Module 3
Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

a De trekkracht volgt uit:

$$F_t = A \times f_s = (10 \times 100) \times 235 = 235\,000 \text{ N} = 235 \text{ kN}$$

b De kracht kan als volgt worden bepaald:

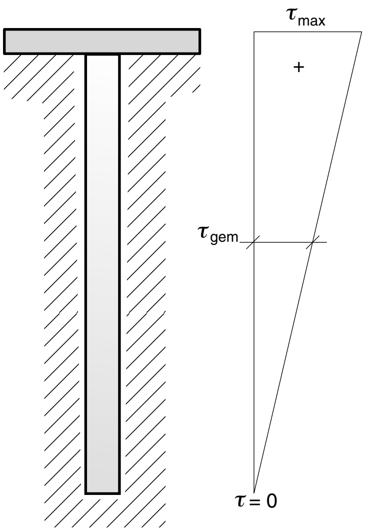
$$\Delta l = l \times \varepsilon = l \times \frac{\sigma}{E} = \frac{l \times F}{E \times A} \quad \Rightarrow$$

$$F = EA\,\frac{\Delta l}{l} = 2{,}1 \times 10^5 \times (10 \times 100) \times 10/2000$$

$$= 1050 \times 10^3 \text{ N} = 1050 \text{ kN}$$

c Kracht en verlenging gedragen zich lineair (zijn evenredig):

$$F = 1050 \times 10^3 \times \frac{20}{10} = 2100 \times 10^3 \text{ N} = 2100 \text{ kN}$$



Figuur 3.1

Opdracht 2

a Als het gat op diepte is, hangt de boorkop net vrij van de bodem. De boortafel krijgt dan het volledige gewicht van de boorstang te dragen.

De spanning is niet constant, aan de punt is deze nul, t.p.v. het ophangpunt is de spanning maximaal. De gemiddelde spanning is:

$$\sigma_{gem} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2} = \frac{\sigma_{max}}{2}$$

Hiermee kan de gemiddelde rek worden bepaald en daarmee de verlenging:

$$\Delta l = \varepsilon_{\text{gem}} \times l = \frac{\sigma_{\text{gem}} \times l}{E} = \frac{\sigma_{\text{max}} \times l}{2E}$$

De onbekende in deze vergelijking is de maximale spanning t.p.v. het ophangpunt. Met de gegevens van de boor kan gevonden worden:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} = \frac{Volume \times \rho \times g}{A} = \frac{A \times l \times \rho \times g}{A} = \rho \times g \times l$$

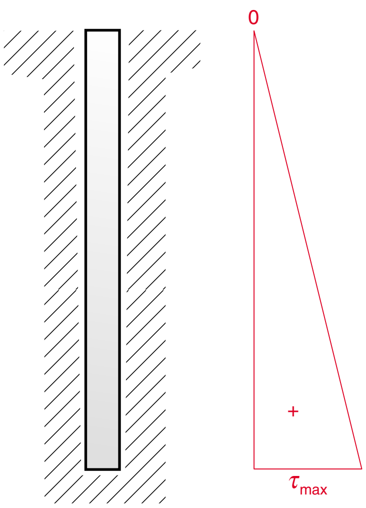
Hieruit volgt:

$$\Delta l = \frac{\sigma_{\text{max}} \times l}{2E} = \frac{\rho \times g \times l^2}{2E}$$

$$= \frac{7800 \times 10^{-9} \times 10 \times (200 \times 10^3)^2}{2 \times 2{,}1 \times 10^5} = 7{,}43 \text{ mm}$$

Het geboorde gat wordt hiermee 200 007,43 mm diep.

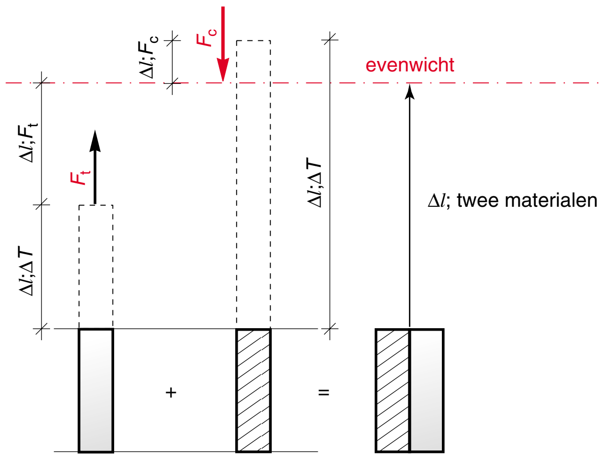
b Doordat de staaf op de punt rust zal de boorstang onder druk komen te staan. De drukspanning is even groot aan de trekspanning die gevonden is onder vraag a.
De kabel zal zover moeten worden gevierd dat de trekspanning kan overgaan in een drukspanning. De totale verkorting die daarmee gepaard gaat is 7,43 + 7,43 = 14,86 mm. De kabel zal dus 14,86 mm moeten worden gevierd.



Figuur 3.2

Opdracht 3

Door de temperatuursverhoging zullen de beide materialen willen uitzetten. Doordat de materialen met elkaar verbonden zijn zal de verlenging voor beide materialen gelijk zijn.



