Extra opgaven hoofdstuk 5 Functieonderzoek; toepassing van de differentiaalrekening

5.1 Stijgende en dalende functies en de afgeleide, 5.2 Minima en maxima, 5.3 De tweede afgeleide; buigpunten en 5.4 Functieonderzoek

1.

Gegeven de functie met voorschrift $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

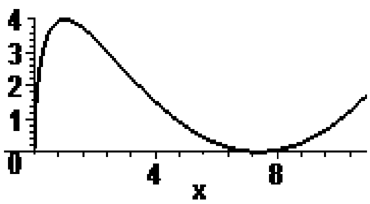
a. Toon aan: $g'(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$.

b. Bereken alle extreme waarden van *g*.

c. Bereken de eventuele aanwezige buigpunten in de grafiek van *g.*

2.

Gegeven de functie met voorschrift $y=f(x)=x(\ln x-2)^2$, waarvan hiernaast de grafiek op het interval $[-1\,,\,11]$ geschetst is.



a. Toon aan: $f'(x)=(\ln x-2)\cdot\ln x$

b. Bepaal de minima en maxima van *f*.

c. Toon aan: $f''(x)=\dfrac{2}{x}(\ln x-1)$

d. Bereken de buigpunten van *f*. Geef ook het soort buigpunt aan.

e. Hoe is een buigpunt in een grafiek te herkennen?

3.

Gegeven de functie met voorschrift $y=f(x)=\mathrm{e}^x\cos(x)$ en domein $\left[-\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi\right]$.

a Toon aan: $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$

b Op welke intervallen is de functie *f* stijgend, dan wel dalend?

c Bereken de eventueel aanwezige minima en maxima van *f*.

d Bereken de eventueel aanwezige buigpunten in de grafiek van *f*.

e Maak een schets van de grafiek van *f* waarin de in de voorgaande onderdelen bepaalde kenmerken verwerkt zijn.

4.

Gegeven de functie met voorschrift $y = f(x) = \ln^3(x) - \ln(x)$.

a Bepaal het domein van *f* en de eventuele aanwezige horizontale en verticale asymptoten.

b Bepaal de (lokale) minima en maxima van *f*

c Bepaal de eventuele buigpunten van *f* en de aard ervan.

d Schets de grafiek van *f*.

e Bepaal het bereik van *f*.

5.

Gegeven de functie met voorschrift $y = f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$.

a Bepaal het domein van *f* en de eventuele aanwezige horizontale en verticale asymptoten.

b Bepaal de (lokale) minima en maxima van *f*.

c Bepaal de eventuele buigpunten van *f* en de aard ervan.

d Schets de grafiek van *f*.

e Bepaal het bereik van *f*.

5.5 Praktijktoepassingen van de differentiaalrekening

6.

Het punt P ligt op de grafiek van de functie met voorschrift $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, met $x > 0$.

Het punt Q ligt op de X–as en het lijnstuk PQ is evenwijdig aan de Y-as
Punt R ligt op de Y-as en lijnstuk PR is evenwijdig aan de X-as.
Bereken de minimale omtrek van rechthoek PQOR

7.

In welk punt van de grafiek van de functie met voorschrift $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, met $x > 0$, is de afstand tot de oorsprong minimaal. Hoe groot is die minimale afstand?

8.

Gegeven een rechthoek met een omtrek van 20 cm.
Wat is de maximale oppervlakte van deze rechthoek?

9.

Een timmerman maakt een open kist met een vierkante bodem. De opstaande zijden kosten 6 euro per vierkante meter en de bodem 8 euro per vierkante meter. Het totale budget voor materiaal voor de kist is 96 euro. De timmerman rekent geen arbeidsloon. Wat is de maximale inhoud die de kist kan krijgen?

10.

Bij een bierbrouwerij wil men de hoeveelheid materiaal die gebruikt wordt voor het maken van blikjes minimaliseren. De blikjes hebben een inhoud (bier en lucht samen) van 36 cl en zijn cilindervormig. Bereken de hoogte en de straal van het grondvlak van deze blikjes als de oppervlakte minimaal is. Wat is de minimale oppervlakte?

11.

Op een oever van een rechte rivier, die 300 m breed is, bevindt zich een elektriciteitscentrale. Op de andere oever staat 1 km stroomafwaarts een fabriek. Er moet een elektriciteitskabel van de centrale naar de fabriek worden gelegd. De kosten van de aanleg van de kabel door de rivier zijn 50 euro per meter en over land 40 euro per meter.
Bereken de manier van aanleggen van de kabel die er voor zorgt dat de kosten minimaal moeten zijn. Hoe groot zijn deze minimale kosten?

5.6 Numerieke nulpuntsbepaling

12.

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = \cos(x) - 2x$. Het nulpunt van deze functie noemen we α.

a. Schets de grafieken van de $y = 2x$ en $y = \cos x$ en bepaal een benadering van α een startwaarde voor een iteratief benaderingsproces.
b. Kies een interval met lengte 0,8 waar α in ligt.
c. Benader via de methode van bisectie het nulpunt van de functie *f* in één decimaal nauwkeurig uitgaande van het gekozen interval
d. Benader α in vijf decimalen nauwkeurig met de methode van Newton-Raphson.

13.

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = x\mathrm{e}^{x} - 2$. Het nulpunt van deze functie noemen we α.

a. Laat met behulp van een schets zien dat α op het interval $[0;1{,}6]$ ligt.
b. Benader α in één decimaal nauwkeurig via de methode van bisectie.
c. Bepaal uitgaande van een geheel getal als startwaarde het nulpunt α in 3 decimalen nauwkeurig met de methode van Newton-Raphson.

14.

Benader in 5 decimalen nauwkeurig met de methode van Newton-Raphson de volgende wortels waarbij de gegeven benadering als startwaarde gebruikt kan worden.

a. $\sqrt{3} \approx 2$

b. $\sqrt[5]{400} \approx 3$