

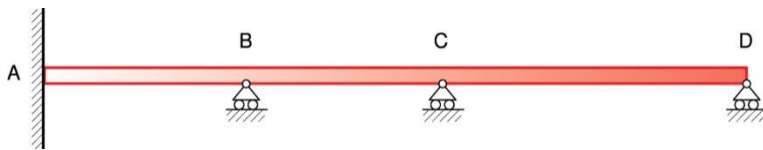
Module 6

Uitwerkingen van de opdrachten

Hoofdstuk 2 Statisch onbepaald

Opdracht 1

De in figuur 6.1 gegeven constructie heeft vier punten waar deze is ondersteund.



Figuur 6.1

De onbekende oplegreacties zijn:

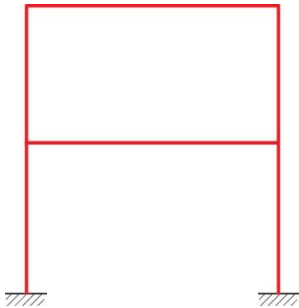
- moment in punt A
- verticale oplegreactie in punt A
- horizontale oplegreactie in punt A
- verticale oplegreactie in punt B
- verticale oplegreactie in punt C
- verticale oplegreactie in punt D

Het aantal onbekende uitwendige krachten is gelijk aan zes ($R = 6$) en het aantal evenwichtsvergelijkingen is gelijk aan drie ($E = 3$). De constructie is dus drievoudig statisch onbepaald ($n = R - E$). Met deze feiten in het achterhoofd kan er worden begonnen aan de beantwoording van de vragen.

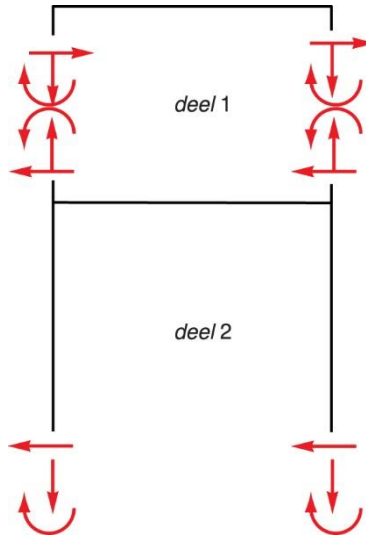
- a Drievoudig statisch onbepaald houdt in dat er ook drie statisch onbepaalden moeten worden gekozen. Dit kunnen drie onbekende uitwendige oplegreacties zijn uit het hiervoor weergegeven rijtje. Echter, er kan ook worden gekozen uit twee inwendig nog onbepaalde momenten, namelijk de overgangsmomenten in de ligger ter plaatse van punt B en C.
- b De constructie is drievoudig statisch onbepaald. Er moeten dus drie scharnieren worden aangebracht om de constructie statisch bepaald te maken.
- c De normaalkracht speelt geen rol in dit probleem. Er is geen horizontale belasting aanwezig op deze constructie waardoor uit de evenwichtsvergelijking voor de horizontale krachten direct volgt dat de horizontale oplegreactie in punt A gelijk is aan nul.

Opdracht 2

- a De in figuur 6.2 gegeven constructie betreft een portaal met zes staven, zes knopen en zes oplegreacties.
De graad van statisch onbepaaldheid volgt uit de rekenregel: $n = 6 \cdot 6 + 6 - 3 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 6$.
Door de constructie op te delen in twee delen en alle daarop werkende onbekende krachten aan te geven, ontstaat figuur 6.3.



Figuur 6.2



Figuur 6.3

- b** Laat zien dat de gevonden graad van statische onbepaaldheid de juiste is.

<i>Deel 1:</i>	aantal onbekenden	: 6
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 3
<i>Deel 2:</i>	aantal onbekenden	: 12
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 3

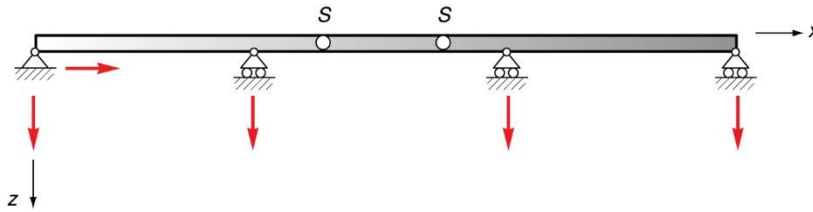
De nog onbekende snedekrachten zijn natuurlijk paarsgewijs aan elkaar gelijk. Dit vermindert het aantal onbekenden met $2 \cdot 3 = 6$. Ga dit zelf na!

<i>Totaal:</i>	aantal onbekenden	: $6 + 12 - 6 = 12$
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 6
	graad van onbepaaldheid	: $n = R - E = 6$

- c** Uitwendig zijn er zes onbekende oplegreacties en voor de gehele constructie gelden er drie evenwichtsvergelijkingen. De constructie is dus uitwendig drievoudig statisch onbepaald. Dit betekent ook dat de constructie dus inwendig drievoudig statisch onbepaald is, want de totale constructie is zesvoudig statisch onbepaald!
- d** Door het aanbrengen van scharnieren in de bovenhoeken verandert de graad van uitwendige statisch onbepaaldheid niet. Echter, de inwendige graad van statisch onbepaaldheid wordt met twee verlaagd en wordt dus enkelvoudig statisch onbepaald.
- e** De constructie is inwendig enkelvoudig statisch onbepaald en uitwendig nog steeds drievoudig statisch onbepaald. Totaal is de constructie viervoudig statisch onbepaald.

Opdracht 3

De in figuur 6.4 weergegeven ligger heeft vier ondersteuning. Totaal zijn er vijf onbekende oplegreacties ($R = 5$). Deze zijn in figuur 6.4 aangegeven.



Figuur 6.4

Uiteraard zijn er drie evenwichtsvergelijkingen:

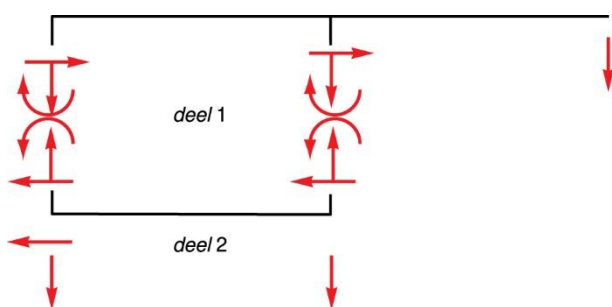
- $\Sigma F_H = 0$
- $\Sigma F_V = 0$
- $\Sigma T = 0$

Tevens zijn er twee scharnieren aangebracht. In elk scharnier is het moment bekend, namelijk nul! Dit levert dus per scharnier een extra vergelijking op. Totaal zijn er zodoende vijf evenwichtsvergelijkingen ($E = 5$). Hieruit volgt dat $n = R - E = 5 - 5 = 0$. De ligger is dus statisch bepaald!

Hoofdstuk 3 Berekenen van de krachtsverdeling

Opdracht 4

- Een statisch onbepaalde constructie is een constructie waarvan de krachtsverdeling in de constructie, dus de momenten, dwarskrachten en normaalkrachten, niet kan worden bepaald uit het evenwicht. Om de krachtsverdeling in de constructie te bepalen moet gebruikgemaakt worden van het vervormingsgedrag van de constructie.
- Statisch onbepaalde constructies kunnen een groter reservedraagvermogen hebben. Dit kan inhouden dat wanneer een constructie zwaar wordt overbelast, een statisch onbepaalde constructie minder snel bezwijkt dan een soortgelijke statisch bepaalde constructie. Omgekeerd geldt dan in feite ook dat statisch onbepaalde constructies veelal lichter kunnen worden uitgevoerd. Aangezien deze constructies veelal stijver zijn dan statisch bepaalde constructies, kan er dus worden geconstrueerd met profielen met een kleiner traagheidsmoment.
- Invullen van de rekenregel levert: $n = 6 \cdot 5 + 4 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 4$. Een andere methode is weergegeven in figuur 6.5.



Figuur 6.5

Deel 1: aantal onbekenden : 7

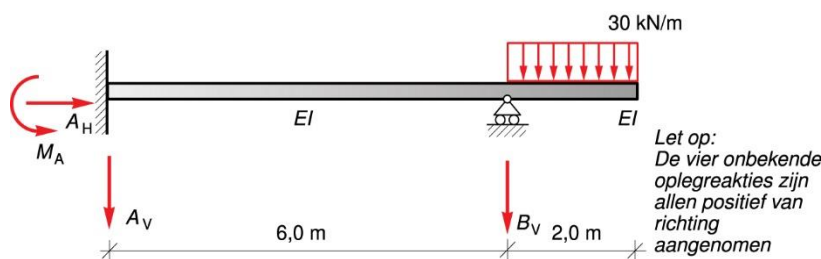
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 3
Deel 2:	aantal onbekenden	: 9
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 3

De nog onbekende snedekrachten zijn natuurlijk paarsgewijs aan elkaar gelijk. Dit vermindert het aantal onbekenden met $2 \cdot 3 = 6$. Ga dit zelf na!