Figuur 3.3

a We kijken naar het afzonderlijke gedrag van de beide materialen. Uiteraard moet er krachtenevenwicht zijn. De evenwichtsvergelijking die kan worden opgesteld luidt (zie hiervoor de theorie):

$$(\Delta l_{\mathrm{T}} + \Delta l_{\mathrm{F_t}})_{\mathrm{staal}} = (\Delta l_{\mathrm{T}} - \Delta l_{\mathrm{F_c}})_{\mathrm{messing}}$$

met:

$$\Delta l_{\mathrm{T}} = \Delta T \times \alpha \times l;\ \ \Delta l_{\mathrm{F_c}} = \frac{F \times l}{E \times A}$$

Uit het evenwicht volgt dat de drukkracht even groot moet zijn als de trekkracht:

$$F_{\mathrm{c}} = F_{\mathrm{t}}$$

Invullen levert de basisvergelijking met als onbekende de kracht F:

$$\left(\Delta T \times \alpha \times l + \frac{F \times l}{E \times A}\right)_{\mathrm{staal}} = \left(\Delta T \times \alpha \times l - \frac{F \times l}{E \times A}\right)_{\mathrm{messing}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\Delta T \times \alpha + \frac{F}{E \times A}\right)_{\mathrm{staal}} = \left(\Delta T \times \alpha - \frac{F}{E \times A}\right)_{\mathrm{messing}}$$

Met:

$$\Delta T = 69 - 15 = 54°;$$

$$A_{staal} = \tfrac{1}{4}\pi \times 100^2 = 78{,}54 \text{ mm}^2;$$

$$A_{messing} = \tfrac{1}{4}\pi \times (24^2 - 10^2) = 373{,}85 \text{ mm}^2$$

De onbekende kracht F kan nu worden opgelost en daarmee kunnen vervolgens de spanningen in het staal en messing worden bepaald:

$$\left(54 \times 12 \times 10^{-6} + \frac{F}{2{,}1 \times 10^5 \times 78{,}54}\right) =$$

$$= \left(54 \times 19 \times 10^{-6} - \frac{F}{8 \times 10^4 \times 373{,}85}\right) \Leftrightarrow$$

$$F = 4021 \text{ N}$$

$$\sigma_{staal} = \frac{F}{A_{staal}} = \frac{4021}{78{,}54} = 51{,}2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{messing} = \frac{-F}{A_{messing}} = \frac{-4021}{373{,}85} = -10{,}76 \text{ N/mm}^2$$

In het staal ontstaat een *trekspanning*, in het messing een *drukspanning*.

b De verlenging kan worden bepaald met:

$$\Delta l = \left(\Delta T \times \alpha \times l + \frac{F \times l}{E \times A}\right)_{staal}$$
$$= \left(54 \times 12 \times 10^{-6} \times 100 + \frac{4021 \times 100}{2{,}1 \times 10^5 \times 78{,}54}\right)$$
$$= 0{,}089 \text{ mm}$$

Opdracht 4

Voor het oplossen van dit vraagstuk wordt uitgegaan van de onderstaande basisvergelijking:

$$(\Delta l_{\mathrm{T}} + \Delta l_{\mathrm{F_t}})_{\mathrm{staal}} = (\Delta l_{\mathrm{T}} - \Delta l_{\mathrm{F_c}})_{\mathrm{beton}}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\Delta T \times \alpha + \frac{F}{E \times A}\right)_{\mathrm{staal}} = \left(\Delta T \times \alpha - \frac{F}{E \times A}\right)_{\mathrm{beton}}$$

met:

$$\sigma_{\mathrm{beton}} = \frac{-F_{\mathrm{beton}}}{A_{\mathrm{beton}}} = -35\ \mathrm{N/\ mm^2} \iff F_{\mathrm{beton}} = 35 \times 15 \times 10^4$$
$$= 5250 \times 10^3 N = F_{\mathrm{staal}}$$

Verder uitwerken levert voor de nog onbekende temperatuursverhoging:

$$\left(\tfrac{1}{2}\Delta T \times 1 \times 10^{-5} + \frac{5250 \times 10^3}{2 \times 10^5 \times 3 \times 10^4}\right) =$$

$$= \left(\Delta T \times 2 \times 10^{-5} - \frac{35}{15 \times 10^4}\right) \Delta T = 73{,}9^\circ$$

Opdracht 5

a Algemeen geldt:

$$M = W_{\mathrm{y;el}} \times f_{\mathrm{s}} \quad \text{met:} \quad f_{\mathrm{s}} = 235\ \mathrm{N/\ mm^2}$$

Voor de gevraagde profielen levert dit:

Tabel 1
Profielgegevens

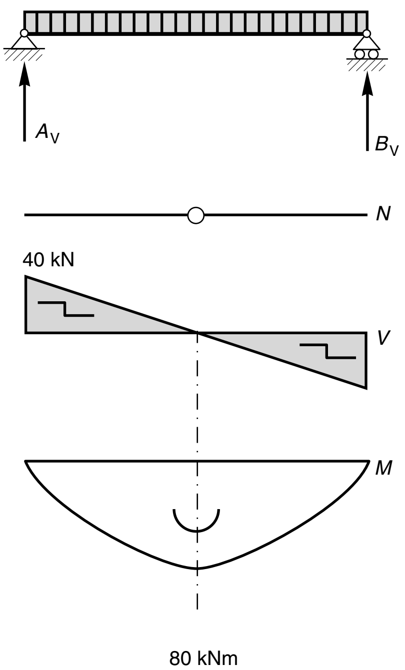
Profiel	*W* [mm³]	e.g. [kg/m]	*M* [kNm]
HE200A	$388{,}6 \cdot 10^3$ mm³	42,3	91,3
HE200B	$569{,}6 \cdot 10^3$ mm³	61,3	133,9
HE200M	$967{,}4 \cdot 10^3$ mm³	103,0	227,3

b Door het moment te delen door het eigengewicht kan de capaciteit van het profiel t.o.v. de hoeveelheid materiaal (prijs) worden bepaald.

Tabel 2
Capaciteit

Profiel	e.g. [kg/m]	*M* [kNm]	*M*/e.g. [kNm/kg]
HE 200A	42,3	91,3	2,16
HE 200B	61,3	133,9	2,18
HE 200M	103,0	227,3	2,21

Conclusie: de *M*-profielen zijn wel sterker per kg dan de *A*- en *B*-profielen, maar qua prijs-prestatie maakt het niet veel uit.



