



Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 6 Exponentiële en logaritmische functies

1.
 - a $y = f(x) = 0,95^x$; dalend, want grondtal (0,95) ligt tussen 0 en 1
 - b $y = f(x) = 1,5^{-x}$; dalend, grondtal groter dan 1, maar $-x$ in de exponent;
of het voorschrift herschrijven tot: $y = f(x) = 1,5^{-x} = (1,5^{-1})^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; nu is grondtal tussen 0 en 1, dus dalend
 - c $y = f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x}$; stijgend, grondtal tussen 0 en 1, maar $-x$ in de exponent;
of het voorschrift herschrijven tot: $y = f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x} = \left(\frac{7}{5}\right)^x = 1,4^x$; nu is het grondtal groter dan 1, dus stijgend
 - d $y = f(x) = 1^x$; constant, want $y = f(x) = 1^x = 1$.

2.
 - a Teken de grafiek van de functie f .
.....
 - b Wat gebeurt er met de functiewaarde van f als x steeds groter wordt?
Functiewaarde blijft negatief, maar nadert wel tot 0.
 - c Wat gebeurt er met de functiewaarde van f als x steeds sterker negatief wordt?
Functiewaarde wordt steeds sterker negatief
 - d In welk punt snijdt de grafiek van f de y -as?
In het punt $(0, f(0)) = (0, -3)$
 - e In welk punt snijdt de grafiek van f de x -as?
Er is geen snijpunt met de x -as

3.
 - a $3^{2x} = 27 \Rightarrow 3^{2x} = 3^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$
 - b $3^{5x-1} = 81 \Rightarrow 3^{5x-1} = 3^4 \Rightarrow 5x-1 = 4 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$
 - c $5^{2x+3} = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^{2x+3} = 5^{-3} \Rightarrow 2x+3 = -3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$
 - d $5^{1-2x} = 25\sqrt[3]{5} \Rightarrow 5^{1-2x} = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 5^{1-2x} = 5^{2\frac{1}{3}} \Rightarrow 1-2x = 2\frac{1}{3} \Rightarrow -2x = 1\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

4.
 - a $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} = 625 \Rightarrow (5^{-1})^{4x} = 5^4 \Rightarrow 5^{-4x} = 5^4 \Rightarrow -4x = 4 \Rightarrow x = -1$
 - b $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 250 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125 \Rightarrow (5^{-1})^x = 5^3 \Rightarrow 5^{-x} = 5^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$
 - c $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x} = 9\sqrt{3} \Rightarrow (3^{-1})^{\frac{1}{2}x} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-\frac{1}{2}x} = 3^{2\frac{1}{2}} \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2} \Rightarrow x = -5$
 - d $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{1}{2}x} = 27\sqrt[3]{3} \Rightarrow (3^{-1})^{1-\frac{1}{2}x} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3^{-1+\frac{1}{2}x} = 3^{3\frac{1}{4}} \Rightarrow -1+\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4\frac{1}{4} \Rightarrow x = 8\frac{1}{2}$

5.
 - a $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} = -49\sqrt{7}$; geen oplossingen een macht van $\frac{1}{7}$ kan nooit negatief worden.
 - b $49^{3x} = \frac{1}{49}\sqrt{7} \Rightarrow (7^2)^{3x} = 7^{-2} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 7^{6x} = 7^{-1\frac{1}{2}} \Rightarrow 6x = -1\frac{1}{2} \Rightarrow 6x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
 - c $4 \cdot 3^x - 3^2 = 3^3 \Rightarrow 4 \cdot 3^x = 3^2 + 3^3 \Rightarrow 4 \cdot 3^x = 9 + 27 \Rightarrow 4 \cdot 3^x = 36 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$



