Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2
Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 7

augustus 2009

Toegepaste wiskunde voor het hbo, deel 2
Uitwerking paragraaf 7.12 (herhalingsopgaven van hoofdstuk 7)

Opgave 1

Gegeven: $(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$. Bepaal $y(x)$.

Uitwerking

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy \Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ of } y=0$$

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ of } y=0$$

$$\ln(|y|)=\ln|1+x^2|+C \text{ of } y=0$$

$$\mathrm{e}^{\ln(|y|)}=\mathrm{e}^{\ln|1+x^2|+C} \text{ of } y=0$$

$$|y|=\mathrm{e}^C\cdot\mathrm{e}^{\ln|1+x^2|} \text{ of } y=0$$

$$y=\pm\mathrm{e}^C\cdot|1+x^2| \text{ of } y=0 \Rightarrow y=A\cdot(1+x^2),\text{met } A\in\mathbb{R}$$

In de laatste stap is gebruikt dat $|1+x^2|=1+x^2$, omdat $1+x^2$ niet negatief kan zijn.

Opgave 2

Los de differentiaalvergelijking $(x^2+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ op door scheiding van de variabelen.

Uitwerking

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y \Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \text{ of } y=0$$

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \text{ of } y=0$$

$$\ln(|y|)=\arctan(x)+C \text{ of } y=0$$

$$\mathrm{e}^{\ln(|y|)}=\mathrm{e}^{\arctan(x)+C} \text{ of } y=0$$

$$|y|=\mathrm{e}^C\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)} \text{ of } y=0$$

$$y=\pm\mathrm{e}^C\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)} \text{ of } y=0 \Rightarrow y=A\cdot\mathrm{e}^{\arctan(x)},\text{met } A\in\mathbb{R}$$

Opgave 3

Van een functie $v(u)$ is gegeven $u\ln u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-v=0$ ($u>0$) en $v(3)=\ln 9$. Bepaal $v(u)$.

Uitwerking

We bepalen eerst de algemene oplossing van de d.v.

$$u\ln(u)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-v=0 \Rightarrow u\ln(u)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=v \Rightarrow \frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{1}{u\ln(u)}\mathrm{d}u \text{ of } v=0 \Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\int\frac{1}{\ln(u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \text{ of } v=0$$

$$\int\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\int\frac{1}{\ln(u)}\mathrm{d}\ln(u) \text{ of } v=0$$

$$\ln|v| = \ln(\ln(u)) + C \quad \text{of} \quad v = 0$$

$$e^{\ln|v|} = e^{\ln(\ln(u))+C} \quad \text{of} \quad v = 0$$

$$|v| = e^{C} e^{\ln(\ln(u))} \quad \text{of} \quad v = 0$$

$$v = \pm e^{C} \ln(u) \quad \text{of} \quad v = 0 \Rightarrow v(u) = A\ln(u), \text{ met } A \in \mathbb{R}$$

Nu verwerken we de voorwaarde $v(3) = \ln 9$:

$$v(3) = \ln(9) \Rightarrow A\ln(3) = \ln(9) \Rightarrow A = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} \Rightarrow A = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} \Rightarrow A = 2$$

Dus geldt:

$$v(u) = 2\ln(u), \text{ met } A \in \mathbb{R}$$

Opgave 4

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = 5e^x + 3\sin x$.

Uitwerking

Reduceren van de d.v. geeft:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^3 + 4\lambda = 0$

Oplossen geeft:

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ of } \lambda = 2i \text{ of } \lambda = -2i$$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan:

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{0x}\cos(2x) + C_3 e^{0x}\sin(2x) \Rightarrow$$

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven d.v.:

$$y_{\text{part}}(x) = Ae^x + B\cos x + C\sin x$$

De constanten *A*, *B* en *C* bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y'_{\text{part}}(x) = Ae^x - B\sin x + C\cos x$$

$$y''_{\text{part}}(x) = Ae^x - B\cos x - C\sin x$$

$$y'''_{\text{part}}(x) = Ae^x + B\sin x - C\cos x$$

Invullen in de gegeven d.v. levert:

$$Ae^x + B\sin x - C\cos x + 4(Ae^x - B\sin x + C\cos x) = 5e^x + 3\sin x$$

$$(A + 4A)e^x + (B - 4B)\sin x + (-C + 4C)\cos x = 5e^x + 3\sin x$$

$$5Ae^x - 3B\sin x + 3C\cos x = 5e^x + 3\sin x$$

Dit geeft:

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ -3B = 3 \\ 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Dus $y_{\text{part}}(x) = e^x - \cos x$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$y_{\text{alg}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x) + e^x - \cos x$$

Opgave 5

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}+9u=9\sin(3v)$.