Figuur 3.4

Opdracht 6

Uit symmetrie volgt:

$$A_V = B_V = \frac{8 \times 10}{2} = 40 \text{ kN}; \quad M_{\text{veld}} = \tfrac{1}{8} \times 10 \times 8^2 = 80 \text{ kNm}$$

Het benodigde profiel volgt uit de basisvergelijking:

$$M = W_{y;\,el} \times f_s$$

$$80 \times 10^6 = W_{y;\,el} \times 235 \;\;\Rightarrow\;\; W_{y;\,el} = 394{,}4 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Kies een IPE 270 met een $W_{y;\,el} = 428{,}9 \times 10^3$ mm^3.

Opdracht 7

Ter plaatse van de neutrale lijn in de doorsnede is de schuifspanning maximaal. De grootte van de schuifspanning wordt bepaald met:

$$\tau = \frac{V \times S}{b \times I}$$

Het statisch moment van het afgeschoven deel (halve doorsnede) is:

$$S = (b \times \tfrac{1}{2} h) \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} h = \frac{bh^2}{8} = \frac{100^3}{8} = 12\,500 \text{ mm}^3$$

Het traagheidsmoment van de doorsnede is:

$$I = \tfrac{1}{12} bh^3 = 833{,}33 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

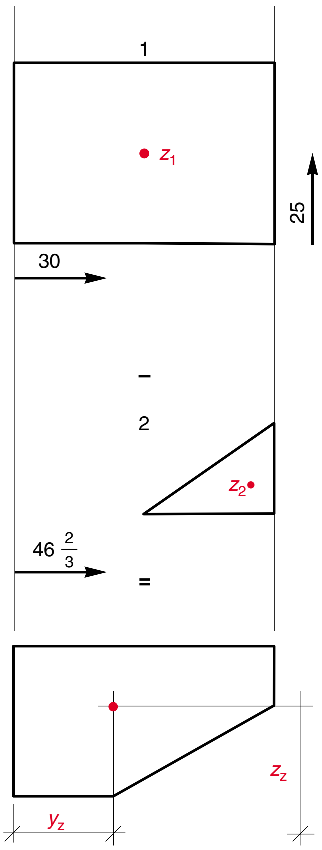
De schuifspanning t.p.v. de neutrale lijn wordt hiermee ($b = 100$ mm):

$$\tau_{max} = \frac{5000 \times 125\,000}{100 \times 833{,}33 \times 10^4} = 0{,}75 \text{ N/mm}^2$$

Het schuifspanningsverloop is parabolisch over de hoogte van de doorsnede. Aan de boven- en onderrand moet de schuifspanning nul zijn, t.p.v. de neutrale lijn (halverwege) is de schuifspanning gelijk aan de hierboven gevonden maximale waarde. Voor een rechthoekige doorsnede kan hiervoor worden gevonden:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{5000}{100 \times 100} = 0{,}75 \text{ N/mm}^2$$

De maximale schuifspanning is dus 1,5 maal de ‘gemiddelde’ schuifspanning.



Figuur 3.5

Opdracht 8

Deel de figuur op in een omhullende rechthoek en een driehoek. Deze driehoek is een negatief oppervlak, dit moet van de omhullende af om het gegeven oppervlak te verkrijgen.

$$A_1 = 60 \times 50 = 3000 \text{ mm}^2 \text{ (rechthoek)}$$

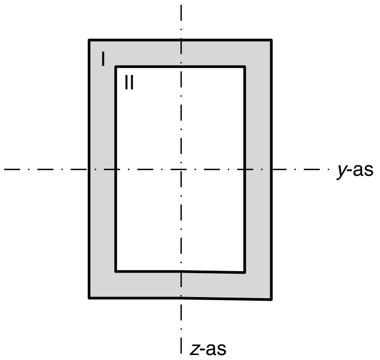
$$A_2 = \tfrac{1}{2} \times 40 \times 30 = 600 \text{ mm}^2 \text{ (driehoek)}$$

De ligging van het zwaartepunt wordt bepaald t.o.v. de y- en z-as.

$$z = \frac{\sum S_y}{A_{tot}} = \frac{z_1 A_1 - z_2 A_2}{A_1 - A_2}$$
$$= \frac{30 \times 3000 - 46{,}66 \times 600}{3000 - 600} = 25{,}83 \text{ mm}$$

$$y = \frac{\sum S_z}{A_{tot}} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{25 \times 3000 - 10 \times 600}{3000 - 600} = 28{,}75 \text{ mm}$$

Visuele controle van de ligging van het zwaartepunt levert op dat dit punt inderdaad boven de halve hoogte moet liggen en links van de halve breedte. De gevonden waarden zijn hiermee in overeenstemming.



Figuur 3.6

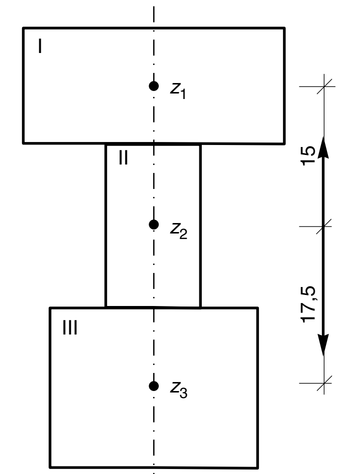
Opdracht 9

De gegeven figuur is symmetrisch t.o.v. de horizontale en verticale as. Het zwaartepunt ligt in het midden van de figuur. Splits de figuur op in bekende basisvormen (zie hiervoor figuur 3.6).