Totaal:	aantal onbekenden	: $7 + 9 - 6 = 10$
	aantal evenwichtsvergelijkingen	: 6
	graad van onbepaaldheid	: $n = R - E = 4$

Opdracht 5

De in figuur 6.6 weergegeven constructie is uitwendig enkelvoudig statisch onbepaald.



Figuur 6.6

In deze figuur zijn de vier onbekende oplegreacties weergegeven ($R = 4$). Het aantal evenwichtsvergelijkingen is drie ($E = 3$). De graad van onbepaaldheid is dus: $n = R - E = 1$.

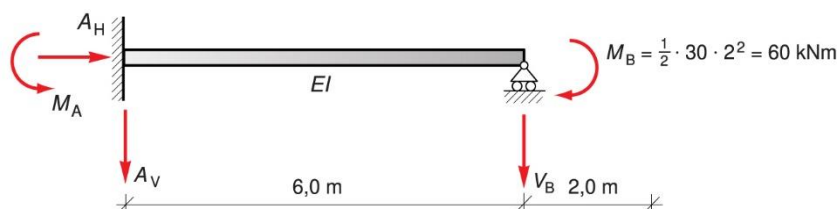
De oplossingsstrategie bestaat uit de volgende onderdelen:

- 1 Deel de constructie op in statisch bepaalde onderdelen.
- 2 Breng de nog onbekende snedekrachten als uitwendige belasting aan op de delen.
- 3 Stel de vormveranderingsvoorwaarde op.
- 4 Los de statisch onbepaalden op.

Dit recept zal nu stap voor stap worden doorlopen.

Stap 1 en 2

Door de ligger statisch bepaald te maken en het onbekende steunpuntsmoment als statisch onbepaalde aan te nemen, ontstaat de schematisering van figuur 6.7.



Figuur 6.7

Let op

Het overstek wordt als een uitwendig moment in punt B geschematiseerd!

Stap 3

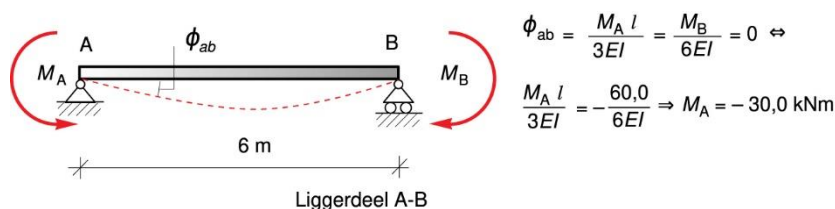
Stel de vormveranderingsvoorwaarde op. Het zal duidelijk zijn dat in dit geval de hoekverandering bij de inklemming nul moet zijn!

$$\varphi_{ab} = 0$$

Voor het uitwerken van deze vergelijking zal gebruik worden gemaakt van de al eerder afgeleide vergeet-mij-nietjes. Verder kan op voorhand al worden vastgesteld dat de horizontale oplegreactie nul moet zijn aangezien er verder geen horizontale belasting op de ligger werkt.

Stap 4

In figuur 6.8 is de opgestelde vormveranderingsvoorwaarde uitgewerkt en is de statisch onbepaalde opgelost.



Figuur 6.8

Nu kan de krachtsverdeling worden bepaald. Daartoe worden eerst de oplegreacties bepaald waarna de V - en de M -lijn kunnen worden bepaald. De oplegreacties volgen uit:

$$A_V + \frac{M_A}{6,0} - \frac{M_B}{6,0} = 0 \Rightarrow A_V = 5 + 10 = 15,0 \text{ kN} \quad (\text{omlaag})$$

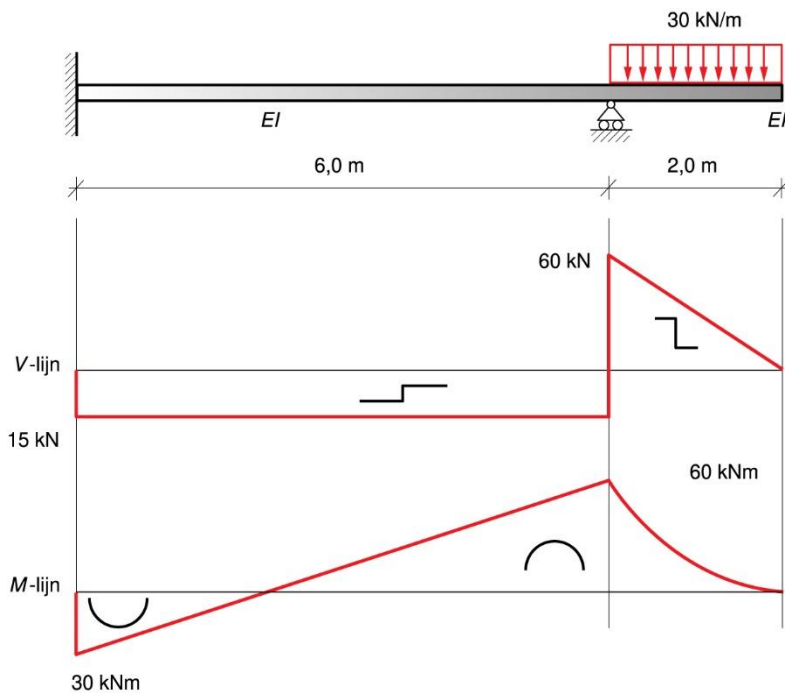
$$A_V + B_V + 30 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow B_V = -15,0 - 60 = -0,75 \text{ kN} \quad (\text{omhoog})$$

Het inwendige moment ter plaatse van steunpunt B is al bekend en is $-60,0 \text{ kNm}$.

Let op

Denk eraan dat bij een overstek het steunpuntsmoment nooit een statisch onbepaalde kan zijn. Immers: het moment wordt veroorzaakt door het overstek en is uit het evenwicht te bepalen!

De V - en M -lijn zijn in figuur 6.9 weergegeven. Ga zelf na of deze lijnen kloppen.



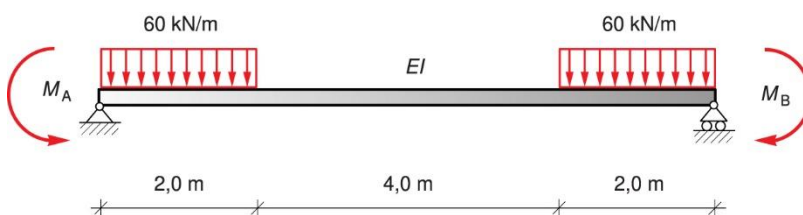
Figuur 6.9

Opdracht 6

De invloed van de normaalkracht wordt verwaarloosd en aangezien er geen horizontale belasting aanwezig is, zijn daarmee de horizontale oplegreacties gelijk aan nul. Zodoende resteren er vier onbekende oplegreacties en zijn er twee bruikbare evenwichtsvergelijkingen. De constructie is daarmee dus tweevoudig statisch onbepaald. Er zijn voor het oplossen dan ook twee statisch onbepaalden noodzakelijk. De beide nog onbekende inklemmingsmomenten worden als statisch onbepaalden aangenomen.

Stap 1 en 2

Maak de constructie statisch bepaald en breng de statisch onbepaalden aan. In figuur 6.10 is dat weergegeven.