<u>Uitwerking</u>

Reduceren van de d.v. geeft:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}+9u=0$$

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2+9=0$

Oplossen geeft:

$$\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=3\mathrm{i} \text{ of } \lambda=-3\mathrm{i}$$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan:

$$u_{\text{hom}}(v)=C_1e^{0v}\cos(3v)+C_2e^{0v}\sin(3v) \Rightarrow$$

$$u_{\text{hom}}(v)=C_1\cos(3v)+C_2\sin(3v)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven d.v.:

$$u_{\text{part}}(x)=v\cdot\left(A\cos(3v)+B\sin(3v)\right)=Av\cos(3v)+Bv\sin(3v)$$

Let op de factor *v*, vanwege het feit dat $\sin(3v)$ als term voorkomt in u_{hom}.

De constanten *A* en *B* bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$u'_{\text{part}}(x)=A\cos(3v)-3Av\sin(3v)+B\sin(3v)+3Bv\cos(3v)$$

$$=(A+3Bv)\cos(3v)+(B-3Av)\sin(3v)$$

$$u''_{\text{part}}(x)=3B\cos(3v)-3(A+3Bv)\sin(3v)+(-3A)\sin(3v)+3(B-3Av)\cos(3v)$$

$$=(3B+3B-9Av)\cos(3v)+(-3A-9Bv-3A)\sin(3v)$$

$$=(6B-9Av)\cos(3v)+(-6A-9Bv)\sin(3v)$$

Invullen in de gegeven d.v. $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}+9u=9\sin(3v)$ levert:

$$(6B-9Av)\cos(3v)+(-6A-9Bv)\sin(3v)+9\left(Av\cos(3v)+Bv\sin(3v)\right)=9\sin(3v)$$

$$(6B-9Av+9Av)\cos(3v)+(-6A-9Bv+9Bv)\sin(3v)=9\sin(3v)$$

$$6B\cos(3v)-6A\sin(3v)=9\sin(3v)$$

Dit levert:

$$\begin{cases}6B=0\\-6A=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\frac{3}{2}\\B=0\end{cases}$$

Dus $u_{\text{part}}(x)=-\frac{3}{2}v\cos(3v)$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$u_{\text{alg}}(v)=u_{\text{hom}}(v)+u_{\text{part}}(v)=C_1\cos(3v)+C_2\sin(3v)-\frac{3}{2}v\cos(3v)$$

$$=\left(C_1-\frac{3}{2}v\right)\cos(3v)+C_2\sin(3v)$$

Opgave 6

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

a $\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\mathrm{e}^{2x}$

b $\quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}-y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$

Uitwerking onderdeel a

Reduceren van de d.v. geeft:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=0$$

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2-2\lambda=0$

Oplossen geeft:

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ of } \lambda=2$$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan:

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1e^{0x}+C_2e^{2x} \Rightarrow y_{\text{hom}}(x)=C_1+C_2e^{2x}$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven d.v.:

$$y_{\text{part}}(x)=Axe^{2x}$$

Let op de factor *x*, die nodig is omdat e^{2x} in de oplossing van de gereduceerde d.v. voorkomt.
De constante *A* bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y'_{\text{part}}(x)=Ae^{2x}+2Axe^{2x}=(A+2Ax)e^{2x}$$

$$y''_{\text{part}}(x)=2Ae^{2x}+2(A+2Ax)e^{2x}=(4A+4Ax)e^{2x}$$

Invullen in de gegeven d.v. levert:

$$(4A+4Ax)e^{2x}-2(A+2Ax)e^{2x}=2e^{2x} \Rightarrow$$

$$(4A+4Ax-2A-4Ax)e^{2x}=2e^{2x} \Rightarrow 2Ae^{2x}=2e^{2x} \Rightarrow A=1$$

Dus $y_{\text{part}}(x)=xe^{2x}$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$y_{\text{alg}}(x)=y_{\text{hom}}(x)+y_{\text{part}}(x)=C_1+C_2e^{2x}+xe^{2x}=C_1+(C_2+x)e^{2x}$$