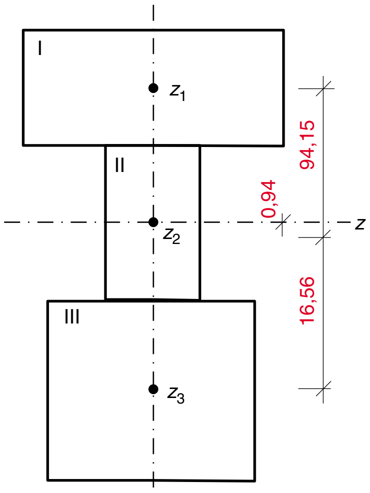
deel 1 = 40 × 60 mm²
deel 2 = 20 × 60 mm²

$$\begin{aligned} I_{y-\text{totaal}} &= I_{y\ \text{eigen}-1} - I_{y\ \text{eigen}-2} \\ &= \tfrac{1}{12} \times 40 \times 60^3 - \tfrac{1}{12} \times 20 \times 40^3 \\ &= 61{,}33 \times 10^4\ \text{mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z-\text{totaal}} &= I_{z\ \text{eigen}-1} - I_{z\ \text{eigen}-2} \\ &= \tfrac{1}{12} \times 60 \times 40^3 - \tfrac{1}{12} \times 40 \times 20^3 \\ &= 29{,}33 \times 10^4\ \text{mm}^4 \end{aligned}$$



a



b

Figuur 3.7

Opdracht 10

De figuur is symmetrisch t.o.v. de verticale as, het zwaartepunt ligt dus op de verticale as. Splits de figuur op in bekende basisdelen (zie hiervoor figuur 3.7a).

Om de oplossing te bepalen zijn de volgende stappen nodig:

1. Bepaal het zwaartepunt van de afzonderlijke bekende delen
2. Bepaal het zwaartepunt van de samengestelde doorsnede
3. Bepaal de verschuiving van de bekende delen t.o.v. het gevonden zwaartepunt van de totale doorsnede (verschuifterm in de regel van Steiner)
4. Bepaal het eigen traagheidsmoment van de afzonderlijke delen
5. Bepaal het totale traagheidsmoment, dus inclusief de translatie (verschuiving)

deel I = 10 × 30 = 300 mm²
deel II = 10 × 20 = 200 mm²
deel III = 20 × 15 = 300 mm²

Het zwaartepunt van de doorsnede wordt gevonden met (zie ook figuur 3.7b):

$$z = \frac{\sum S_y}{A_{tot}} = \frac{300 \times (-15) + 200 \times 0 + 300 \times 17{,}5}{300 + 200 + 300} = 0{,}94\ \text{mm}$$

De stappen 2 t/m 5 zijn in de onderstaande tabel weergegeven:

Tabel 2

Stap 2 t/m 5, enheden in mm

Deel	A	z_y	$z_y^2 \times A$	$I_{y\ \text{eigen}}$
I	300	−15,94	76 225,1	(1/12) × 30 × 10³ = 2500,00
II	200	−0,94	176,72	(1/12) × 10 × 20³ = 6666,67
III	300	16,56	82 270	(1/12) × 20 × 15³ = 5625,00
totaal	800		158,7 × 10³	14,8 × 10³

Voor de beide traagheidsmomenten wordt gevonden:

$$I_y = 158{,}7 \times 10^3 + 14{,}8 \times 10^3 = 173{,}5 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

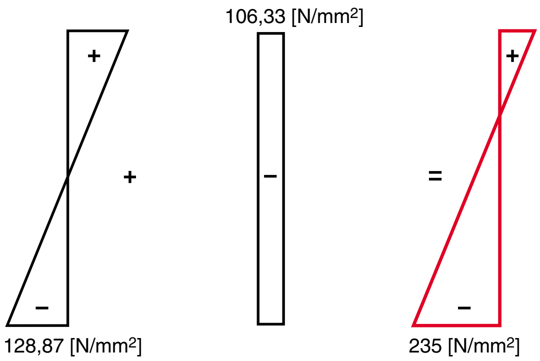
$$\begin{aligned} I_z &= I_{z\ \text{eigen}-\text{I}} + I_{z\ \text{eigen}-\text{II}} I_{z\ \text{eigen}-\text{III}} \\ &= \frac{1}{12} \times 30^3 \times 10 + \frac{1}{12} \times 10^3 \times 20 + \frac{1}{12} \times 20^3 \times 15 \\ &= 34{,}2 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Opdracht 11

Het profiel dient een moment en een normaal(druk)kracht op te nemen. De maximale spanning is 235 N/mm².

De basisvergelijking die gebruikt moet worden is:

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} \pm \frac{N}{A}$$



Figuur 3.8 $\sigma_M + \sigma_N = f_y$

De moment-capaciteit van een HE 200A is:

$$\begin{aligned} M_{\max;\,\text{el}} &= W_{y;\,\text{el}} \times f_y = 388{,}6 \times 10^3 \times 235 \\ &= 91{,}3 \times 10^6 \text{ Nmm} = 91{,}3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Het optredende moment is 50 kNm, de bijbehorende spanning volgt uit het lineaire verband tussen het moment en de normaalspanning t.g.v. het moment:

$$\sigma_M = \pm \frac{50{,}0}{91{,}3} \times 235 = \pm 128{,}7 \text{ N/mm}^2$$

Voor de normaalspanning t.g.v. een normaal(druk)kracht is de drukzone maatgevend. De drukspanning is maximaal gelijk aan -235 N/mm^2. Voor de spanning t.g.v. de normaalkracht resteert:

$$-\sigma_M + \sigma_N = -f_s - 128{,}7 + \sigma_N = -235$$

$$\sigma_N = -106{,}3 \text{ N/mm}^2$$

De normaalkracht die hierbij behoort is:

$$N = -106{,}3 \times A = -106{,}3 \times 5383$$
$$= -572 \times 10^3 \text{ N} = -572 \text{ kN}$$

De drukkracht heeft dus een grootte van 572 kN.

