Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 9 Vectorrekening

1.

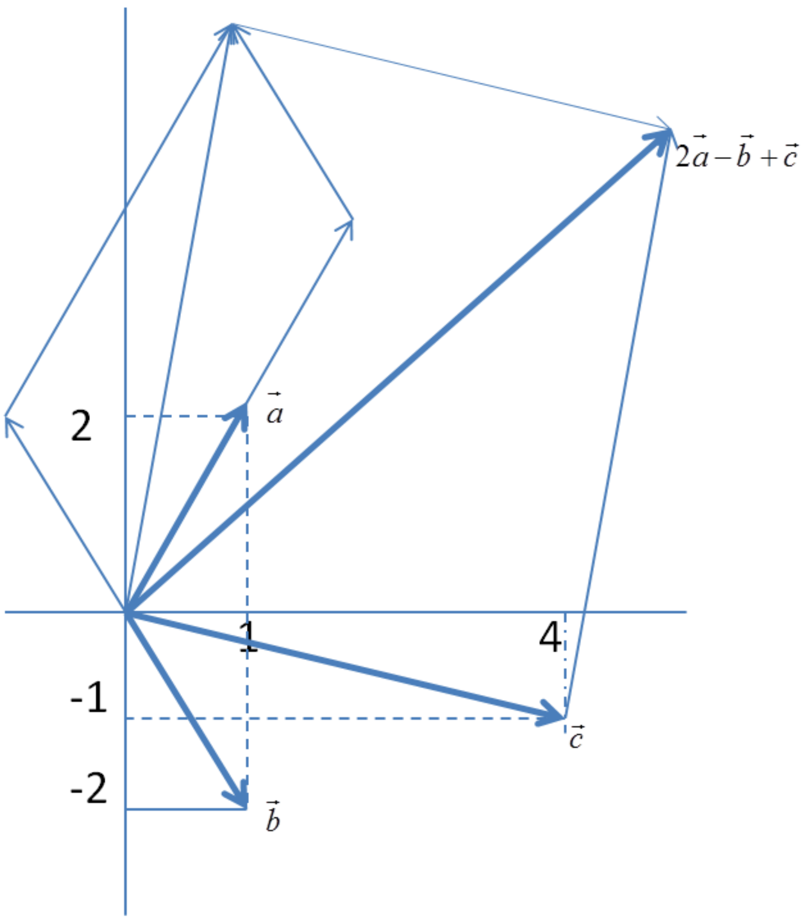
De vector $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ valt langs de *y*-as. De hoek, die $\vec{a}$ met de *y*-as maakt is dus 0 graden, de hoek, die $\vec{a}$ met de *x*-as maakt is 90 graden.

Voor de hoek φ, die de vector $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ met de *x*-as maakt geldt: $\tan\varphi=\frac{3}{2}\Rightarrow\varphi=56{,}31$ graden, de hoek, die $\vec{b}$ met de *y*-as maakt is dus $90-\varphi=90-56{,}31=33{,}69$ graden.

De vector $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ valt langs de *x*-as. De hoek, die $\vec{c}$ met de *y*-as maakt is dus 90 graden, de hoek, die $\vec{c}$ met de *x*-as maakt is 0 graden.

2.

a.



b. $$2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1+4\\4+2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

c. $$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$$

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+4}+\sqrt{1+4}+\sqrt{16+1}=2\sqrt{5}+\sqrt{17}$$

3.

a. $$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)=-1+4=3\Rightarrow\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-1-8=-9\Rightarrow\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=-9\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\9\end{pmatrix}.$$

b. $$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}=-1+4=3$$

Ook geldt: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi_{a,b}=\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\right|\cos\varphi_{a,b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}\cos\varphi_{a,b}$

Dus $\cos\varphi_{a,b}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}=0{,}5145\Rightarrow\varphi_{a,b}=59{,}04$ graden

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1-2=-1$$

Ook geldt: $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\varphi_{a,c}=\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|\cos\varphi_{a,c}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cos\varphi_{a,c}$

Dus $\cos\varphi_{a,c}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=-0{,}3162\Rightarrow\varphi_{a,c}=108{,}43$ graden

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-1-8=-9$$

Ook geldt: $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi_{b,c}=\left|\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|\cos\varphi_{b,c}=\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}\cos\varphi_{b,c}$

Dus $\cos\varphi_{b,c}=\dfrac{-9}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}=-0{,}9762\Rightarrow\varphi_{b,c}=167{,}47$ graden

4.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\p-4\end{pmatrix}$ staan loodrecht op elkaar wanneer $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$.

Dus $\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\p-4\end{pmatrix}=3+p^2-4p=0\Rightarrow p^2-4p+3=(p-1)(p-3)=0\Rightarrow p=1$ of $p=3$.