Uitwerking onderdeel b.

$$\frac{d^4y}{dx^4}-y=\tfrac{1}{2}e^{x}+\tfrac{1}{2}e^{-x}$$

Reduceren van de d.v. geeft:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$$

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^4-1=0$

Oplossen geeft:

$$\lambda^4-1=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0 \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)=0 \Rightarrow$$

$$\lambda=1 \text{ of } \lambda=-1 \text{ of } \lambda=i \text{ of } \lambda=-i$$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan:

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1e^{1\cdot x}+C_2e^{-1\cdot x}+C_3e^{0\cdot x}\cos x+C_4e^{0\cdot x}\sin x \Rightarrow$$

$$y_{\text{hom}}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven d.v.:

$$y_{\text{part}}(x)=Axe^{x}+Bxe^{-x}$$

Let op de factor *x* bij zowel e^{x} als e^{-x} die nodig is omdat e^{x} en e^{-x} beide in de oplossing van de gereduceerde d.v. voorkomt.
De constanten *A* en *B* bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$y_{\text{part}}(x) = Axe^x + Bxe^{-x}$$
$$y'_{\text{part}}(x) = Ae^x + Axe^x + Be^{-x} - Be^{-x} = (A + Ax)e^x + (B - Bx)e^{-x}$$
$$y''_{\text{part}}(x) = Ae^x + (A + Ax)e^x - Be^{-x} - (B - Bx)e^{-x} = (2A + Ax)e^x + (-2B + Bx)e^{-x}$$
$$y'''_{\text{part}}(x) = Ae^x + (2A + Ax)e^x - 2Be^{-x} - (-2B + Bx)e^{-x} = (3A + Ax)e^x - Bxe^{-x}$$
$$y''''_{\text{part}}(x) = Ae^x + (3A + Ax)e^x - Be^{-x} + Bxe^{-x} = (4A + Ax)e^x + (-B + Bx)e^{-x}$$

Invullen in de gegeven d.v. levert:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x}$$
$$(4A + Ax)e^x + (-B + Bx)e^{-x} - \left(Axe^x + Bxe^{-x}\right) = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x}$$
$$(4A + Ax - Ax)e^x + (-B + Bx - Bx)e^{-x} = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x}$$
$$4Ae^x - Be^{-x} = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x}$$

Dit geeft: $A = \tfrac{1}{8}$ en $B = -\tfrac{1}{2}$

Dus: $y_{\text{part}}(x) = \tfrac{1}{8}xe^x - \tfrac{1}{2}xe^{-x}$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$y_{\text{alg}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \tfrac{1}{8}xe^x - \tfrac{1}{2}xe^{-x} \Rightarrow$$
$$y_{\text{alg}}(x) = \left(C_1 + \tfrac{1}{8}x\right)e^x + \left(C_2 - \tfrac{1}{2}x\right)e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

Opgave 7

Los op: $\dfrac{d^2z}{dt^2} - 2\dfrac{dz}{dt} - z = 0$.

Uitwerking

De d.v. is homogeen, reduceren hoeft dus niet.

De karakteristieke vergelijking (k.v.) is: $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

Oplossen geeft:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

De oplossingen van de k.v. zijn:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

De oplossing van de d.v. is dan:

$$z(t) = C_1e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2e^{(1-\sqrt{2})t} = e^t\left(C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}\right)$$

Opgave 8

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $4\dfrac{d^2u}{dv^2} - 12\dfrac{du}{dv} + 5u = 0$.

Uitwerking

De d.v. is homogeen, reduceren hoeft dus niet.