Opdracht 12

De basisvergelijking luidt:

$$\sigma = \pm \frac{M_y \times z}{I_y} \pm \frac{M_z \times y}{I_z} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

Voor een HE 180B geldt:

$$W_{y;\,el} = 425{,}7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{z;\,el} = 151{,}4 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Ten gevolge van het optredende moment M_y ontstaat er in de uiterste vezel een spanning :

$$\sigma_{My} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{25 \times 10^6}{425{,}7 \times 10^3} = \pm 58{,}73 \text{ N/mm}^2$$

De grootte van de normaalspanning in deze uiterste vezels kan door toedoen van een moment M_z nog maximaal toenemen tot de vloeispanning. Hieruit volgt voor de spanning t.g.v. een moment M_z:

$$|\sigma_{Mz}| = 235 - 58{,}73 = 176{,}27 \text{ N/mm}^2$$

De grootte van het moment M_z is nu te bepalen met:

$$\begin{aligned}|M_z| &= 176{,}27 \cdot W_{z;\,el} = 176{,}26 \times 151{,}4 \times 10^3 \\ &= 26{,}69 \times 10^6 \text{ Nmm} = 26{,}7 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Opdracht 13

De basisvergelijking die gebruikt moet worden is:

$$\sigma = \pm \frac{M_y \times z}{I_y} \pm \frac{M_z \times y}{I_z} \pm \frac{N}{A}$$

De doorsnede is symmetrisch, de traagheidsmomenten en het oppervlak van de doorsnede zijn als volgt te bepalen:

$$I_y = \tfrac{1}{12} \times 25 \times 40^3 - 2 \times \tfrac{1}{12} \times 5 \times 20^3 = 126{,}67 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_z = 2 \times \tfrac{1}{12} \times 25^3 \times 10 + \tfrac{1}{12} \times 15^3 \times 20 = 31{,}67 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$A = 2 \times 25 \times 10 + 15 \times 20 = 800 \text{ mm}^2$$

In drie punten zijn de spanningen gegeven. Er kunnen nu dus drie vergelijkingen worden opgesteld met als onbekenden de momenten M_y, M_z en de normaalkracht N. In de vergelijkingen worden deze snedekrachten positief aangenomen. Uit de berekening zal blijken of deze aanname juist was. Voor ieder punt moet per snedekracht worden nagegaan of de spanningsbijdrage positief of negatief is. Bestudeer hiervoor figuur 7.4 op blz. 191.

(1) $$\sigma_1 = -\frac{M_y \times 10}{I_y} + \frac{M_z \times 12{,}5}{I_z} + \frac{N}{A}$$

(2) $$\sigma_2 = -\frac{M_z \times 7{,}5}{I_z} + \frac{N}{A}$$

(3) $$\sigma_3 = \frac{M_y \times 10}{I_y} + \frac{M_z \times 7{,}5}{I_z} + \frac{N}{A}$$

Uitwerken levert:

(1) $$15 = -\frac{M_y \times 10}{126{,}67 \times 10^3} + \frac{M_z \times 12{,}5}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{N}{800}$$

(2) $$-3 = -\frac{M_z \times 7{,}5}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{N}{800}$$

(3) $$-10 = \frac{M_y \times 10}{126{,}67 \times 10^3} + \frac{M_z \times 7{,}5}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{N}{800}$$

Door vergelijking (1) en (3) bij elkaar op te tellen valt de bijdrage van M_y eruit, samen met vergelijking (2) resteren dan nog twee vergelijkingen met 2 onbekenden:

$$(1) + (3) \quad 5 = -\frac{M_z \times 20}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{2N}{800}$$

$$(2) \quad -3 = -\frac{M_z \times 7{,}5}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{N}{800}$$

Door de laatste vergelijking met 2 te vermenigvuldigen en van de eerste af te trekken wordt N geëlimineerd en ontstaat :

$$11 = \frac{M_z \times 35}{31{,}67 \times 10^3} \Rightarrow M_z = 9953 \text{ Nmm}$$

Met vergelijking (2) kan voor de normaalkracht worden gevonden:

$$N = 800 \times \left(-3 + \frac{9953 \times 7{,}5}{31{,}67 \times 10^3} \right) = -514 \text{ N}$$

Door gebruik te maken van vergelijking (1) wordt voor het moment M_y gevonden:

$$15 = -\frac{M_y \times 10}{126{,}67 \times 10^3} + \frac{9953 \times 12{,}5}{31{,}67 \times 10^3} + \frac{-514}{800}$$

$$M_y = -148\,382 \text{ Nmm}$$

Met de basisformule en de nu bekende snedekrachten kan de spanning in ieder punt (y, z) worden bepaald:

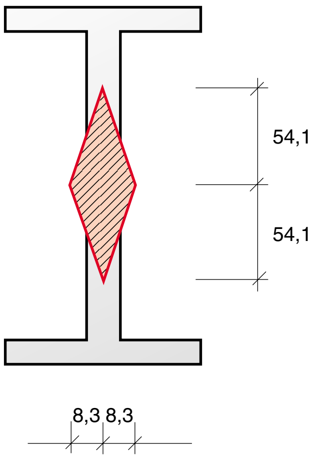
$$\sigma = \frac{M_y \times z}{I_y} - \frac{M_z \times y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

Voor de vier buitenste punten wordt zo gevonden:

Tabel 4

Spanningen in de hoekpunten

Punt	*y*	*z*	spanning [N/mm²]
linksboven	12,5	−20	18,9
rechtsboven	−12,5	−20	26,7
linksonder	12,5	20	−28,0
rechtsonder	−12,5	20	−20,1



