drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Toegepaste Wiskunde
voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1
Zesde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 2
Functies

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 2, paragraaf 2.9

1 $f(0)=\dfrac{1}{2\cdot 0+1}=1,\ f(-1)=\dfrac{1}{2\cdot(-1)+1}=-1,\ f(t)=\dfrac{1}{2t+1},\ f(2a)=\dfrac{1}{2\cdot 2a+1}=\dfrac{1}{4a+1},$

$f(a+1)=\dfrac{1}{2(a+1)+1}=\dfrac{1}{2a+3}$

2a $f(g(h(x)))=\sqrt{2^{2x+1}}$

2b $f(g(h(x)))=\left(\log\left(2\sqrt{x}\right)\right)^2+1$

3a $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4=(x+3)(x-1)$;dalparabool, symmetrieas: $x=-1$, top (-1,-4), snijpunten met *x*-as: $x=-3$ en $x=1$

3b $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$;dalparabool, symmetrieas: $x=1$, top (1,0), snijpunt met *x*-as: $x=-1$

3c $f(x)=x^2+3x+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$; dalparabool, symmetrieas: $x=-\frac{3}{2}$, top $\left(-\frac{3}{2},\frac{11}{4}\right)$, snijpunt(en) met *x*-as: geen

4 $y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left(x^2+4x\right)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left((x+2)^2-4\right)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{9}{2}$

Ook:

$y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\left(x^2+4x-5\right.$

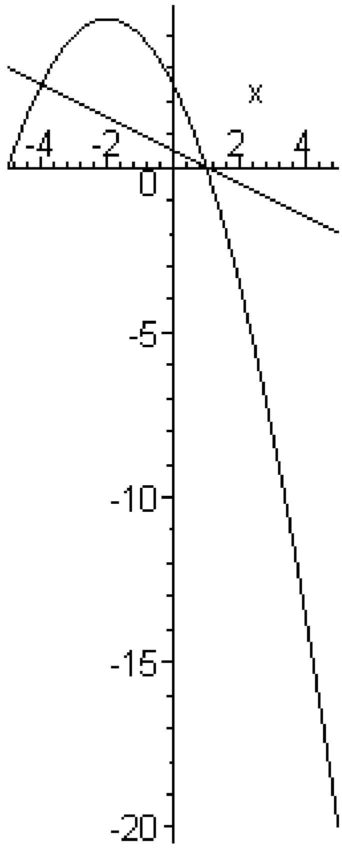
; de grafiek van $y=f(x)$ is dus dalparabool met symmetrieas $x=-2$, top $\left(-2,\frac{9}{2}\right)$ en snijpunten met *x*-as: $x=-5$ en $x=1$

$y=g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$; de grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en snijpunt met *x*-as: $x=1$.

De snijpunten van beide grafieken vinden we als volgt:

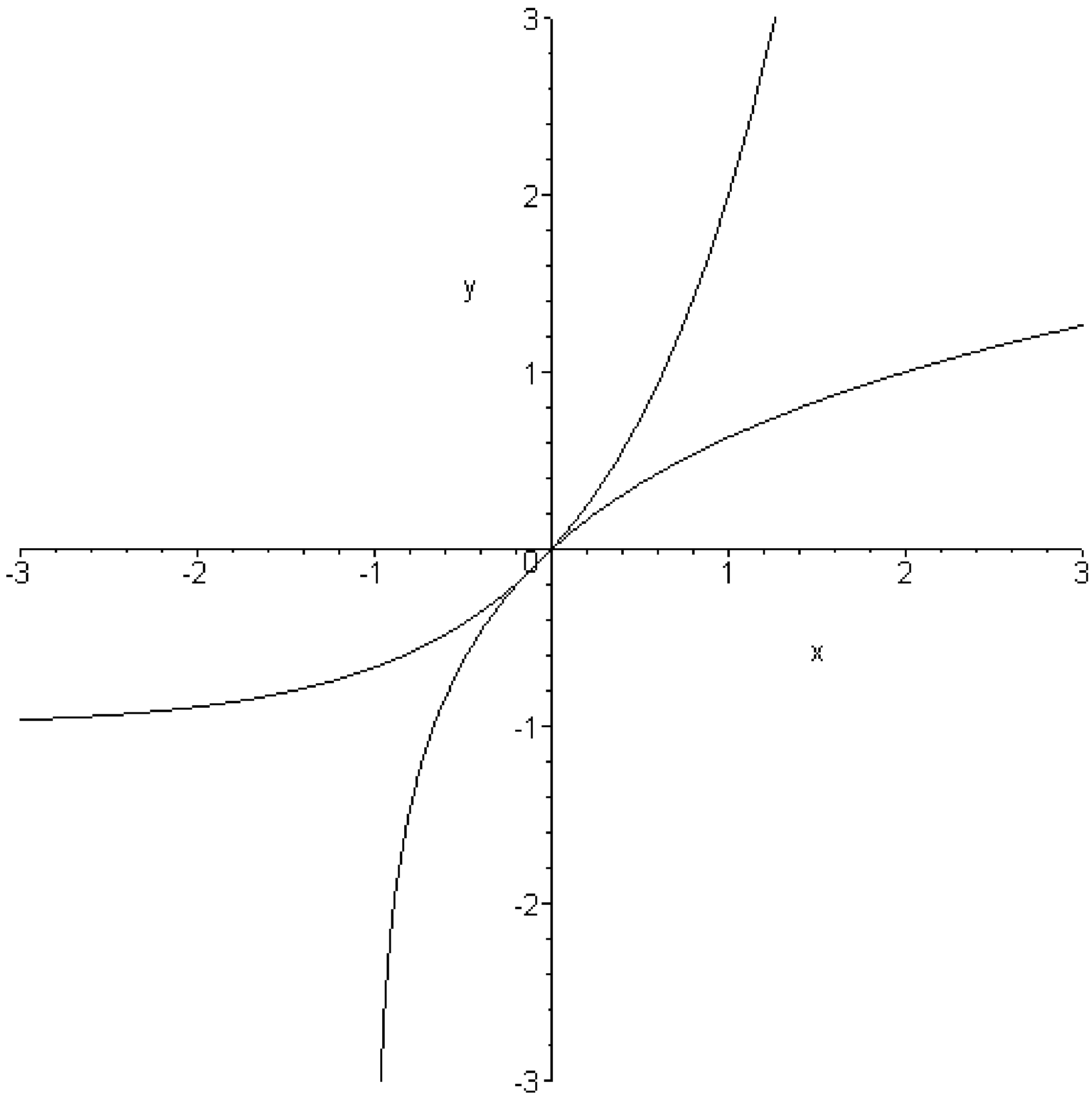
$y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}=g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$x^2+3x-4=0\Rightarrow(x+4)(x-1)=0\Rightarrow x=-$