De karakteristieke vergelijking (k.v.) is: $4\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0$

Oplossen geeft:

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64$$

De oplossingen van de k.v. zijn

$$\lambda=\frac{12\pm\sqrt{64}}{2\cdot 4}=\frac{12\pm 8}{8}$$, waaruit volgt $\lambda=\frac{12+8}{8}=2\frac{1}{2}$ of $\lambda=\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$

De oplossing van de d.v. is dan:

$$u(v)=C_1\mathrm{e}^{\frac{5}{2}v}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}v}$$

Opgave 9

Bepaal de oplossing $r(\theta)$ van de differentiaalvergelijking $\theta(1+\theta^2)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+(1+\theta^2)r=\theta^2$ met beginvoorwaarde $r(1)=2$.

Uitwerking

We delen linker- en rechterlid van de d.v. door $\theta(1+\theta^2)$ en krijgen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+\frac{1}{\theta}r=\frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

We zien dat de d.v. een inhomogene, lineaire eerste orde d.v. is en gebruiken de methode van variatie van constante om deze op te lossen.

We reduceren de d.v. en krijgen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+\frac{1}{\theta}r=0$$

Deze homogene d.v. lossen we op via scheiden van variabelen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+\frac{1}{\theta}r=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\theta}r\Rightarrow\frac{1}{r}\mathrm{d}r=-\frac{1}{\theta}\mathrm{d}\theta\text{ of }r=0\Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\int-\frac{1}{\theta}\mathrm{d}\theta\text{ of }r=0$$

$$\ln|r|=-\ln|\theta|+C\text{ of }r=0$$

$$\mathrm{e}^{\ln|r|}=\mathrm{e}^{-\ln|\theta|+C}\text{ of }r=0$$

$$|r|=\frac{\mathrm{e}^{C}}{\mathrm{e}^{\ln|\theta|}}\text{ of }r=0$$

$$r=\pm\frac{\mathrm{e}^{C}}{|\theta|}\text{ of }r=0\Rightarrow r=A\cdot\frac{1}{\theta}\text{ met }A\in\mathbb{R}$$

We variëren de constante en proberen $r(\theta)=\frac{A(\theta)}{\theta}$ als oplossing van de gehele d.v..

We bepalen de afgeleide van $r(\theta)$:

$$r'(\theta)=\frac{\theta\cdot A'(\theta)-A(\theta)\cdot 1}{\theta^2}=\frac{1}{\theta}A'(\theta)-\frac{1}{\theta^2}A(\theta)$$

Invullen in de oorspronkelijke d.v. geeft:

$$\theta(1+\theta^2)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+(1+\theta^2)r=\theta^2$$

$$\theta(1+\theta^2)\left(\frac{1}{\theta}A'(\theta)-\frac{1}{\theta^2}A(\theta)\right)+(1+\theta^2)\frac{A(\theta)}{\theta}=\theta^2$$

$$(1+\theta^2)A'(\theta)-\frac{1+\theta^2}{\theta}A(\theta)+\frac{1+\theta^2}{\theta}A(\theta)=\theta^2$$

$$(1+\theta^2)A'(\theta)=\theta^2\Rightarrow A'(\theta)=\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\Rightarrow A(\theta)=\int\frac{\theta^2}{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta$$

We bepalen de integraal in het rechterlid.

$$\int \frac{\theta^2}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1+\theta^2-1}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1+\theta^2}{1+\theta^2} - \frac{1}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$\int 1 - \frac{1}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \theta - \arctan(\theta) + C$$

We hebben dus $A(\theta)$ berekend: $A(\theta) = \theta - \arctan(\theta) + C$

We vullen dit in de voorgestelde oplossing $r(\theta) = \dfrac{A(\theta)}{\theta}$ in en vinden:

$$r(\theta) = \frac{A(\theta)}{\theta} = \frac{\theta - \arctan(\theta) + C}{\theta} = 1 - \frac{1}{\theta}\arctan(\theta) + \frac{C}{\theta}$$

Opgave 10

In een LC-netwerk is $L = 0{,}10\ \mathrm{H}$, $C = 0{,}10\ \mathrm{F}$ en $u(t) = 3{,}6\cos(8t)\ \mathrm{V}$. Op $t = 0$ geldt $i(0) = 0\ \mathrm{A}$ en $q(0) = 0\ \mathrm{C}$.

Bepaal de ladingsfunctie $q(t)$ van de condensator en teken de grafiek ervan.