Figuur 3.9

Opdracht 14

De gegevens van een IPE 160 zijn:

$A = 2009 \text{ mm}^2$

$W_y = 108{,}7 \times 10^3 \text{ mm}^3$

$W_z = 16{,}66 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Voor de kernafmetingen kan worden gevonden (zie figuur 3.10):

$$-\frac{1}{A} + \frac{e_y}{W_z} \leq 0 - \frac{1}{2009} + \frac{e_y}{16\,666} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e_y = 8{,}3 \text{ mm}$$

$$-\frac{1}{A} + \frac{e_z}{W_y} \leq 0 - \frac{1}{2009} + \frac{e_z}{108\,700} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e_z = 54{,}1 \text{ mm}$$

Opdracht 15

De basisvergelijking waarmee moet worden gewerkt, is:

$$\sigma_M = \pm \frac{M \times z}{I_y} = \pm \frac{M}{W_y} \quad \text{met:} \quad W_y = \tfrac{1}{6} bh^2 = 36 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_N = \pm \frac{N}{A}$$

a Het moment t.g.v. de q-last en de hierdoor optredende (buig)spanning:

$$M = \tfrac{1}{8} \times 10 \times 8^2 = 80 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \pm \frac{80 \times 10^6}{36 \times 10^6} = \pm 2{,}22 \text{ N/mm}^2$$

Het moment t.g.v. de voorspankracht en de hierdoor optredende (buig)spanning:

$$M = -P_v \times e = -100 \times 0{,}2 = -20 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \pm \frac{20 \times 10^6}{36 \times 10^6} = \pm 5{,}55 \text{ N/mm}^2$$

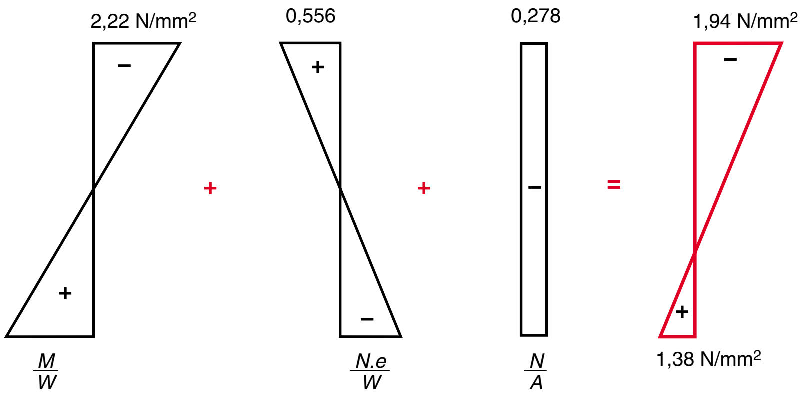
De spanning t.g.v. de normaalkracht:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-100 \times 10^3}{600 \times 600} = -0{,}278 \text{ N/mm}^2$$

De uiteindelijke spanningen in de uiterste vezels aan de boven- en onderzijde van de balk worden hiermee (zie ook figuur 3.10):

$$\sigma_{\text{boven}} = -2{,}22 + 0{,}555 - 0{,}278 = -1{,}94 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{onder}} = +2{,}22 - 0{,}555 - 0{,}278 = +1{,}38 \text{ N/mm}^2$$



Figuur 3.10

b Aan de onderzijde van de ligger is een trekspanning aanwezig. Beton kan geen trek opnemen (scheurt) dus de voorspanning moet zodanig worden aangebracht dat er juist een spanning 0 optreedt in de uiterste vezel aan de onderzijde van de balk:

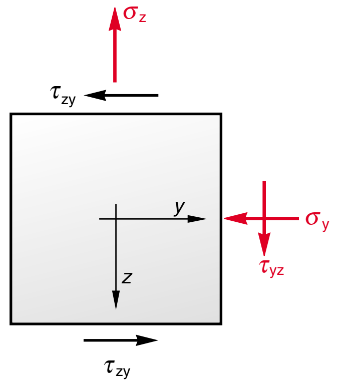
$$\sigma_{\text{onder}} = 2{,}22 - \frac{P_v \times 100}{W_y} - \frac{P_v}{A} = 0$$

Uitwerken levert een voorspankracht:

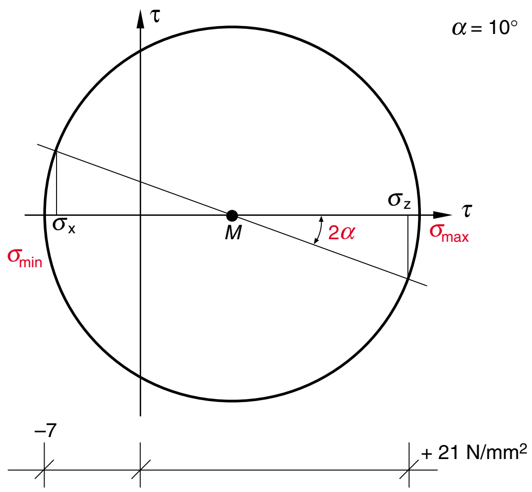
$$P_v = 399{,}6 \text{ kN}$$

Opdracht 16

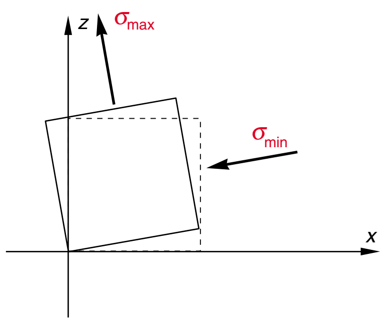
Zie voor de uitwerking de onderstaande figuren 3.11, 3.12 en 3.13.