Figuur 6.10

Merk op

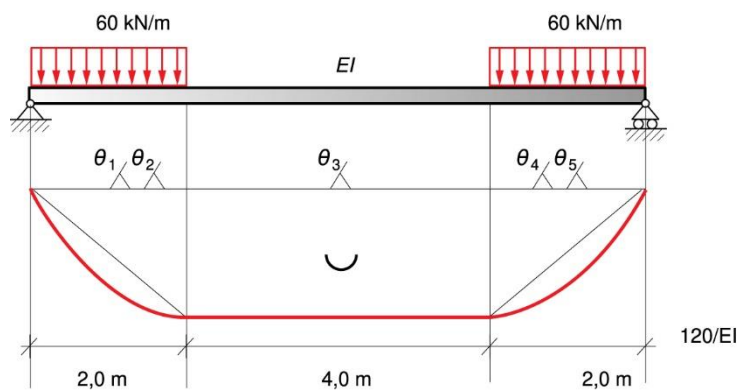
Bij deze schematisering is gebruikgemaakt van het feit dat we eigenlijk al wel weten dat de inklemmingsmomenten links en rechts even groot maar tegengesteld van richting zijn. Immers: dit is een symmetrische constructie met een symmetrische belasting.

$$\varphi_{ab} = 0$$

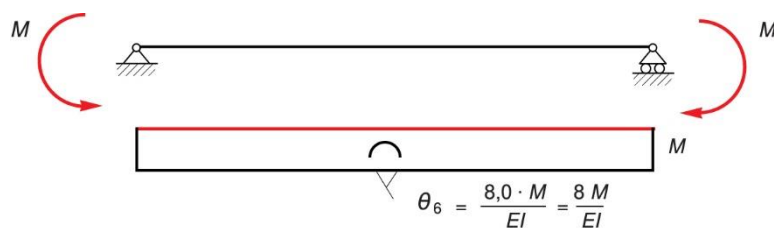
$$\varphi_{ba} = 0$$

Stap 3

In dit geval zijn er twee statisch onbepaalden en dus moeten er ook twee vormveranderingsvoorwaarden worden opgesteld. De vormveranderingsvoorwaarden moeten verband houden met de vrijheidsgraad (verplaatsing) die hoort bij de gekozen statisch onbepaalden. In dit geval zijn dat de hoekveranderingen bij de opleggingen A en B. Deze horen nul te zijn. Immers: het gaat hier om inklemmingen! De twee vormveranderingsvoorwaarden luiden dan ook: voor het uitwerken van deze voorwaarden wordt nu eens geen gebruikgemaakt van de vergeet-mij-nietjes. Als alternatief wordt nu een berekening gemaakt waarbij met behulp van de stellingen van het gereduceerde momentenvlak direct de vormveranderingsvoorwaarden worden opgelost. In figuur 6.11 is de gereduceerde M -lijn van het statisch bepaalde systeem weergegeven en in figuur 6.12 is de gereduceerde M -lijn ten gevolge van de statisch onbepaalden afgebeeld.



$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{2}{3} \cdot 2.0 \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot 60 \cdot 2.0^2}{EI} = \frac{40}{EI} \quad (\text{parabool}) \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2.0 \cdot \frac{120}{EI} = \frac{120}{EI} \quad (\text{driehoek}) \\ \theta_3 &= \frac{4.0 \cdot 120}{EI} = \frac{480}{EI} \quad (\text{rechthoek}) \\ \theta_4 &= \frac{1}{2} \cdot 2.0 \cdot \frac{120}{EI} = \frac{120}{EI} \quad (\text{driehoek}) \\ \theta_5 &= \frac{2}{3} \cdot 2.0 \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot 60 \cdot 2.0^2}{EI} = \frac{40}{EI} \quad (\text{parabool})\end{aligned}$$

Figuur 6.11**Figuur 6.12****Stap 4**

Het nog onbekende moment is op te lossen door de eerste stelling van het momentenvlak toe te passen. De eerste stelling van het momentenvlak luidt namelijk:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

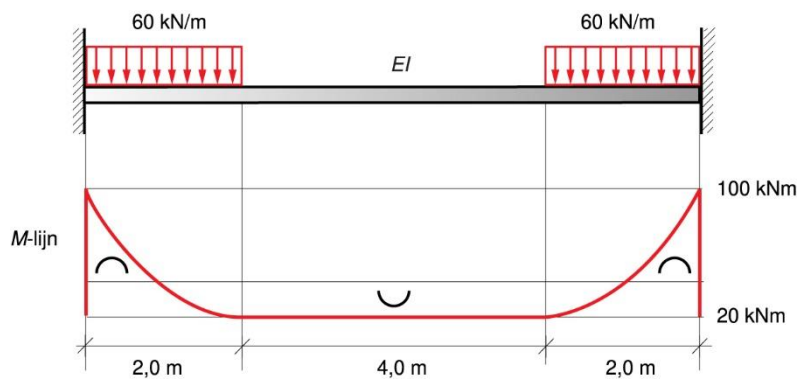
De hoekveranderingen in zowel punt A als punt B zijn nul. Hieruit volgt dat de som van alle hoekjes gelijk moet zijn aan nul!

$$\Sigma \theta_1 = \frac{40 + 120 + 480 + 120 + 40 - 8M}{EI} = 0 \Rightarrow M = 100 \text{ kNm}$$

Opmerking

De aangenomen richtingen van de inklemmingsmomenten waren kennelijk in overeenstemming met de positieve afspraak. Dit houdt tevens in dat de inwendige momenten in de ligger ter plaatse van de inklemmingen negatief moeten zijn! Ga dat zelf na met een schetsje van het evenwicht ter plaatse van beide inklemmingen!

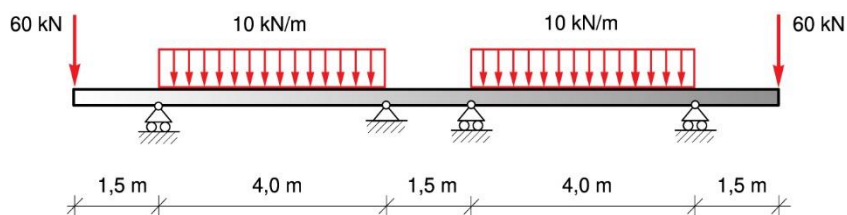
Op deze wijze zijn de statisch onbepaalden bepaald. De momentenlijn is nu te construeren. Immers: de M -lijn voor het statisch bepaalde systeem kan eenvoudig in verticale richting over 100 kNm worden verschoven. Dit resultaat is in figuur 6.13 weergegeven.



Figuur 6.13

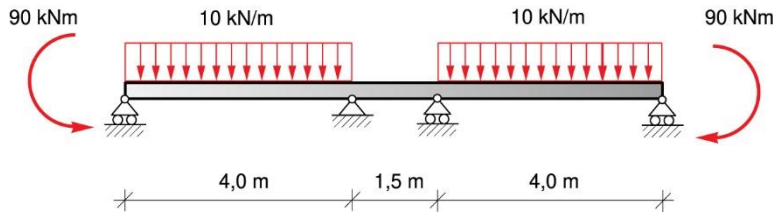
Opdracht 7

De in figuur 6.14 weergegeven constructie betreft ook een symmetrische constructie.



Figuur 6.14

De puntlasten op de overstekken kunnen worden vervangen door uitwendige momenten die in de punten A en D werken zoals in figuur 6.15 is weergegeven.

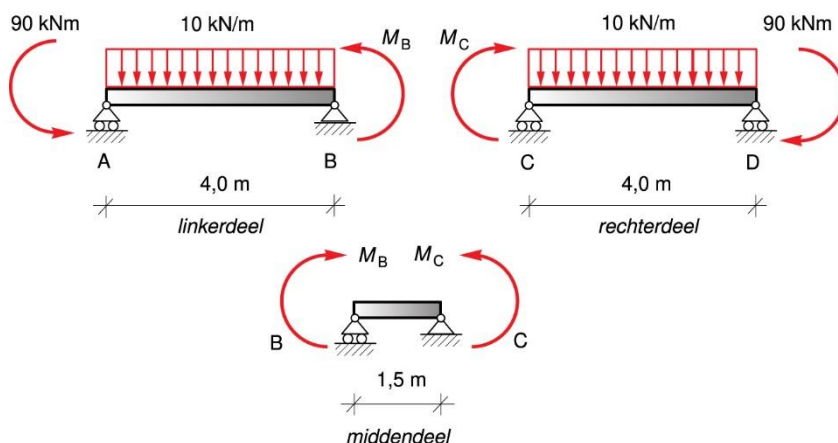


Figuur 6.15

Deze constructie heeft vijf onbekende oplegreacties en er zijn drie evenwichtsvoorwaarden. De constructie is dus tweevoudig statisch onbepaald. Om de oplossing te kunnen vinden moeten er dus twee statisch onbepaalden worden gekozen en twee vormveranderingsvoorwaarden worden opgesteld.

Stap 1 en 2

Maak de constructie statisch bepaald en breng de statisch onbepaalden aan. De doorgaande ligger is eenvoudig op te splitsen in drie statisch bepaalde liggers. De inwendige momenten ter plaatse van de steunpunten worden als statisch onbepaalden gekozen. Deze nog onbekende inwendige momenten worden positief van richting aangenomen zoals in figuur 6.16 is weergegeven.



Figuur 6.16

Let op

De tekenafspraken voor positieve inwendige momenten geldt niet voor positieve uitwendige momenten. M_B en M_C zijn dus inwendig en positief aangenomen, uitwendig werken in A $+90$ kNm en in D -90 kNm. Lees anders module 5, hoofdstuk 2 er nog eens op na.

Stap 3

De op te stellen vormveranderingsvoorwaarden moeten betrekking hebben op de vrijheidsgraad (verplaatsing) die te maken heeft met de gekozen statisch onbepaalde. In het geval van een moment als statisch onbepaalde is de vrijheidsgraad een hoekverandering of rotatie, terwijl in het geval van een kracht de vrijheidsgraad een zakking is.