Uitwerking

De vergelijking horend bij een RLC-netwerk staat in paragraaf 7.7.3:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = u(t)$$

In deze vergelijking kiezen we $L = 0{,}10$, $R = 0$, $C = 0{,}10$ en $u(t) = 3{,}6\cos(8t)$.

We krijgen:

$$0{,}10\cdot\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 0\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{0{,}10}q = 3{,}6\cos(8t) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 100q = 36\cos(8t)$$

Dit is een tweede orde lineaire d.v. met constante coëfficiënten.

We reduceren deze vergelijking en stellen de karakteristieke vergelijking op:

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2 + 100 = 0$

Oplossen geeft:

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda = 10\mathrm{i} \text{ of } \lambda = -10\mathrm{i}$$

De oplossing van de gereduceerde d.v. is dan:

$$q_{\mathrm{hom}}(t) = C_1e^{0t}\cos(10t) + C_2e^{0t}\sin(10t) \Rightarrow$$

$$q_{\mathrm{hom}}(t) = C_1\cos(10t) + C_2\sin(10t)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen op grond van het rechterlid van de gegeven d.v.:

$$q_{\mathrm{part}}(t) = A\cos(8t) + B\sin(8t)$$

De constanten *A* en *B* bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$q_{\mathrm{part}}(t) = A\cos(8t) + B\sin(8t)$$

$$q'_{\mathrm{part}}(t) = -8A\sin(8t) + 8B\cos(8t)$$

$$q''_{\mathrm{part}}(t) = -64A\cos(10t) - 64B\sin(10t)$$

Invullen in de gegeven d.v. levert:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+100q=36\cos(8t)$$

$$-64A\cos(8t)-64B\sin(8t)+100\left(A\cos(8t)+B\sin(8t)\right)=36\cos(8t)$$

$$36A\cos(8t)+36B\cos(8t)=36\cos(8t)$$

Dit levert:

$$\begin{cases}36A=36\\36B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\end{cases}$$

Dus $q_{\text{part}}(t)=1\cdot\cos(8t)+0\cdot\sin(8t)=\cos(8t)$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$q_{\text{alg}}(t)=q_{\text{hom}}(t)+q_{\text{part}}(t)=C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)+\cos(8t)$$

We verwerken de beginvoorwaarden.
Gegeven is $q(0)=0$ C
Invullen in de algemene oplossing geeft:

$$C_1\cos(0)+C_2\sin(0)+\cos(0)=0\Rightarrow C_1+1=0\Rightarrow C_1=-1$$

Gegeven is ook $i(0)=0$ A .
We weten dat $i(t)=\frac{dq}{dt}$, dus

$$i(t)=\frac{d}{dt}\left(C_1\cos(10t)+C_2\sin(10t)+\cos(8t)\right)=-10C_1\sin(10t)+10C_2\cos(10t)-8\sin(8t)$$

Invullen van $i(0)=0$ A geeft:

$$-10C_1\sin(0)+10C_2\cos(0)-8\sin(0)=0$$

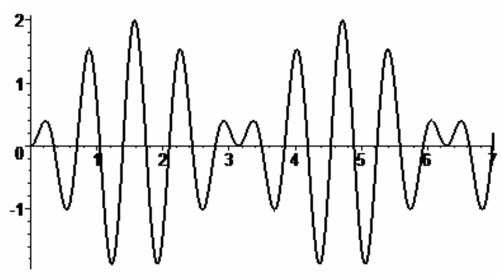
$$10C_2=0\Rightarrow C_2=0$$

De gevraagde oplossing die voldoet aan de beginvoorwaardenis dus:

$$q(t)=-1\cdot\cos(10t)+0\cdot\sin(10t)+\cos(8t)$$

$$=-\cos(10t)+\cos(8t)$$

De gevraagde grafiek staat hiernaast.



Opgave 11

Een verticaal hangende schroefveer heeft een veerconstante van 100 N/m. Onder aan de veer hangt een lichaam met een massa van 1,00 kg. De luchtweerstand laten we buiten beschouwing. Het lichaam heeft een beginsnelheid van $-2{,}0$ m/s in de evenwichtsstand.

a Bepaal de uitslag als functie van de tijd, als de gegeven kracht $36\sin(8t)$ N is.

b Dezelfde vraag als bij a, maar nu als de uitwendige kracht $36\sin(10t)$ N is.

c Teken de grafieken van de functies die in a en b gevonden zijn.