Figuur 3.11



Figuur 3.12



Figuur 3.13

Opdracht 17

De kolom van gewapend beton heeft de volgende gegevens:

$A = 350 \times 350\ \text{mm}^2 \ \Rightarrow\ A_c = 0{,}96A;\ A_s = 0{,}04A$

$E_c = 28\,500\ \text{N/mm}^2$

$E_s = 2{,}1 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$

Met deze gegevens kan de kracht in het beton worden bepaald:

$$F_c = \frac{(E_c \times A_c)}{(E_c \times A_c + E_s \times A_s)} \times F$$

$$F_c = \frac{28\,500 \times 0{,}96 \times 350 \times 350}{28\,500 \times 0{,}96 \times 350 \times 350 + 2{,}1 \cdot 10^5 \times 0{,}04 \times 350 \times 350} \times$$

$$-\,800 \times 10^3 = -\,196{,}5 \times 10^3\ \text{N} = -\,196{,}5\ \text{kN}$$

De spanning in het beton wordt hiermee:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_c} = \frac{-\,196{,}5 \times 10^3}{0{,}96 \times 350 \times 350} = -\,1{,}7\ \text{N/mm}^2$$

Op dezelfde wijze kan de kracht en de spanning in het staal worden bepaald:

$$F_s = \frac{(E_s \times A_s)}{(E_c \times A_c + E_s \times A_s)} \times F$$

$$F_s = \frac{2{,}1 \times 10^5 \times 0{,}04 \times 350 \times 350}{28\,500 \times 0{,}96 \times 350 \times 350 + 2{,}1 \cdot 10^5 \times 0{,}04 \times 350 \times 350} \times$$

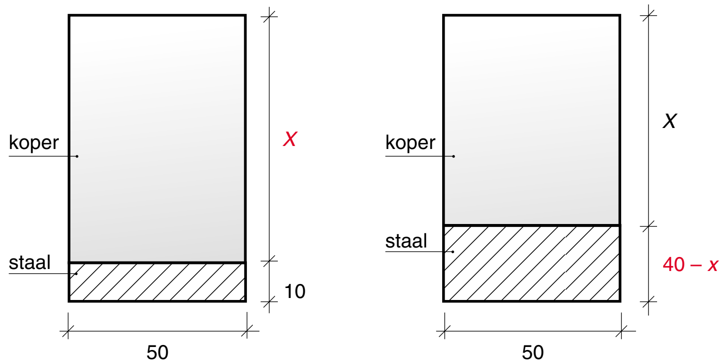
$$-\,800 \times 10^3 = -\,603 \times 10^3\ \text{N} = -\,603{,}5\ \text{kN}$$

De spanning in het staal wordt hiermee:

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{-\,603{,}5 \times 10^3}{0{,}04 \times 350 \times 350} = -\,123\ \text{N/mm}^2$$

In beide materialen zit dus een drukspanning. Uiteraard moet de kracht in het beton en het staal samen – 800 kN zijn. Het blijkt dat het grootste deel van de belasting door het staal (!) wordt gedragen.

Opdracht 18



Figuur 3.14 a b

a Bepaal de plaats van de neutrale lijn. Zie hiervoor figuur 3.14a.

$$(ES)_k = (ES)_s$$

$$E_k S_k = E_s S_s$$

$$S_k = \frac{E_s}{E_k} S_s = n \times S_s$$

$$(50x) \times \tfrac{1}{2}x = \frac{2{,}1 \times 10^5}{1 \times 10^5} \times (50 \times 10) \times 5$$

$$25x^2 = 5250$$

$$x = 14{,}49 \text{ mm}$$

b Zie figuur 3.14b.

$$S_k = \frac{E_s}{E_k} S_s$$

$$(50x) \times \tfrac{1}{2}x = \frac{2{,}1 \times 10^5}{1 \times 10^5} \times (50 \times (40 - x)) \times (40 - x)/2$$

$$25x^2 = 2{,}1 \times 25 \times (40 - x)^2$$

$$x^2 = 2{,}1 \times (40 - x)^2$$

$$x^2 = 2{,}1 \times (1600 - 80x + x^2)$$

$$1{,}1x^2 - 168x + 3360 = 0$$

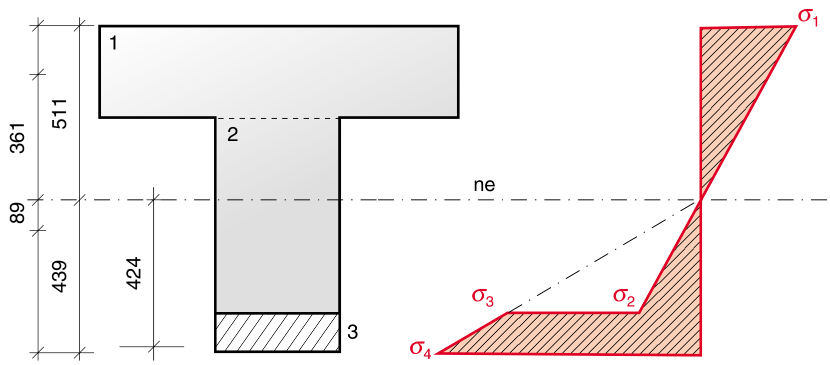
$$x_{1,2} = \frac{-(-168) \pm \sqrt{168^2 - 4 \times 1{,}1 \times 3360}}{2 \times 1{,}1}$$

$$x_1 = 23{,}67 \text{ mm}; \quad x_2 = 129{,}06 \text{ mm} \ \text{(voldoet niet)}$$

Opdracht 19

De ligging van de neutrale lijn kan gevonden worden door de doorsnede op te delen in basisfiguren.