5.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

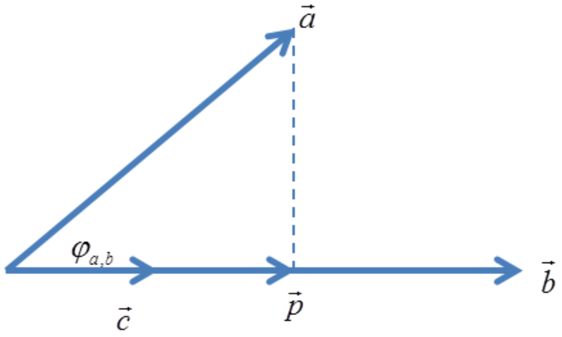
a. $\left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{17}$. Voor de vector $\vec{c}$ geldt dus: $\vec{c} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 + 12 = 14$

Ook geldt: $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi_{a,b} = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cos\varphi_{a,b} = \sqrt{13}\cdot\sqrt{17}\cos\varphi_{a,b}$

Dus $\cos\varphi_{a,b} = \dfrac{14}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = 0{,}9417 \Rightarrow \varphi_{a,b} = 19{,}65$ graden.

c.



Bovenstaand plaatje geldt voor elk tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

De projectie van vector $\vec{a}$ op vector $\vec{b}$ is vector $\vec{p}$.

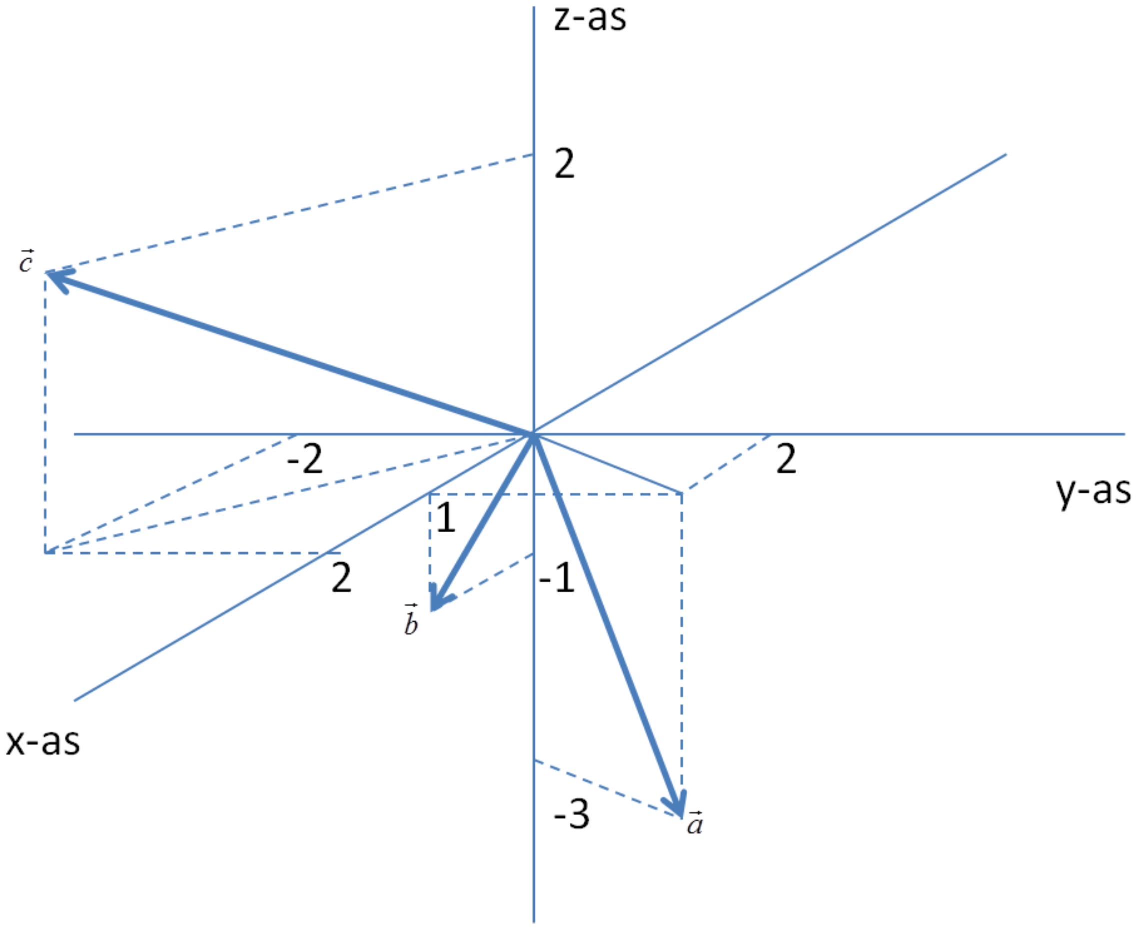
Er geldt: $\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot 1 \cdot \cos\varphi_{a,b} = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi_{a,b}$. Meetkundig geldt

$\cos\varphi_{a,b} = \dfrac{\left|\vec{p}\right|}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow \left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi_{a,b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

d. $\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi_{a,b} = \sqrt{13} \cdot 0{,}9417 = 3{,}3953$

6.

a.



b $\quad \vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$

c $\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}.$

d $\quad \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{4^2+0+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

e $\quad \cos\varphi_{a,b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{1+0+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{28}}=0,9449\Rightarrow\varphi_{a,b}=19,11\text{ graden}$

$$\cos\varphi_{b,c}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{1\cdot2+0\cdot(-2)+(-1)\cdot2}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{0}{\sqrt{24}}=0\Rightarrow\varphi_{b,c}=90\text{ graden}$$

$$\cos\varphi_{a,c}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\dfrac{1\cdot2+2\cdot(-2)+(-3)\cdot2}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{-8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{12}}=-0,6172\Rightarrow\varphi_{a,c}=128,11\text{ graden}$$