,75 \text{ km}$$



2)



Eerst wordt hoek ABC berekend:

$$\tan(\angle ABD) = \frac{1,8}{40} \Rightarrow \angle ABD = 2,576^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CBA = 90^\circ - \angle ABD = 87,42^\circ$$

Met de stelling van Pythagoras wordt AB

$$\text{berekend: } AB = \sqrt{(1,8)^2 + (40)^2} = 40,040 \text{ m}$$

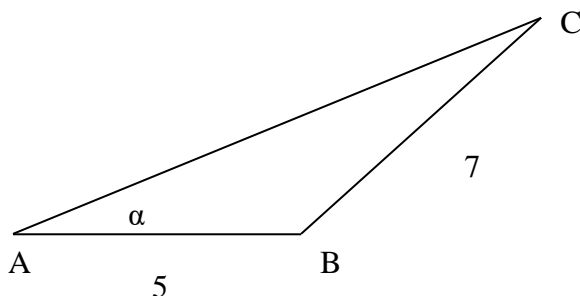
Met de sinusregel wordt BC berekend:

$$\frac{\sin(50^\circ)}{BC} = \frac{\sin(\angle ACB)}{AB} = \frac{\sin(180 - 50 - 87,42)}{AB} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin(50^\circ)}{\sin(42,58^\circ)} = 45,33 \text{ m}$$

$$BC_{\max} = \frac{AB \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(180^\circ - 52^\circ - 87,42^\circ)} = 48,51 \text{ m}$$

$$BC_{\min} = \frac{AB \cdot \sin(48^\circ)}{\sin(180^\circ - 48^\circ - 87,42^\circ)} = 42,40 \text{ m}$$

3)



Met de sinusregel wordt eerst hoek C berekend: $\frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \gamma}{AB} \Rightarrow \sin \gamma = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{BC}$,

$$\text{Dus } \sin \gamma = \frac{5 \cdot \sin(25^\circ)}{7} = 0,3018 \Rightarrow \gamma = 17,57^\circ.$$

Hieruit volgt ook hoek B: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 25^\circ - 17,57^\circ = 137,43^\circ$.

Met de sinusregel kan nu ook AC berekend worden: $\frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \beta}{AC} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$.

$$\text{Dus } AC = \frac{7 \cdot \sin(137,43^\circ)}{\sin(25^\circ)} = 11,20$$

$$4a) \sin(2x) = 0,1487 = \sin(0,1492 \text{ (rad)}) \Rightarrow$$

$$2x = 0,1492 + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - 0,1492 + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$x = 0,0746 + k \cdot \pi \vee x = \frac{2,9924}{2} + k \cdot \pi = 1,4962 + k \cdot \pi$$

$$4b) \cos\left(3x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0,5621 = \cos(0,9739) \Rightarrow$$

$$3x - \frac{1}{3}\pi = \pm 0,9739 + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$3x = 1,047 \pm 0,9739 + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$x = 0,6737 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = 0,0244 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$4c) \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = 4,6785 = \tan(1,3602) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\pi - x = 1,3602 + k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}\pi - 1,3602 + k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$x = 0,2106 + k \cdot \pi$$

$$4d) \arcsin(2x) = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow 2x = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$5a) \text{methode 1: } \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1 = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{methode 2: } \sin x = \cos x \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\pi - x = \pm x + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\pi - x = \pm x + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{1}{2}\pi \pm k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi \pm k \cdot \pi$$

5b)

$$\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(x-1) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - (x-1)\right) \Rightarrow$$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi - x + 1 + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - x + 1\right) + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + 1 + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi - 1 + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$3x = 3,3562 + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi - 1 + k \cdot 2\pi = 1,3562 + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$x = 1,1187 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = 1,3562 + k \cdot 2\pi$$

5c) $\tan x = \sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 1 \Rightarrow$

$$x = k \cdot \pi \vee x = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot \pi$$

5d) $(\cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\cos x = \cos\left(\pm\frac{1}{4}\pi\right) = \cos(\pm 0,7854) \vee \cos x = \cos\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right) = \cos(\pm 2,3562) \Rightarrow$$