In dit geval moeten we dus twee vormveranderingsvoorwaarden opstellen met betrekking tot de hoekverandering ter plaatse van de ondersteuning. Met deze vormveranderingsvoorwaarden eisen we dat de gaping in de ligger ter plaatse van de

steunpunten nul moet zijn. Deze vormveranderingsvoorwaarden zijn dus van het type gaapvergelijking.

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc}$$

$$\varphi_{cb} = \varphi_{cd}$$

Deze twee vergelijkingen zullen verder worden uitgewerkt met behulp van de bekende vergeet-mij-nietjes.

Stap 4

Door de gaapvergelijkingen uit te werken ontstaat: (Ga dit na!)

$$-\frac{90,0 \cdot 4,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 4,0}{3EI} + \frac{10,0 \cdot 4,0^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 1,5}{3EI} - \frac{M_C \cdot 1,5}{6EI}$$

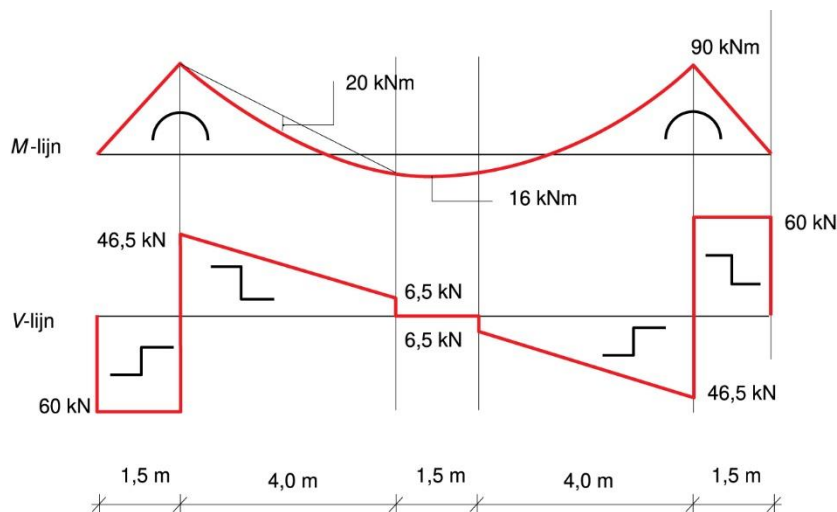
$$\frac{M_B \cdot 1,5}{6EI} + \frac{M_C \cdot 1,5}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 4,0}{3EI} + \frac{90,0 \cdot 4,0}{6EI} - \frac{10,0 \cdot 4,0^3}{24EI}$$

Hieruit volgt:

$$11M_B + \frac{2}{3}M_C = 200$$

$$\frac{2}{3}M_B + 11M_C = 200 \Rightarrow M_B = M_C = 16 \text{ kNm}$$

Hiermee zijn de twee statisch onbepaalden bepaald en kunnen de oplegreacties worden bepaald. Vervolgens kunnen de in figuur 6.17 weergegeven V- en M-lijnen worden geconstrueerd.



Figuur 6.17

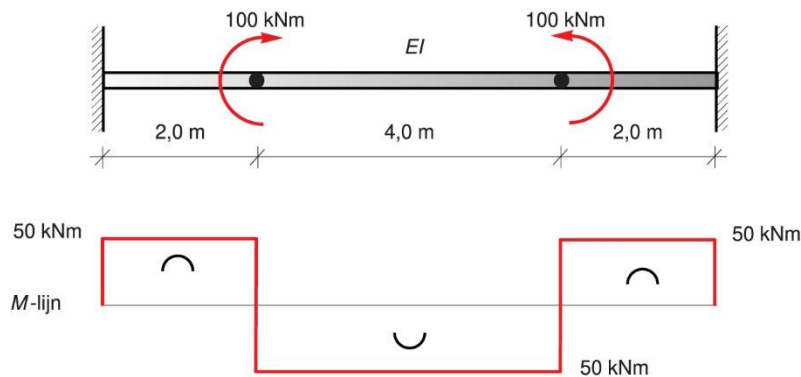
Opdracht 8

Ook deze symmetrische constructie kan statisch bepaald worden gemaakt. Neem de inklemmingsmomenten als statisch onbekenden aan. De hoekverdraaiingen bij de inklemmingen moeten nul zijn. Dit zijn dus de twee vormveranderingsvoorwaarden. Net als bij opdracht 6 kan hier het best worden gewerkt met het uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden met

behulp van de stelling van het gereduceerde momentenvlak. Inmiddels moet het uitwerken van deze opdracht geen probleem meer opleveren.

De momentenlijn van de oplossing is in figuur 6.18 afgebeeld.

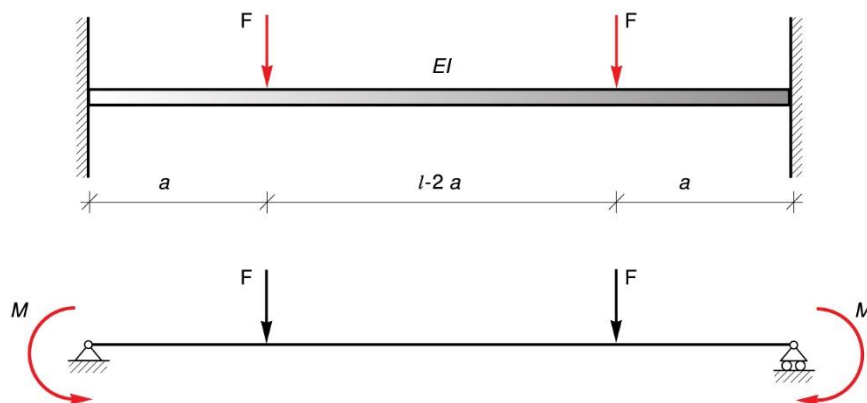
In deze constructie ontstaan nergens dwarskrachten!



Figuur 6.18

Opdracht 9

Ook hier betreft het een symmetrisch probleem. De afmetingen zijn parametrisch, dus geen getallen maar variabelen. Het recept zal in het kort worden doorlopen. De keuze voor het statisch bepaalde hoofdsysteem en de statisch onbepaalden en de vormveranderingsvoorwaarden moeten inmiddels geen enkel probleem meer opleveren en is weergegeven in figuur 6.19.



Figuur 6.19

Let op

Het probleem is symmetrisch. Het rechter inklemmingsmoment is dus gelijk maar tegengesteld van richting aangenomen als het linker inklemmingsmoment. Hierdoor wordt de uitwerking aanzienlijk vereenvoudigd.

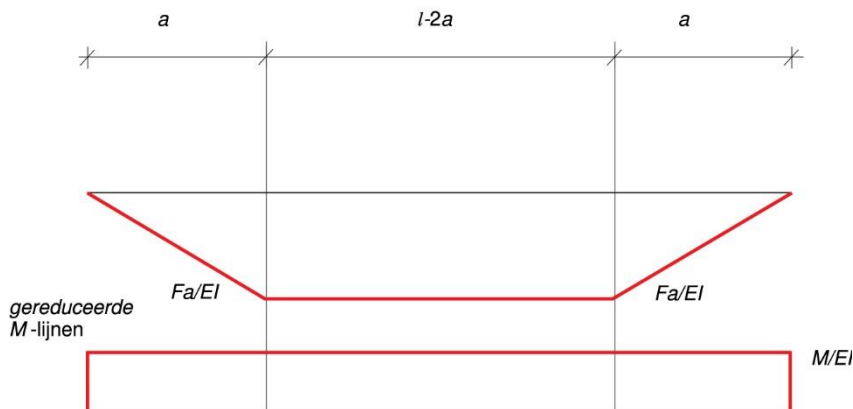
De vormveranderingsvoorwaarden luiden:

$$\varphi_{ab} = 0$$

$$\varphi_{ba} = 0$$

Met behulp van de gereduceerde momentenlijn zullen deze vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt.

De uiteindelijke M -lijn bestaat uit de som van de M -lijn van het statisch bepaalde hoofdsysteem en de M -lijn ten gevolge van de statisch onbepaalden. Deze beide M -lijnen zijn in figuur 6.20 weergegeven.



Figuur 6.20

Beide gereduceerde M -lijnen hebben hun aandeel in de hoekverandering ter plaatse van de inklemmingen. Door de hoekverandering op nul te stellen wordt de oplossing gevonden.

Uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden levert:

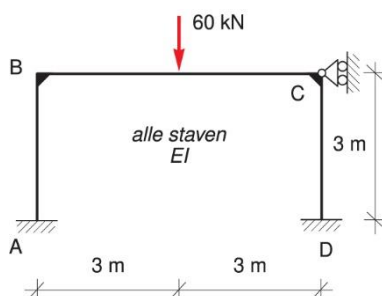
$$\frac{Fa \cdot a}{2EI} + \frac{(l - 2a) \cdot Fa}{EI} + \frac{Fa \cdot a}{2EI} - \frac{M \cdot l}{EI} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{Fa(l - a)}{l}$$

Let op

Eerste stelling van het momentenvlak: de som van de beide oppervlakken moet nul zijn, omdat in B de ligger is ingeklemd!

Opdracht 10a

De in figuur 6.21 afgebeelde constructie is een viervoudig statisch onbepaalde constructie.



Figuur 6.21

Er zijn dus vier statisch onbepaalden te kiezen en daarbij horen ook vier nog op te stellen vormveranderingsvoorwaarden. Het ligt voor de hand om de beide inklemmingsmomenten en de inwendige momenten in de hoeken van de bovenregel als statisch onbepaalden te kiezen. Dit houdt dus feitelijk in:

- M_A uitwendige oplegreactie
- M_B inwendig snedemoment
- M_C inwendig snedemoment
- M_D uitwendige oplegreactie

De vier vormveranderingsvoorwaarden zien er als volgt uit:

$$\begin{aligned}\varphi_{ab} &= 0 \\ \varphi_{ba} &= \varphi_{bc} \\ \varphi_{cb} &= \varphi_{cd} \\ \varphi_{dc} &= 0\end{aligned}$$

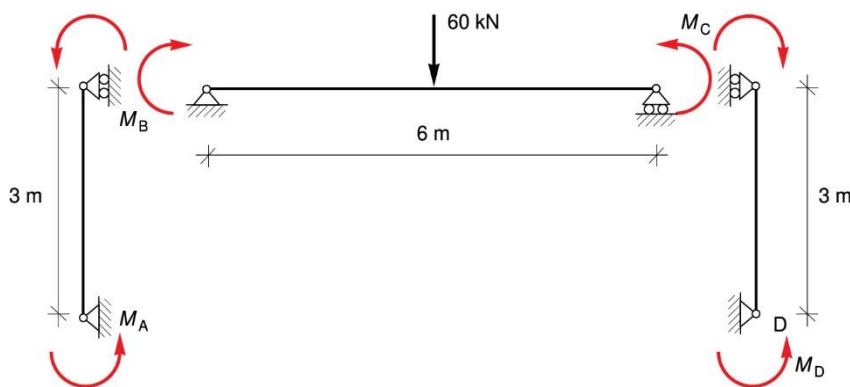
Bij een *moment* als statisch onbepaalde hoort een vormveranderingsvoorwaarde van het type:

$$\varphi_{links} = \varphi_{rechts}$$

Aangezien er geen horizontale belasting aanwezig is, is er geen horizontale oplegreactie in punt C. Hierdoor is dit probleem symmetrisch. Dit gegeven kan worden gebruikt bij het oplossen van de vergelijkingen. In feite betekent dit dat er slechts twee vergelijkingen hoeven te worden opgelost.

Stap 1, 2 en 3

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen, geef de statisch onbepaalden aan en stel de vormveranderingsvoorwaarden op (zie figuur 6.22).



Figuur 6.22

Let op

De (onbekende) uitwendige momenten zijn positief van richting aangenomen en ook de (onbekende) inwendige momenten zijn positief van richting aangenomen.

Vanwege de symmetrie kan worden gesteld:

$$\begin{aligned}M_B &= M_C \\ M_A &= -M_D\end{aligned}$$

Stap 4

Vanwege de symmetrie hoeven alleen de eerste twee vormveranderingsvoorwaarden te worden uitgewerkt met behulp van de vergeet-mij-nietjes:

$$\frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} = 0$$

$$-\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{60 \cdot 6,0^2}{16EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

Vanwege de symmetrie ontstaat het volgende stelsel:

$$M_A - \frac{1}{2} M_B = 0$$

$$\frac{1}{2} M_A - 4M_B = \frac{60 \cdot 36}{16}$$

Uitwerken levert:

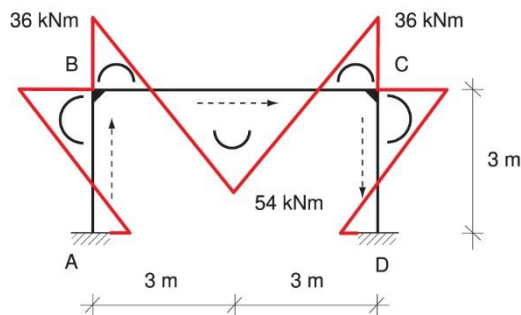
$$M_A = -18 \text{ kNm}$$

$$M_B = -36 \text{ kNm}$$

$$M_C = -36 \text{ kNm}$$

$$M_D = 18 \text{ kNm}$$

Met deze resultaten kunnen de overige oplegreacties worden bepaald en kunnen de V - en de M -lijnen worden getekend. Alleen de M -lijn is in figuur 6.23 getekend.



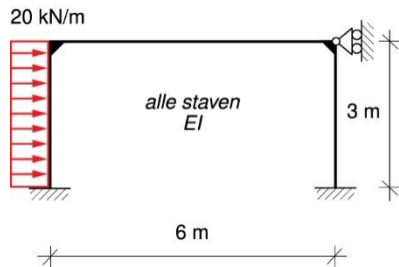
Figuur 6.23

Finishing touch

Bepalen van de oplegreacties en de krachtsverdeling. De zichtrichting is met de gestippelde pijltjes in figuur 6.23 aangegeven.

Opdracht 10b

De in figuur 6.24 weergegeven constructie kan op dezelfde wijze worden opgelost als de vorige opdracht.

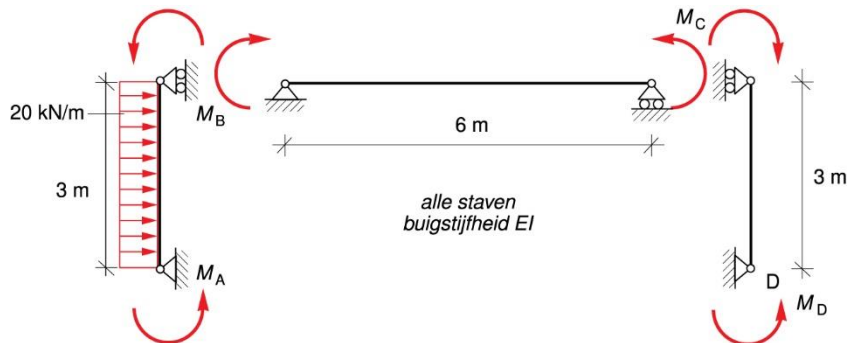


Figuur 6.24

Nu geldt echter niet dat de constructie symmetrisch is. Er is immers een horizontale belasting. De statisch onbepaalden zijn dezelfde als in de vorige opdracht en dus kunnen ook dezelfde vormveranderingsvoorwaarden worden opgesteld.

Stap 1, 2 en 3

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen, breng de statisch onbepaalden aan en stel de hierbij horende vormveranderingsvoorwaarden op (zie opdracht 10a). Het resultaat is weergegeven in figuur 6.25.



Figuur 6.25

De vormveranderingsvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned}\varphi_{ab} &= 0 \\ \varphi_{ba} &= \varphi_{bc} \\ \varphi_{cb} &= \varphi_{cd} \\ \varphi_{dc} &= 0\end{aligned}$$

Stap 4

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de vier vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt.

$$\begin{aligned} \frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} - \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= 0 \\ -\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} + \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} \\ &= -\frac{M_C \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_D \cdot 3,0}{6EI} \\ -\frac{M_C \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_D \cdot 3,0}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is te vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} 24M_A - 12M_B &= 540 \\ -12M_A + 72M_B + 24M_C &= -540 \\ 6M_B + 18M_C + 3M_D &= 0 \\ 3M_C + 6M_D &= 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel kan worden opgelost (vegen of met een solver zoals DERIVE). De oplossing is:

$$\begin{aligned} M_A &= 20,1 \text{ kNm} \\ M_B &= -4,7 \text{ kNm} \\ M_C &= 1,7 \text{ kNm} \\ M_D &= -0,9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Met deze oplossing kunnen de oplegreacties en de V - en de M -lijn worden bepaald. Dit wordt verder aan de lezer overgelaten.