Figuur 3.15



$$A_i = A_1 + A_2 + n \times A_3$$

$$\text{met: } n = \frac{E_{Ke}}{E_b} = 13{,}1$$

$$A_i = 300 \times 900 + 600 \times 300 + n \times 300 \times 50$$

$$A_i = 646\,500 \text{ mm}^2$$

De ligging van de neutrale lijn t.o.v. de onderrand kan nu worden gevonden m.b.v.:

$$z_{\text{n.l.}} = \frac{(300 \times 900) \times 800 + (600 \times 300) \times 350 + 13{,}1 \times (300 \times 50) \times 25}{646\,500}$$

$$= 439 \text{ mm}$$

Het traagheidsmoment kan nu worden bepaald:

$$I_i = (I_{\text{eigen}} + a^2A)_{\text{beton – flens}} + (I_{\text{eigen}} + a^2A)_{\text{beton – lijf}} + n \times (I_{\text{eigen}} + a^2A)_{\text{staal}}$$

$$I_i = (\tfrac{1}{12} \times 900 \times 300^3 + 361^2 \times 300 \times 900) + (\tfrac{1}{12} \times 300 \times 600^3 + 89^2 \times 300 \times 600) + 13{,}1 \times (\tfrac{1}{12} \times 300 \times 50^3 + 424^2 \times 300 \times 50)$$
$$= 794 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

De spanningen in het beton en het kevlar kunnen worden bepaald met:

$$\sigma_{\text{beton}} = \frac{M \times e}{I_i} \qquad \sigma_{\text{kevlar}} = n \times \frac{M \times e}{I_i}$$

Voor de spanningen in de punten uit figuur 3.15 worden de volgende waarden gevonden:

$$\sigma_1 = -\frac{100 \times 10^6 \times 511}{794 \times 10^8} = -0{,}64\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{100 \times 10^6 \times (439 - 50)}{794 \times 10^8 8} = 0{,}49\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 13{,}1 \times \frac{100 \times 10^6 \times (439 - 50)}{794 \times 10^8} = 6{,}42\ \text{N/mm}^2$$

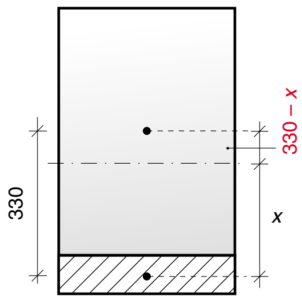
$$\sigma_4 = 13{,}1 \times \frac{100 \times 10^6 \times 439}{794 \times 10^8} = 7{,}24\ \text{N/mm}^2$$

Opdracht 20

Voor het bepalen van de schuifspanning in de lijmverbinding tussen beton en staal van de samengestelde doorsnede welke belast wordt met een dwarskracht van 100 kN, moeten de volgende stappen worden doorlopen:
1 Bepaal de ligging van de neutrale lijn
2 Bepaal I_i.
3 Bepaal het statisch moment van het afgeschoven deel
4 Bepaal de schuifspanning in de lijmverbinding

De verhouding van de elasticiteitsmoduli is:

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{2{,}1 \times 10^5}{1 \times 10^4} = 21$$



Figuur 3.16

Stap 1: Bepaal de ligging van de neutrale lijn t.o.v. het zwaartepunt van de stalen plaat. Zie hiervoor figuur 3.16.

$$(ES)_{\text{beton}} = (ES)_{\text{staal}} \Leftrightarrow$$

$$S_{\text{beton}} = n \times S_{\text{staal}}$$

$$A_b \times z_b = n \times A_s \times z_s$$

invullen:

$$(600 \times 400) \times (330 - x) = 21 \times x(60 \times 400)$$

$$x = 106{,}45\ \text{mm}$$

Stap 2: Het traagheidsmoment van de samengestelde doorsnede kan nu worden bepaald met:

$$I_{\mathrm{i}} = (I_{\mathrm{eigen}} + a^2 \times A)_{\mathrm{beton}} + n \times (I_{\mathrm{eigen}} + a^2 \times A)_{\mathrm{staal}}$$

$$I_{\mathrm{i}} = (\tfrac{1}{12} \times 400 \times 600^3 + (330 \times 106{,}45)^2 \times 400 \times 600) + 21 \times (\tfrac{1}{12} \times 400 \times 60^3 + 106{,}45^2 \times 60 \times 400)$$

$$I_{\mathrm{i}} = 250{,}56 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Stap 3: Als het betondeel als afschuivend deel wordt beschouwd, kan de schuifspanning in de lijmverbinding worden bepaald met:

$$\tau = \frac{V \times (ES)_{\mathrm{beton}}}{b \times (EI)_{\mathrm{totaal}}} = \frac{V \times E_{\mathrm{b}} \times S_{\mathrm{beton}}}{b \times (E_{\mathrm{b}} I_{\mathrm{b}} + E_{\mathrm{s}} I_{\mathrm{s}})})$$

$$= \frac{V \times E_{\mathrm{b}} \times S_{\mathrm{beton}}}{b \times E_{\mathrm{b}} \times (I_{\mathrm{b}} + n \times I_{\mathrm{s}})} = \frac{V \times S_{\mathrm{beton}}}{b \times I_{\mathrm{i}}}$$

Het statisch moment van het afgeschoven deel is:

$$S_{\mathrm{beton}} = (400 \times 600) \times (330 - 106{,}45 - 30) = 46\,452\,000 \text{ mm}^3$$

Stap 4: De schuifspanning in de lijmverbinding wordt hiermee:

$$\tau = \frac{V \times S_{\mathrm{beton}}}{b \times I_{\mathrm{i}}} = \frac{100 \times 10^3 \times 46\,452\,000}{400 \times 250{,}56 \times 10^8} = 0{,}46 \text{ N/mm}^2$$