$$x = \pm 0,7854 + k \cdot 2\pi \vee x = \pm 2,3562 + k \cdot 2\pi$$

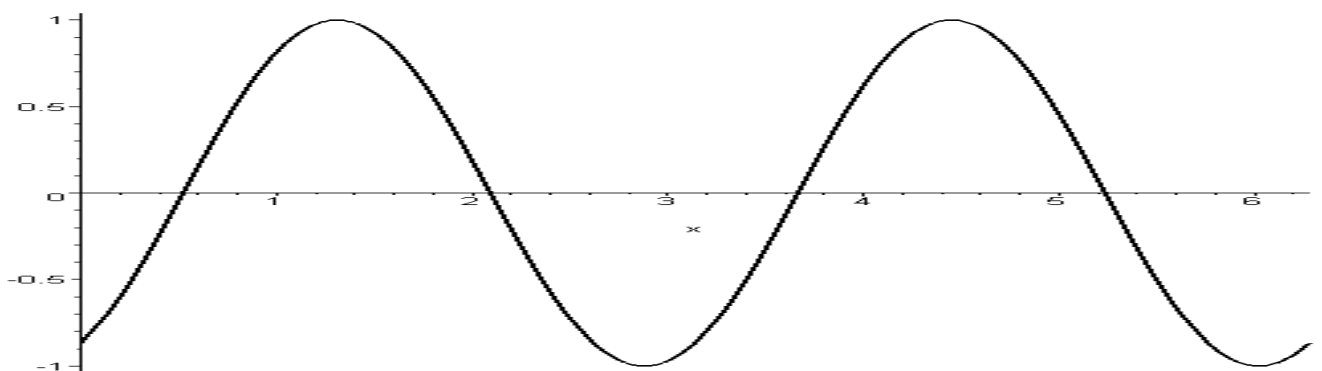
6a) De grafiek van $f(x) = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ krijgen we uit de grafiek van

$f_1(x) = \sin(2x)$ door deze over een afstand $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts te verplaatsen (de grafiek van

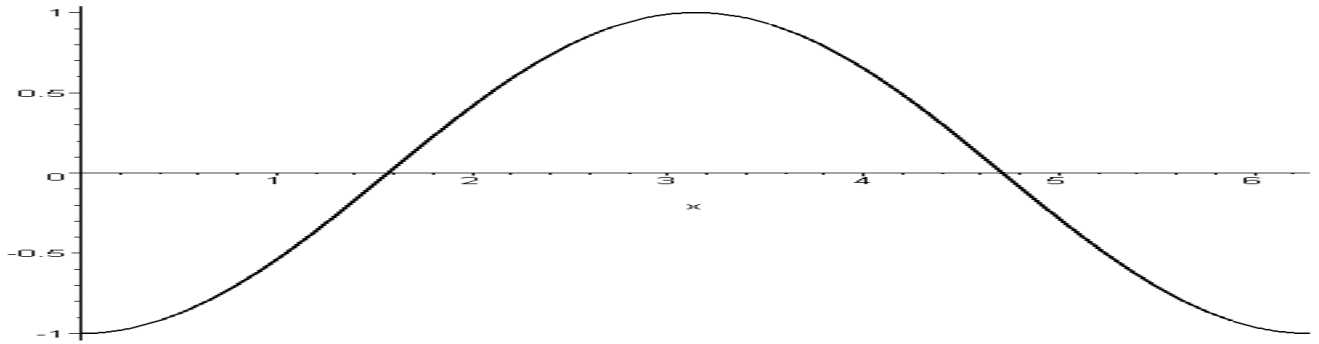
$f_1(x) = \sin(2x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x) = \sin x$ door deze met een factor 2 in te

krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een sinusfunctie met periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

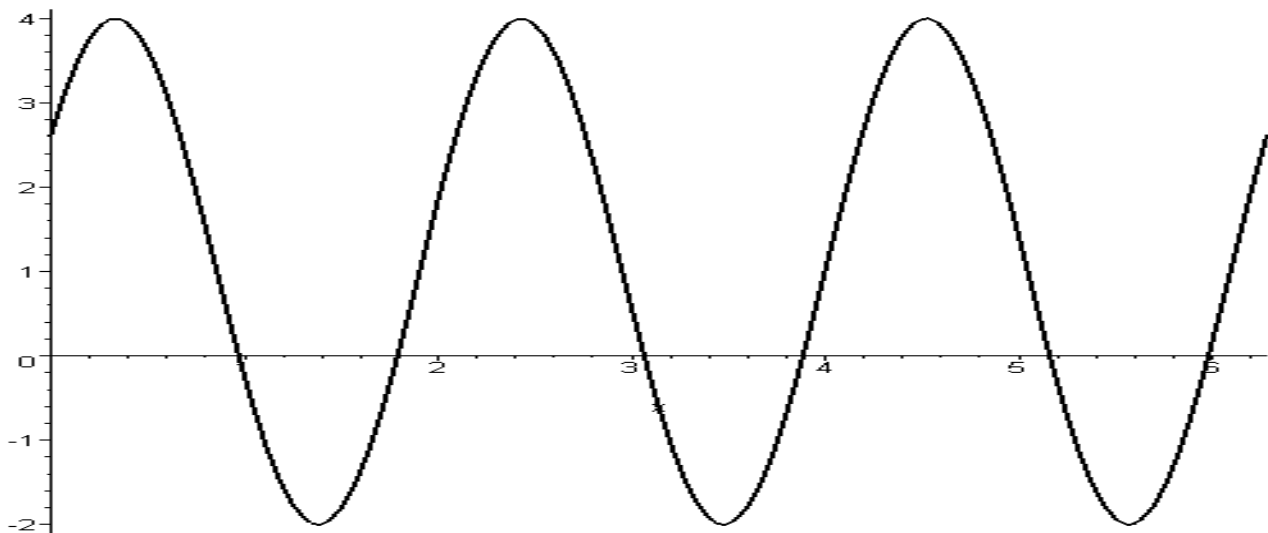
amplitude 1, voorlopig beginpunt $\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$ en evenwichtslijn $y = 0$.