Opdracht 11

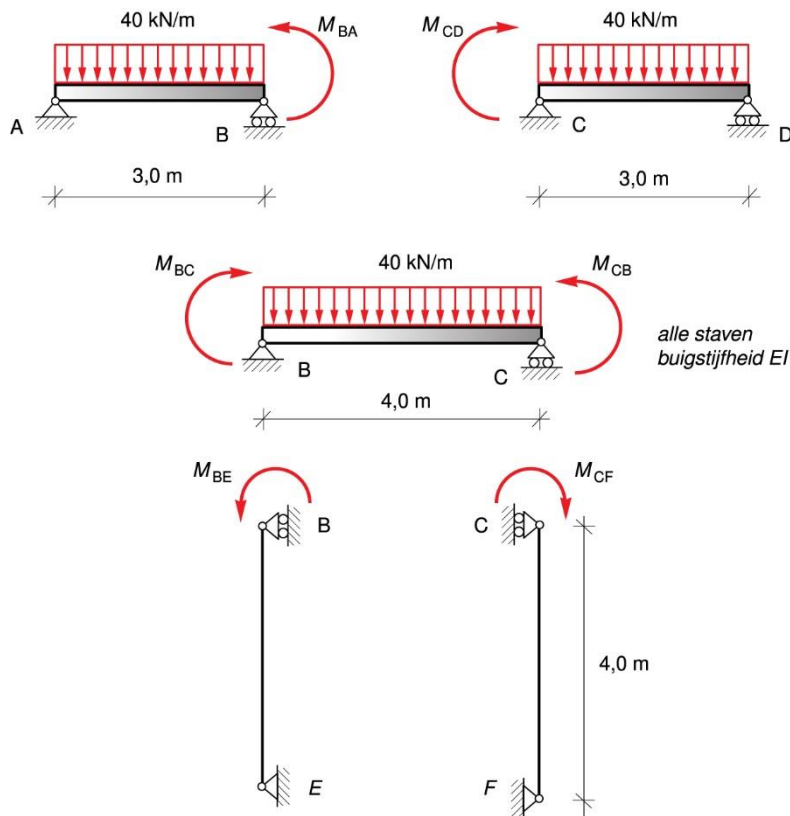
Ook deze constructie is symmetrisch. De constructie is viervoudig statisch onbepaald. Vanwege de symmetrie hoeft in principe maar de helft van het aantal statisch onbepaalden te worden bepaald. Ook nu kan volgens het recept worden gewerkt.

Stap 1 en 2

Maak de constructie statisch bepaald en geef de statisch onbepaalden aan. In figuur 6.26 is de constructie opgedeeld in statisch bepaalde onderdelen.

In deze figuur zijn zes inwendige momenten aangegeven. In knoop B en C komen drie staven bij elkaar. Uiteraard moet het knooppunt in evenwicht zijn. Dit houdt in dat de som van de momenten in knoop B en C nul moet zijn. Uitwerken levert:

$$\begin{aligned} M_{BA} - M_{BC} + M_{BE} &= 0 \Rightarrow M_{BC} = M_{BA} + M_{BE} \\ -M_{CD} + M_{CB} - M_{CF} &= 0 \Rightarrow M_{CB} = M_{CD} + M_{CF} \end{aligned}$$



Figuur 6.26

Vanwege de symmetrie kan ook op voorhand worden vastgesteld dat:

$$\begin{aligned} M_{BC} &= M_{CB} \\ M_{BA} &= M_{CD} \\ M_{BE} &= M_{CF} \end{aligned}$$

Resteren in feite dus nog maar twee statisch onbepaalden: M_{BA} en M_{BE} . De volgende stap is het opstellen van de vormveranderingsvoorwaarden.

Stap 3

De hoeken tussen de staven in de knopen B en C moeten haaks blijven. Dit levert de volgende vormveranderingsvoorwaarden op:

$$\begin{aligned} \varphi_{ba} &= \varphi_{be} \\ \varphi_{bc} &= \varphi_{be} \\ \varphi_{cb} &= \varphi_{cf} \\ \varphi_{cd} &= \varphi_{cf} \end{aligned}$$

Stap 4

Vanwege symmetrie zullen alleen de eerste twee vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\frac{M_{BA} \cdot 3,0}{3EI} + \frac{40 \cdot 3,0^3}{24EI} = \frac{M_{BE} \cdot 4,0}{3EI}$$

$$-\frac{M_{BC} \cdot 4,0}{3EI} - \frac{40 \cdot 4,0^3}{24EI} - \frac{M_{BC} \cdot 4,0}{6EI} = \frac{M_{BE} \cdot 4,0}{3EI}$$

Hierbij is al meteen gebruikgemaakt van het feit dat M_{BC} gelijk is aan M_{CB} . Uitwerken van dit stelsel levert:

$$M_{BA} - \frac{4}{3} M_{BE} = -45$$

$$-2(M_{BA} + M_{BE}) - \frac{4}{3} M_{BE} = 106,667$$

Oplossen levert:

$$M_{BE} = -2,8 \text{ kNm}$$

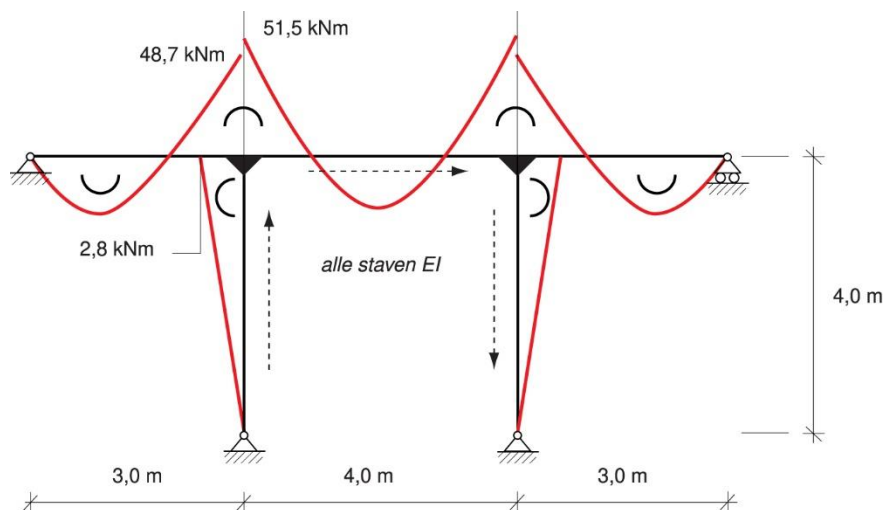
$$M_{BA} = -48,7 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -51,5 \text{ kNm}$$

Hiermee zijn de statisch onbepaalden bepaald.

Finishing touch

Bepalen van de oplegreacties en het construeren van de V - en de M -lijn. Ga zelf na dat de in figuur 6.27 weergegeven M -lijn de juiste is.



Figuur 6.27

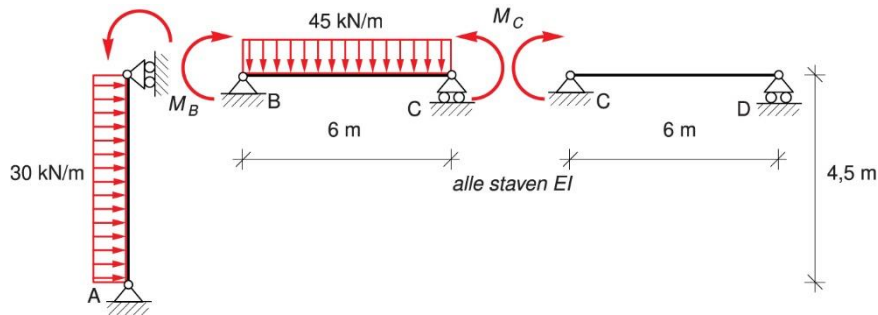
Opdracht 12

Deze constructie is niet symmetrisch. We zullen dus een volledige berekening moeten uitvoeren. De constructie is tweevoudig statisch onbepaald ($n = R - E = 5 - 3 = 2$).

Stap 1 en 2

Deel de constructie op in statisch bepaalde delen en geef de statisch onbepaalden aan.

In figuur 6.28 is dit weergegeven.



Figuur 6.28

De inwendige momenten ter plaatse van de knopen B en C zijn als statisch onbepaalden gekozen. De hierdoor ontstane statisch bepaalde constructies zijn alle standaardgevallen waarvoor een vergeet-mij-nietje bestaat.

Stap 3

Als statisch onbepaalden is gekozen voor inwendige momenten, dus dan moet de bijbehorende vormveranderingsvoorwaarde een gaapvergelijking zijn.