<u>Uitwerking algemeen</u>

We doen de volgende aannamen:
De richting naar beneden kiezen we positief.
De uitwijking vanuit de evenwichtsstand noemen we *x*.
Op het lichaam werkt een aantal krachten.

- De zwaartekracht F_z, waarvoor geldt: $F_z=mg$, waarbij *g* de zwaartekrachtsversnelling is.
- De veerkracht F_v, waarvoor geldt: $F_v=kz$, waarbij *k* de veerconstante en *z* de uitrekking van de veer is. Ten gevolge van de zwaartekracht rekt de veer uit over een afstand *s* totdat de

evenwichtsstand is bereikt. Daar geldt: $F_z = F_v$, dus $mg = ks$. De totale uitrekking van de veer is: $s + x$. Omdat de veerkracht omhoog gericht is geldt: $F_v = -kz = -k(s+x)$

- o De dempingskracht is gelijk aan nul (geen luchtweerstand)
- o De gegeven uitwendige kracht F_{uitw}

Voor de resultante F_{res} van de krachten geldt: $F_{res} = F_z + F_v + F_{demp} + F_{uitw}$

Voor de veerkracht geldt (zie boven): $F_v = -k(s+x)$

Zoals hierboven aangegeven geldt bovendien $ks = mg$.

Daarmee geldt: $F_v = -k(s+x) = -ks - kx = -mg - kx$ en dus:

$$F_{res} = F_z + F_v + F_{demp} + F_{uitw} = mg - mg - kx + 0 + F_{uitw} = -kx + F_{uitw}$$

Voor de resultante van de krachten geldt: $F_{res} = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$.

De uitwendige kracht is ook gegeven: $F_{uitw} = 36\sin(8t)$

Bovendien is de veerconstante gegeven: $k = 100$ N/m en ook de massa van het lichaam: $m = 1$.
Dit geeft:

$$F_{res} = -kx + F_{uitw}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -100x + F_{uitw} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 100x = F_{uitw}$$

Tot zover het algemene deel.

<u>Uitwerking onderdeel a:</u>

Als uitwendige kracht is gegeven: $F_{uitw} = 36\sin(8t)$

Dit geeft:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 100x = 36\sin(8t)$$

Deze vergelijking lijkt sterk op die van opgave 10.

De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda = 10\mathrm{i}$ of $\lambda = -10\mathrm{i}$

Er geldt dus: $x_{\mathrm{hom}}(t) = C_1\cos(10t) + C_2\sin(10t)$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen:

$$x_{\mathrm{part}}(t) = A\cos(8t) + B\sin(8t)$$

De constanten A en B bepalen we met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$x_{\mathrm{part}}(t) = A\cos(8t) + B\sin(8t)$$

$$x'_{\mathrm{part}}(t) = -8A\sin(8t) + 8B\cos(8t)$$

$$x''_{\mathrm{part}}(t) = -64A\cos(10t) - 64B\sin(10t)$$

Invullen in de opgestelde d.v. levert:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 100x = 36\sin(8t)$$

$$-64A\cos(8t) - 64B\sin(8t) + 100\big(A\cos(8t) + B\sin(8t)\big) = 36\sin(8t)$$

$$36A\cos(8t) + 36B\cos(8t) = 36\sin(8t)$$

Dit levert:

$$\begin{cases} 36A = 0 \\ 36B = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Dus: $x_{\text{part}}(t) = 0 \cdot \cos(8t) + 1 \cdot \sin(8t) = \sin(8t)$

De algemene oplossing van de gegeven d.v. is dan:

$$x_{\text{alg}}(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \sin(10t) + \sin(8t)$$

We verwerken de beginvoorwaarden.