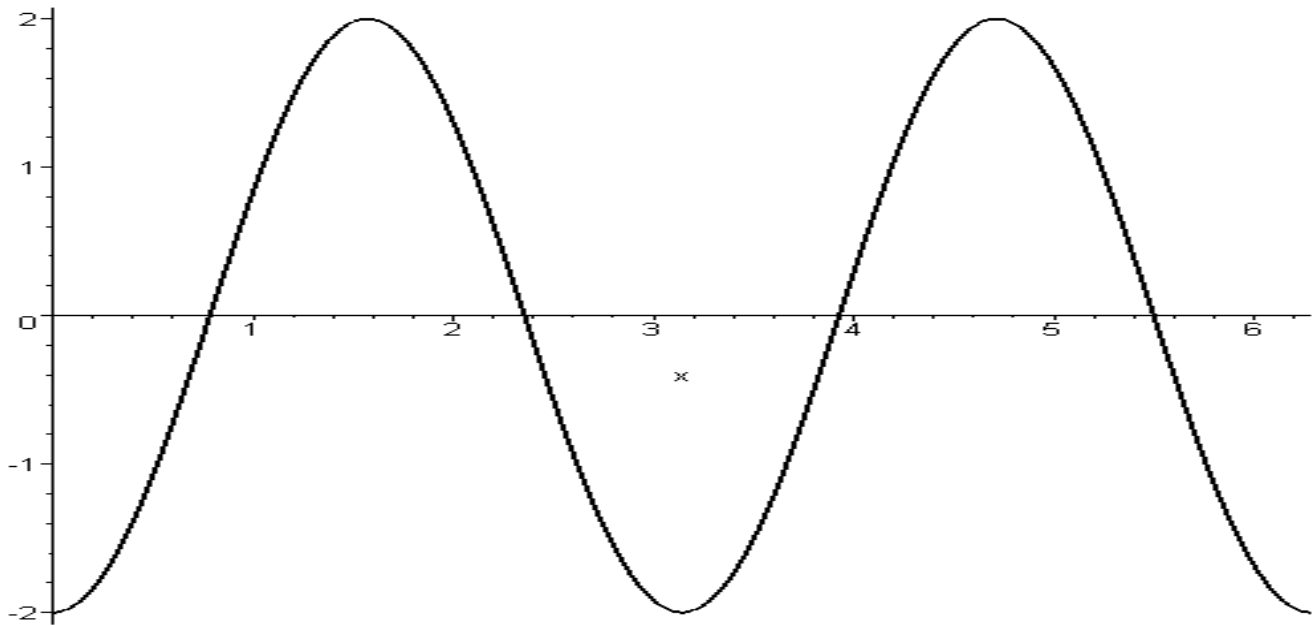
6b) De grafiek van $f(x) = \cos(\pi - x) = [\cos \pi \cdot \cos x + \sin \pi \cdot \sin x] = -\cos x$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x) = \cos x$ door deze te spiegelen t.o.v. de x -as.



6c) De grafiek van $f(x) = 3 \cdot \cos(3x - 1) + 1 = 3 \cdot \cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\right)\right) + 1$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x) = \cos(3x)$ door deze over een afstand $\frac{1}{3}$ naar rechts te verplaatsen, de y-coördinaten met 3 te vermenigvuldigen (oprekken) en vervolgens met een bedrag 1 omhoog te schuiven (de grafiek van $f_1(x) = \cos(3x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x) = \cos x$ door deze met een factor 3 in te krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een cosinusfunctie met periode $\frac{2}{3}\pi$, amplitude 3, voorlopig beginpunt $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$ en evenwichtslijn $y = 1$.