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc}$$

$$\varphi_{cb} = \varphi_{cd}$$

Stap 4

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\frac{M_B \cdot 4,5}{3EI} + \frac{30 \cdot 4,5^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

$$\frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 6,0}{3EI}$$

Uitwerken levert:

$$3,5M_B + M_C = -518,90625$$

$$M_B + 4M_C = -405$$

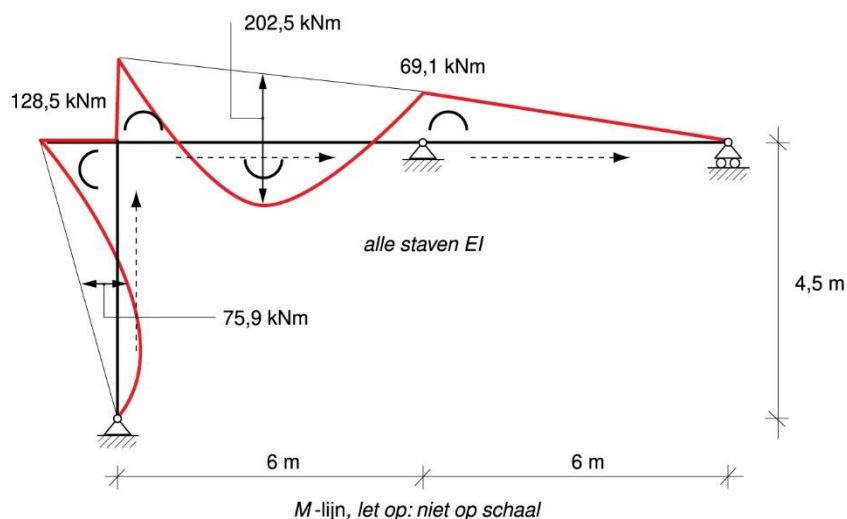
Hieruit volgt voor de statisch onbepaalden:

$$M_B = -128,5 \text{ kNm}$$

$$M_C = -69,1 \text{ kNm}$$

Hiermee kunnen de oplegreacties en de V - en de M -lijn worden bepaald.

In figuur 6.29 is alleen de M -lijn weergegeven. Ga zelf na dat deze juist is en controleer zelf ook op basis van dit gegeven of je V -lijn en oplegreacties correct zijn!

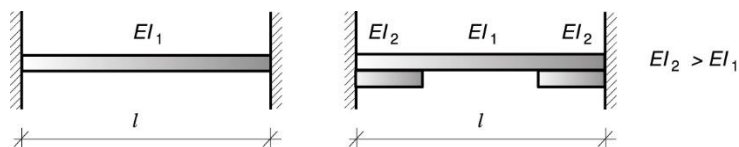


Figuur 6.29

Hoofdstuk 4 Stijfheidsverschillen in een constructie

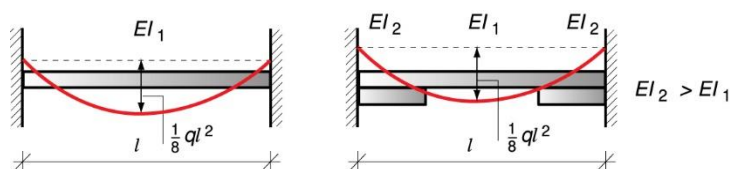
Opdracht 13

De in figuur 6.30 weergegeven constructies zullen een ander inklemmingsmoment hebben.



Figuur 6.30

Stijve delen zullen een moment naar zich toe trekken wat zal inhouden dat in de rechter situatie het inklemmingsmoment groter zal zijn dan dat in de linker situatie. Aangezien in beide systemen de momentensom gelijk is, zal in de rechter situatie het veldmoment geringer zijn dan het veldmoment in de linker situatie. In figuur 6.31 is dat schematisch aangegeven.



Figuur 6.31

Opdracht 14

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 12. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van die opdracht. Alleen bij het uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden verandert er iets. Controleer met de hierna gegeven stap 4 je uitkomsten.

Stap 4

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\frac{M_B \cdot 4,5}{3EI} + \frac{30 \cdot 4,5^3}{24EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3EI} - \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6EI}$$

$$\frac{M_B \cdot 6,0}{6EI} + \frac{45 \cdot 6,0^3}{24EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3EI} = -\frac{M_C \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI}$$

Uitwerken levert:

$$3,5M_B + M_C = -518,90625$$

$$M_B + 3M_C = -405$$

Hieruit volgt voor de statisch onbepaalden:

$$M_B = -121,1 \text{ kNm}$$

$$M_C = -94,6 \text{ kNm}$$

Hiermee kunnen de oplegreacties en de V - en de M -lijn worden bepaald.

Conclusie

Stijve delen trekken meer momenten naar zich toe. Liggerdeel C-D is nu tweemaal zo stijf, het steunpuntmoment in C neemt toe en dat in B neemt iets af.

Opdracht 15a

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 10a. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van die opdracht. Alleen bij het uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden verandert er iets. Controleer met de hierna gegeven stap 4 je uitkomsten.

Stap 4

Vanwege de symmetrie hoeven alleen de eerste twee vormveranderingsvoorwaarden te worden uitgewerkt met behulp van de vergeet-mij-nietjes:

$$\frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} = 0$$

$$-\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} = -\frac{M_B \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} - \frac{60 \cdot 6,0^2}{16 \cdot 2EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI}$$

Vanwege de symmetrie ontstaat het volgende stelsel:

$$M_A - \frac{1}{2} M_B = 0$$

$$\frac{1}{2} M_A - 2 \frac{1}{2} M_B = 67,5$$

Uitwerken levert:

$$M_A = -15 \text{ kNm}$$

$$M_D = 15 \text{ kNm}$$

$$M_B = -30 \text{ kNm}$$

$$M_C = -30 \text{ kNm}$$

De verdere uitwerking wordt aan de lezer overgelaten.

Opdracht 15b

Deze constructie is vrijwel identiek aan opdracht 10b. Voor de oplossing wordt dan ook verwezen naar de uitwerking van die opdracht.

Alleen bij het uitwerken van de vormveranderingsvoorwaarden verandert er iets. Controleer met de hierna gegeven stap 4 je uitkomsten.

Stap 4

Met behulp van de vergeet-mij-nietjes kunnen de vier vormveranderingsvoorwaarden worden uitgewerkt:

$$\begin{aligned} \frac{M_A \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_B \cdot 3,0}{6EI} - \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= 0 \\ -\frac{M_A \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_B \cdot 3,0}{3EI} + \frac{20 \cdot 3,0^3}{24EI} &= -\frac{M_B \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} - \frac{M_C \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI} + \frac{M_B \cdot 6,0}{6 \cdot 2EI} + \frac{M_C \cdot 6,0}{3 \cdot 2EI} \\ &= -\frac{M_C \cdot 3,0}{3EI} - \frac{M_D \cdot 3,0}{6EI} \\ \frac{M_C \cdot 3,0}{6EI} + \frac{M_D \cdot 3,0}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is te vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} 24M_A - 12M_B &= 540 \\ -12M_A + 48M_B + 12M_C &= -540 \\ 3M_B + 12M_C + 3M_D &= 0 \\ 3M_C + 6M_D &= 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel kan worden opgelost (vegen of met een computerprogramma als DERIVE). De oplossing is:

$$M_A = 19,0 \text{ kNm}$$

$$M_B = -7,0 \text{ kNm}$$

$$M_C = 2,0 \text{ kNm}$$

$$M_D = -1,0 \text{ kNm}$$

Met deze oplossing kunnen de oplegreacties en de V - en de M -lijn worden bepaald. Dit laatste wordt weer aan de lezer overgelaten.

Algemene conclusie

Ook hier blijkt dat daar waar de constructie stijver is gemaakt, er een groter moment optreedt. De momenten in de bovenregel zullen groter worden. Vergelijk wat dat betreft maar eens de veldmomenten in de bovenregel met die uit de opdrachten 10a en 10b.

Module 6

Uitwerkingen van de toetsopgaven

Opgave 1

- a Krachtsverdeling is niet te bepalen op basis van het evenwicht alleen, het vervormingsgedrag van de constructie moet ook worden meegenomen in de berekening.
- b Voordelen van statisch onbepaalde constructies:
 - Reservedraagvermogen.
 - Veelal stijver gedrag, er kan slanker worden geconstrueerd.
 - Het is eenvoudiger om stabiele constructies te verkrijgen.
- c Vormveranderingsvoorwaarden zijn de extra vergelijkingen die nodig zijn om de aangenomen statisch onbepaalden te kunnen oplossen. Het zijn eisen die te stellen zijn aan de vervorming van de constructie ter plaatse van de aangenomen statisch onbepaalden:

$$u_{\text{links}} = u_{\text{rechts}}$$

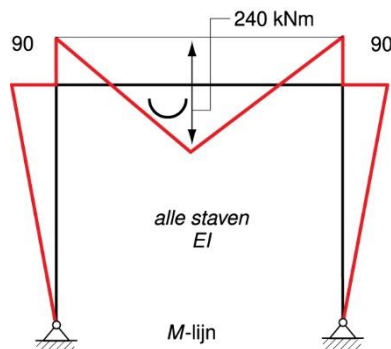
$$w_{\text{links}} = w_{\text{rechts}}$$

$$\varphi_{\text{links}} = \varphi_{\text{rechts}}$$

- d Gaapvergelijkingen zijn een vormveranderingsvoorwaarde van het laatste hiervoor weergegeven type.