De beginvoorwaarden zijn $x(0) = 0$ en $x'(0) = v(0) = -2$

$x(0) = 0$ geeft: $C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) + \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

We bepalen $x'(t)$:

$$x'_{\text{alg}}(t) = -10C_1 \sin(10t) + 10C_2 \cos(10t) + 8\cos(8t)$$

$x'(0) = -2$ levert: $-10C_1 \sin(0) + 10C_2 \cos(0) + 8\cos(0) = -2 \Rightarrow 10C_2 + 8 = -2 \Rightarrow C_2 = -1$.

De gevraagde uitslag is daarmee:

$$x(t) = 0 \cdot \cos(10t) + (-1)\sin(10t) + \sin(8t) = \sin(8t) - \sin(10t)$$

<u>Uitwerking onderdeel b</u>

Alleen de uitwendige kracht wijzigt ten opzichte van onderdeel a. Er geldt nu: $F_{uitw} = 36\sin(10t)$ N

De vergelijking is nu:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 100x = 36\sin(10t)$$

De oplossing van de gereduceerde vergelijking is gelijk aan die in onderdeel a:

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \sin(10t)$$

We zoeken een particuliere oplossing en proberen :

$$x_{\text{part}}(t) = t \cdot \left(A\cos(10t) + B\sin(10t)\right)$$

Let op de factor *t*, deze is nodig omdat $\sin(10t)$ een term is van $x_{\text{hom}}(t)$.

We bepalen eerst de benodigde afgeleiden.

$$x_{\text{part}}(t) = t \cdot \left(A\cos(10t) + B\sin(10t)\right) = At\cos(10t) + Bt\sin(10t)$$

$$\begin{aligned} x'_{\text{part}}(t) &= A\cos(10t) - 10At\sin(10t) + B\sin(10t) + 10Bt\cos(10t) \\ &= (A + 10Bt)\cos(10t) + (B - 10At)\sin(10t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''_{\text{part}}(t) &= (0 + 10B)\cos(10t) + (A + 10Bt)\cdot(-10)\sin(10t) + (0 - 10A)\sin(10t) + (B - 10At)\cdot 10\cos(10t) \\ &= (10B + 10B - 100At)\cos(10t) + (-10A - 100Bt - 10A)\sin(10t) \\ &= (20B - 100At)\cos(10t) + (-20A - 100Bt)\sin(10t) \end{aligned}$$

Invullen in de opgestelde d.v. levert:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 100x = 36\sin(10t)$$

$$\left((20B - 100At)\cos(10t) + (-20A - 100Bt)\sin(10t)\right) + 100\left(At\cos(10t) + Bt\sin(10t)\right) = 36\sin(10t)$$

$$(20B - 100At + 100At)\cos(10t) + (-20A - 100Bt + 100Bt)\sin(10t) = 36\sin(10t)$$

$$20B\cos(10t) - 20A\sin(10t) = 36\sin(10t)$$

Dit geeft:

$$\begin{cases} 20B = 0 \\ -20A = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1{,}8 \\ B = 0 \end{cases}$$

Dus:

$$x_{\text{part}}(t) = At\cos(10t) + Bt\sin(10t) = -1{,}8t\cos(10t)$$

En daarmee:

$$x_{\text{alg}}(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \sin(10t) - 1{,}8t\cos(10t)$$

We verwerken de beginvoorwaarden.
De beginvoorwaarden zijn $x(0)=0$ en $x'(0)=v(0)=-2$.
$x(0)=0$ geeft: $C_1\cos(0)+C_2\sin(0)-1{,}8\cdot 0\cdot\cos(0)=0 \Rightarrow C_1-0=0 \Rightarrow C_1=0$
We bepalen $x'(t)$

$$x'_{\text{alg}}(t)=-10C_1\sin(10t)+10C_2\cos(10t)-1{,}8\cos(10t)+18t\sin(10t)$$

$x'(0)=-2$ levert:

$$-10C_1\sin(0)+10C_2\cos(0)-1{,}8\cos(0)+18\cdot 0\cdot\sin(0)=-2$$

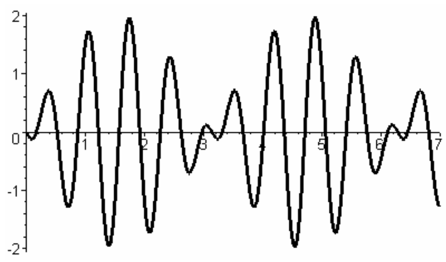
$$10C_2-1{,}8=-2 \Rightarrow C_2=-0{,}02$$