6d) De grafiek van $f(x) = -2 \cdot \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = -2 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ krijgen we uit de grafiek van $f_1(x) = \sin(2x)$ door deze over een afstand $\frac{1}{6}\pi$ naar links te verplaatsen, de y-coördinaten met -2 te vermenigvuldigen (oprekken en spiegelen t.o.v. x-as); (de grafiek van $f_1(x) = \sin(2x)$ krijgen we uit de grafiek van $f_2(x) = \sin x$ door deze met een factor 2 in te krimpen t.o.v. de verticale as). Het resultaat is een sinusfunctie met periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$, amplitude 2, voorlopig beginpunt $\left(-\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ of $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ en evenwichtslijn $y = 0$.



$$\begin{aligned}
 7) (\sin x + \cos x)^2 &= (\sin x)^2 + 2 \sin x \cos x + (\cos x)^2 \\
 &= (\sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2 \sin x \cos x \\
 &= 1 + \sin(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \cos(2x) &= 2(\cos x)^2 - 1 \Rightarrow \\
 \cos x &= 2\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 - 1 \Rightarrow \\
 2\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 &= 1 + \cos x \Rightarrow \\
 \left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 &= \frac{1}{2}(1 + \cos x)
 \end{aligned}$$

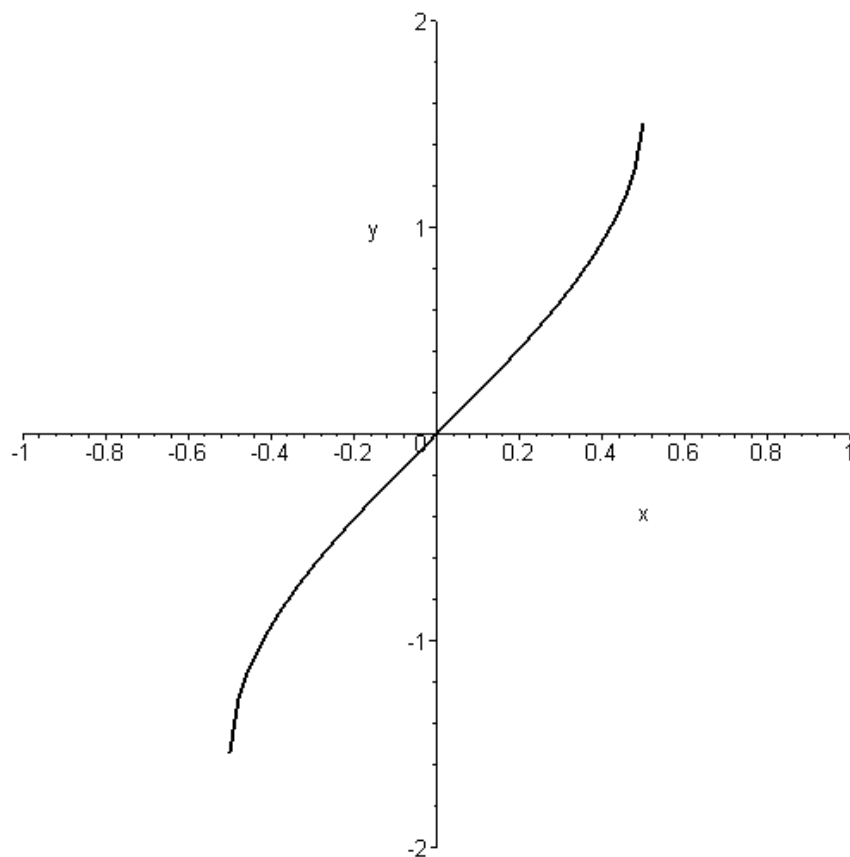
$$\begin{aligned}
 9a) \cos(2x) + \cos x &= 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(2x+x)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(2x-x)\right) \\
 &= 2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9b) \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \cos x \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right) \\
 &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \\
 &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right) \\
 &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9c) \quad \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-y+(x+y))\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x+y-(x-y))\right) \\
 &= 2 \cdot \sin(x) \sin(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9d) \quad \sin(2x) - \sin(3x) &= 2 \cos\left(\frac{1}{2}(2x+3x)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(2x-3x)\right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) \\
 &= -2 \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \sin\left(\frac{1}{2}x\right)
 \end{aligned}$$

10) De grafiek van $f(x) = \arcsin(2x)$ ontstaat uit de grafiek van $f_1(x) = \arcsin(x)$ door deze met een factor 2 in te krimpen in de richting van de verticale as.



$$\arcsin(2x) < 0,67 \Rightarrow$$

$$\arcsin(2x) < \arcsin(\sin(0,67)) \Rightarrow$$

$$-1 \leq 2x < \sin(0,67)$$

$$-1 \leq 2x < 0,6210 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0,3105 \Rightarrow$$

$$-0,5 \leq x < 0,3105$$