Opgave 2

- a De M -lijn is in figuur 6.32 getekend.

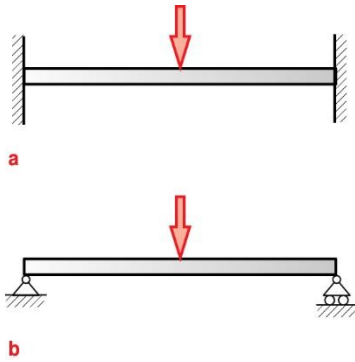


Figuur 6.32

Het is niet belangrijk om in de figuur precies te weten hoe groot de momenten in de hoekpunten zijn; belangrijk is dat de momentensom (tussen hoekpunt en het midden van de overspanning) gelijk is aan:

$$M = \frac{1}{4} Fl = 240 \text{ kNm}$$

- b De ongunstigste stijfheidsverhouding tussen regel en stijl voor het moment in punt B en C is als de stijl veel stijver is dan de regel. In dat geval ontstaat de situatie in figuur 6.33a.



Figuur 6.33

Het inklemmingsmoment voor dit basisgeval kan worden bepaald en is:

$$M = -\frac{1}{8} Fl = -120 \text{ kNm}$$

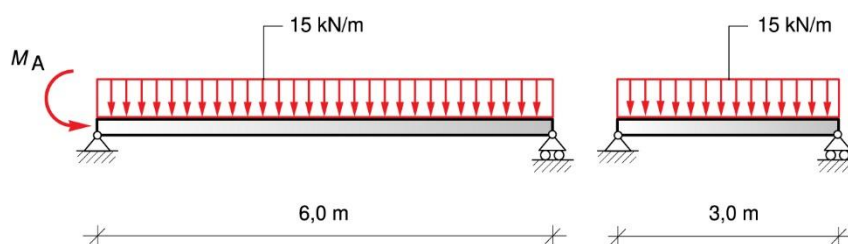
Het grootste veldmoment kan optreden als juist de regel veel stijver is dan de stijl. Het mechanicaschema dat dan ontstaat, is figuur 6.33b weergegeven.

Het veldmoment dat hierbij hoort is:

$$M = \frac{1}{4} Fl = 240 \text{ kNm}$$

Opgave 3

- a De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald.
- b Kies als statisch bepaald hoofdschema bijvoorbeeld voor figuur 6.34.



Figuur 6.34

- c De vormveranderingsvoorwaarde voor dit probleem luidt ($n = 1$, dus één vormveranderingsvoorwaarde!):

$$\varphi_{ab} = 0$$

- d De vormveranderingsvoorwaarde kan als volgt worden uitgewerkt met behulp van de gegeven vergeet-mij-nietjes.

$$\varphi_{ab} = \frac{M_A \cdot 6,0}{3EI} - \frac{15 \cdot 6,0^3}{24EI} = 0$$

e Oplossen van de statisch onbepaalde levert:

$$2M_A = 135 \Leftrightarrow M_A = 67,5 \text{ kNm}$$

f Oplegreacties zijn als volgt te bepalen:

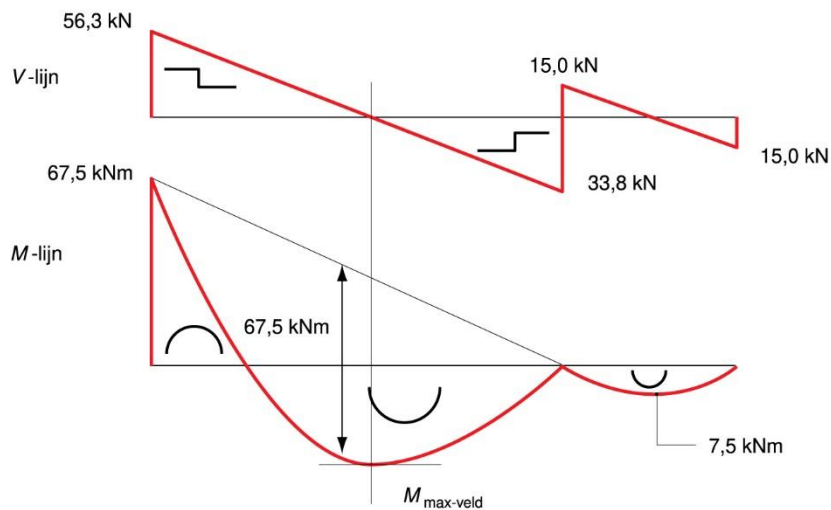
$$A_V = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6,0 + \frac{67,5}{6,0} = 56,3 \text{ kN} \quad (\text{omhoog})$$

$$B_V = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6,0 - \frac{67,5}{6,0} + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2,0 = 48,8 \text{ kN} \quad (\text{omhoog})$$

$$C_V = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2,0 = 15 \text{ kN} \quad (\text{omhoog})$$

g De V -lijn is in figuur 6.35 weergegeven.

h De M -lijn is eveneens in figuur 6.35 weergegeven.

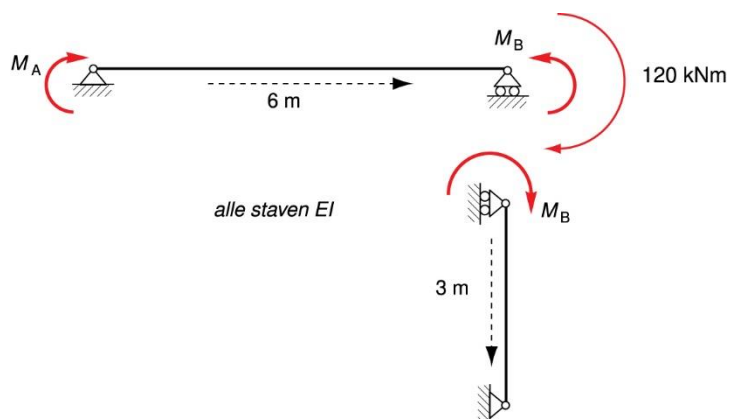


Figuur 6.35

Opgave 4

a De constructie is tweevoudig statisch onbepaald.

b Kies als statisch bepaald hoofdsysteem het systeem zoals is weergegeven in figuur 6.36.



Figuur 6.36

De statisch onbepaalden zijn de inwendige momenten:

$$M_A \text{ en } M_B$$

- c** Er zijn twee vormveranderingsvoorwaarden nodig. Aangezien alle statisch onbepaalden momenten zijn, moeten de vormveranderingsvoorwaarden betrekking hebben op de hoekveranderingen.

De vergelijkingen zijn:

$$\varphi_{ab} = 0$$

$$\varphi_{ba} = \varphi_{bc}$$

- d** Uitwerken van deze voorwaarden met behulp van de vergeet-mij-nietjes levert:

Eerste vormveranderingsvoorwaarde:

$$-\frac{M_A \cdot 6}{3EI} + \frac{120 \cdot 6}{6EI} - \frac{M_B \cdot 6}{6EI} = 0$$

Tweede vormveranderingsvoorwaarde:

$$\frac{M_A \cdot 6}{6EI} + \frac{M_B \cdot 6}{3EI} - \frac{120 \cdot 6}{6EI} = -\frac{M_B \cdot 3}{3EI}$$

- e** Met als oplossing:

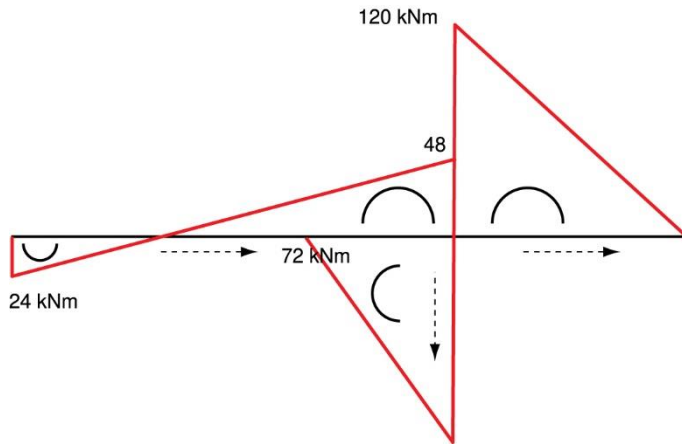
$$M_A = 24 \text{ kNm}$$

$$M_B = 72 \text{ kNm}$$

Uiteraard moet knoop B in evenwicht zijn. Links van punt B moet het inwendige moment in de linker dan gelijk zijn aan:

$$M_{BA} = -120 + 72 = -48 \text{ kNm}$$

- f** De M -lijn kan nu worden getekend en is in figuur 6.37 weergegeven. Let daarbij op de sprong in de M -lijn ter plaatse van punt B.



Figuur 6.37