Toegepaste Wiskunde inleiding

d

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot 11^{0,7x} &= 121^2 \cdot \sqrt[4]{11} \Rightarrow 11^{-\frac{1}{2}} \cdot 11^{0,7x} = (11^2)^2 \cdot 11^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 11^{0,7x - \frac{1}{2}} = 11^{\frac{4}{4}} \Rightarrow 0,7x - \frac{1}{2} = 1 \\ \Rightarrow 0,7x &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{7}{10}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{7} \Rightarrow x = \frac{15}{7} \Rightarrow x = \frac{150}{70} \Rightarrow x = \frac{15}{7} \Rightarrow x = 2\frac{1}{7} \end{aligned}$$

6. a $5^{2x-3} < 125 \Rightarrow 5^{2x-3} < 5^3 \Rightarrow 2x-3 < 3 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$

b $2^{1-3x} > \frac{1}{16}\sqrt{2} \Rightarrow 2^{1-3x} > 2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{1-3x} > 2^{-3\frac{1}{2}} \Rightarrow 1-3x > -3\frac{1}{2} \Rightarrow -3x > -4\frac{1}{2} \Rightarrow x < 1\frac{1}{2}$

c $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \leq 625 \Rightarrow (5^{-1})^{2x-1} \leq 5^4 \Rightarrow 5^{-(2x-1)} \leq 5^4 \Rightarrow -2x+1 \leq 4 \Rightarrow -2x \leq 3 \Rightarrow x \geq -1\frac{1}{2}$

d $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-5x} < 2^{3x} \Rightarrow (2^{-1})^{1-5x} < 2^{3x} \Rightarrow 2^{-1+5x} < 2^{3x} \Rightarrow -1+5x < 3x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

7. a $y = f(x) = {}^7\log x$; domein: $x > 0$

b $y = f(x) = \log(2x+3)$; domein: $2x+3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -1\frac{1}{2}$

c $y = f(x) = {}^3\log(5-2x)$; domein: $5-2x > 0 \Rightarrow -2x > -5 \Rightarrow x < 2\frac{1}{2}$

d $y = f(x) = \frac{1}{4}\log(-x)$; domein: $-x > 0 \Rightarrow x < 0$

8. a Teken in één figuur de grafieken van de functies f , g en h en k .

.....

Vergelijk in de onderdelen b t/m f de grafieken van de twee genoemde functies. Ga na of er sprake is van symmetrie in de x -as, de y -as, de lijn $y = x$ en/of de lijn $y = -x$.

b Vergelijk de grafieken van f en g op bovengenoemde symmetriekenmerken.

Antw: grafiek van f spiegelen in de y -as geeft de grafiek van g en andersom.

c Vergelijk de grafieken van f en h op bovengenoemde symmetriekenmerken.

Antw: grafiek van f spiegelen in de x -as geeft de grafiek van h en andersom.

d Vergelijk de grafieken van g en h op bovengenoemde symmetriekenmerken.

Antw: grafiek van g spiegelen in de oorsprong geeft de grafiek van h en andersom.

e Vergelijk de grafieken van h en k op bovengenoemde symmetriekenmerken.

Antw: grafiek van h spiegelen in de lijn $y = x$ geeft de grafiek van k en andersom.

f Vergelijk de grafieken van g en k op bovengenoemde symmetriekenmerken.

Antw: grafiek van g spiegelen in de lijn $y = -x$ geeft de grafiek van k en andersom.

9. a $y = f(x) = \log(2x-5)$; stijgend, grondtal (10) is groter dan 1.

b $y = g(x) = {}^2\log(1-x)$; dalend, grondtal (2) is groter dan 1, maar $-x$

c $y = h(x) = \frac{1}{3}\log(9)$; constant, want $\frac{1}{3}\log(9) = -2$.