De gevraagde uitslag x is daarmee:

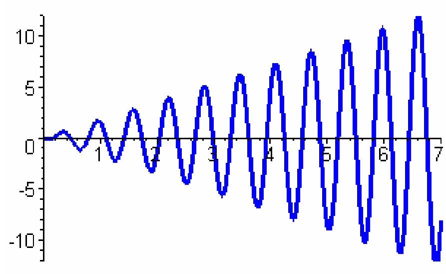
$$x(t)=0\cdot\cos(10t)+(-0{,}02)\sin(10t)-1{,}8t\cos(10t)$$
$$=-0{,}02\sin(10t)-1{,}8t\cos(10t)$$

Uitwerking c

grafiek bij onderdeel a



geafiek bij onderdeel b



Opgave 12
Een man met een massa van 80 kg zit in een bootje met buitenboordmotor met een massa (inclusief motor) van 220 kg. De buitenboordmotor van het bootje levert een constante kracht van 840 N. De weerstand die het zeewater op de boot uitoefent, is evenredig met de snelheid van de boot. Bij een snelheid van 3,0 m/s is deze weerstand 360 N. Voor de zwaartekrachtsversnelling geldt $g=9{,}8\ \text{m/s}^2$.

a Wat is de maximale snelheid die de boot kan bereiken?
b Bepaal de snelheid als functie van de tijd, als de boot op tijdstip $t=0$ nog stil lag.

Uitwerking algemeen
Op het bootje werken twee krachten. Een constante kracht F_{bb} waarvoor geldt: $F_{bb}=840\text{N}$, die geleverd wordt door de buitenboordmotor. De richting van deze kracht kiezen we positief.
Ook werkt op het bootje een weerstandskracht F_{weerst}, die tegengesteld is aan F_{bb}. F_{weerst} is evenredig met de snelheid v van de boot, dus geldt: $F_{weerst}=c\cdot v$
Verder is gegeven dat voor $v=3$ geldt: $F_{weerst}=360$.
Dit geeft: $360=c\cdot 3$, dus $c=120$ en daarmee $F_{weerst}=120v$.
Voor de resultante F_{res} van de krachten geldt: $F_{res}=F_{bb}+F_{weerst}=840-120v$
Voor F_{res} geldt bovendien $F_{res}=ma=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
Ook is de totale massa bekend: $m=220+80=300$
Dus geldt:

$$F_{res} = 840 - 120v \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 840 - 120v \Rightarrow$$

$$300\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 120v = 840 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0,4v = 2,8$$

We lossen deze 1$^{\mathrm{e}}$ orde d.v. op.
De karakteristieke vergelijking is: $\lambda + 0,4 = 0$, dus $\lambda = -0,4$.

Dus: $v_{\mathrm{hom}}(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t}$

Als mogelijke particulier oplossing kiezen we een constante, omdat het rechterlid van de d.v. een constante is. Dus: $v_{part}(t) = A$

Dan geldt: $v'_{part}(t) = 0$.

Invullen in de d.v. geeft: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0,4v = 2,8 \Rightarrow 0 + 0,4A = 2,8 \Rightarrow A = 7$.

We weten nu de algemene oplossing: $v_{a\lg}(t) = v_{\mathrm{hom}}(t) + v_{part}(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7$

Uitwerking onderdeel a

Als we er van uitgaan dat de snelheid gedurende het varen toeneemt, dan geldt:

$$v_{\max}(t) = \lim_{t\to\infty} v_{a\lg}(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7\right) = C \cdot 0 + 7 = 7$$

De maximale snelheid bedraagt dus 7 m/s.

Uitwerking onderdeel b

Als extra is nu gegeven $v(0) = 0$.

We weten: $v_{a\lg}(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7$.

Er geldt daarom:

$$0 = C\mathrm{e}^{-0,4\cdot 0} + 7 \Rightarrow 0 = C + 7 \Rightarrow C = -7$$

Dit geeft:

$$v(t) = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 7 = -7\mathrm{e}^{-0,4t} + 7 = 7 - 7\mathrm{e}^{-0,4t}$$