10. a ${}^3\log(6x) = 2 \Rightarrow 6x = 3^2 \Rightarrow 6x = 9 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$

b ${}^3\log(2x-1) = -1 \Rightarrow 2x-1 = 3^{-1} \Rightarrow 2x = 1\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c ${}^5\log(9-2x) = 0 \Rightarrow 9-2x = 5^0 \Rightarrow 9-2x = 1 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow x = 4$



Toegepaste Wiskunde inleiding

d ${}^5 \log(x^2 + 4x) = 1 \Rightarrow x^2 + 4x = 5^1 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ of } x = 1$

11. Los de volgende vergelijkingen op.

a $\log(20x) = 2 \Rightarrow {}^{10} \log(20x) = 2 \Rightarrow 20x = 10^2 \Rightarrow 20x = 100 \Rightarrow x = 5$

b $\log(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow {}^{10} \log(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = 10^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{10}}$

c $\frac{1}{2} \log(2x) = 3 \Rightarrow 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 2x = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$

d ${}^7 \log(10x-1) = 2 \Rightarrow 10x-1 = 7^2 \Rightarrow 10x-1 = 49 \Rightarrow 10x = 50 \Rightarrow x = 5$

12. Los de volgende vergelijkingen op.

a $\log(3x+5) = \log(2x-1) \Rightarrow 3x+5 = 2x-1 \Rightarrow x = -6;$

$x = -6$ voldoet niet want voor $x = -6$ zijn zowel $3x+5$ als $2x-1$ niet positief.
Dus geen oplossingen.

b

$${}^5 \log(2x-5) + \frac{1}{5} \log(x-4) = 1 \Rightarrow {}^5 \log(2x-5) + \frac{{}^5 \log(x-4)}{{}^5 \log\left(\frac{1}{5}\right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\left[\text{bedenk: } {}^5 \log\left(\frac{1}{5}\right) = {}^5 \log(5^{-1}) = -1 \right]$$

$${}^5 \log(2x-5) - {}^5 \log(x-4) = 1 \Rightarrow {}^5 \log\left(\frac{2x-5}{x-4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x-5}{x-4} = 5^1 \Rightarrow$$

$$\frac{2x-5}{x-4} = 5 \Rightarrow \frac{2x-5}{x-4} = \frac{5}{1} \Rightarrow 5(x-4) = 1(2x-5) \Rightarrow 5x-20 = 2x-5 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$x = 5$ voldoet, want voor $x = 5$ is zowel $2x-5$ als $x-4$ positief.

Dus oplossing: $x = 5$

c $10^{9x-8} = 7 \Rightarrow 9x-8 = {}^{10} \log 7 \Rightarrow 9x-8 \approx 0,8451 \Rightarrow 9x \approx 8,8451 \Rightarrow x \approx 0,9828$

d $3^{1-4x} = 5 \Rightarrow 1-4x = {}^3 \log 5 \Rightarrow 1-4x = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow 1-4x \approx 1,4650$

$$\Rightarrow -4x \approx 0,4650 \Rightarrow x \approx -0,1163$$

13. a ${}^5 \log(x-3) \leq 2 \Rightarrow x-3 \leq 5^2 \Rightarrow x-3 \leq 25 \Rightarrow x \leq 28$

domeineis: $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$; samen geeft dit: $x > 3$ en $x \leq 28 \Rightarrow 3 < x \leq 28$

b $\frac{1}{3} \log x \leq -2 \Rightarrow x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x \geq 9$; domeineis: $x > 0$;

samen geeft dit: $x > 0$ en $x \geq 9 \Rightarrow x \geq 9$

c $\log(2x) \leq \log(5-3x) \Rightarrow 2x \leq 5-3x \Rightarrow 5x \leq 5 \Rightarrow x \leq 1$

domeineis linkerlid: $2x > 0 \Rightarrow x > 0$; domeineis rechterlid: $5-3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

samen geeft dit: $x > 0$ en $x < \frac{5}{3}$ en $x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 1$

d $\log(2x-7) \leq \log(x-2) \Rightarrow 2x-7 \leq x-2 \Rightarrow x \leq 5$

domeineis linkerlid: $2x-7 > 0 \Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > 3\frac{1}{2}$;

domeineis rechterlid: $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

samen geeft dit: $x > 3\frac{1}{2}$ en $x > 2$ en $x \leq 5 \Rightarrow 3\frac{1}{2} < x \leq 5$