De snijpunten zijn dus de punten $\left(-4, \frac{5}{2}\right)$ en $(1,0)$

5 Stel $y = 3^x - 1 \Rightarrow 3^x = y + 1 \Rightarrow x = {}^3\log(y+1)$. Verwissel nu de *x* en *y*. De inverse functie van $y = f(x) = 3^x - 1$ is dus $y = {}^3\log(x+1)$.



Opmerking: De beide grafieken lijken elkaar te raken (voor $x = 0$). Uit nauwkeurig onderzoek zal blijken dat ze elkaar twee maal snijden (voor $x = 0$ en voor $x = -0{,}1739824....$). Met een programma als Maple kan dit onderzocht worden.

6 $y = f(u) = \left|u^2 - 2u - 8\right|$

$$= \left|(u-4)(u+2)\right|$$

$$= \begin{cases} (u-4)(u+2) \text{ als } u \le -2 \text{ of } u \ge 4 \\ -(u-4)(u+2) \text{ als } -2 < u < 4 \end{cases}$$

en

$$y = g(u) = u^2 - |2u| - 8$$
$$= \begin{cases} u^2 - 2u - 8 \text{ als } u \geq 0 \\ u^2 + 2u - 8 \text{ als } u < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (u-4)(u+2) \text{ als } u \geq 0 \\ (u+4)(u-2) \text{ als } u < 0 \end{cases}$$

De grafieken van $y = f(u)$ en $y = g(u)$ (delen van parabolen) vallen dus samen voor $u \geq 4$.

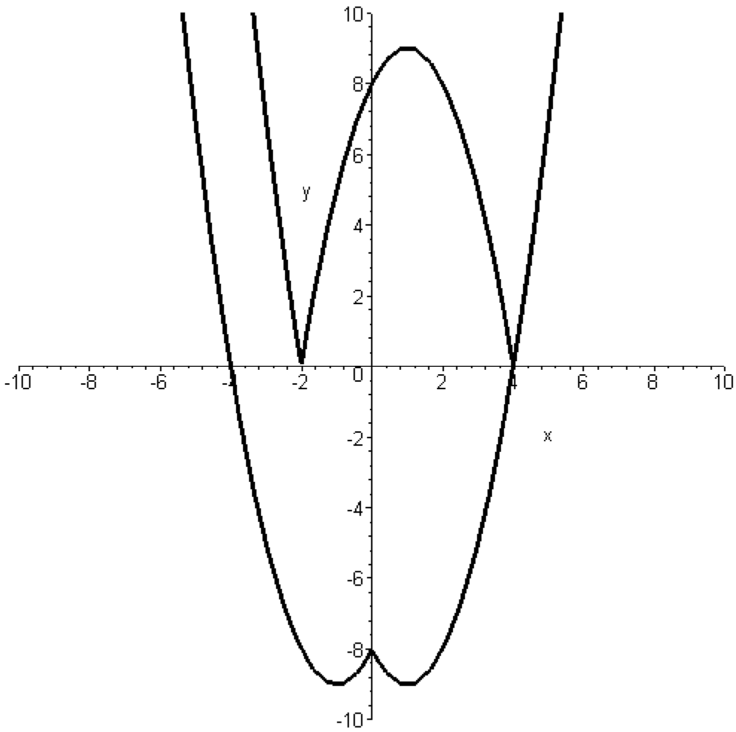
7

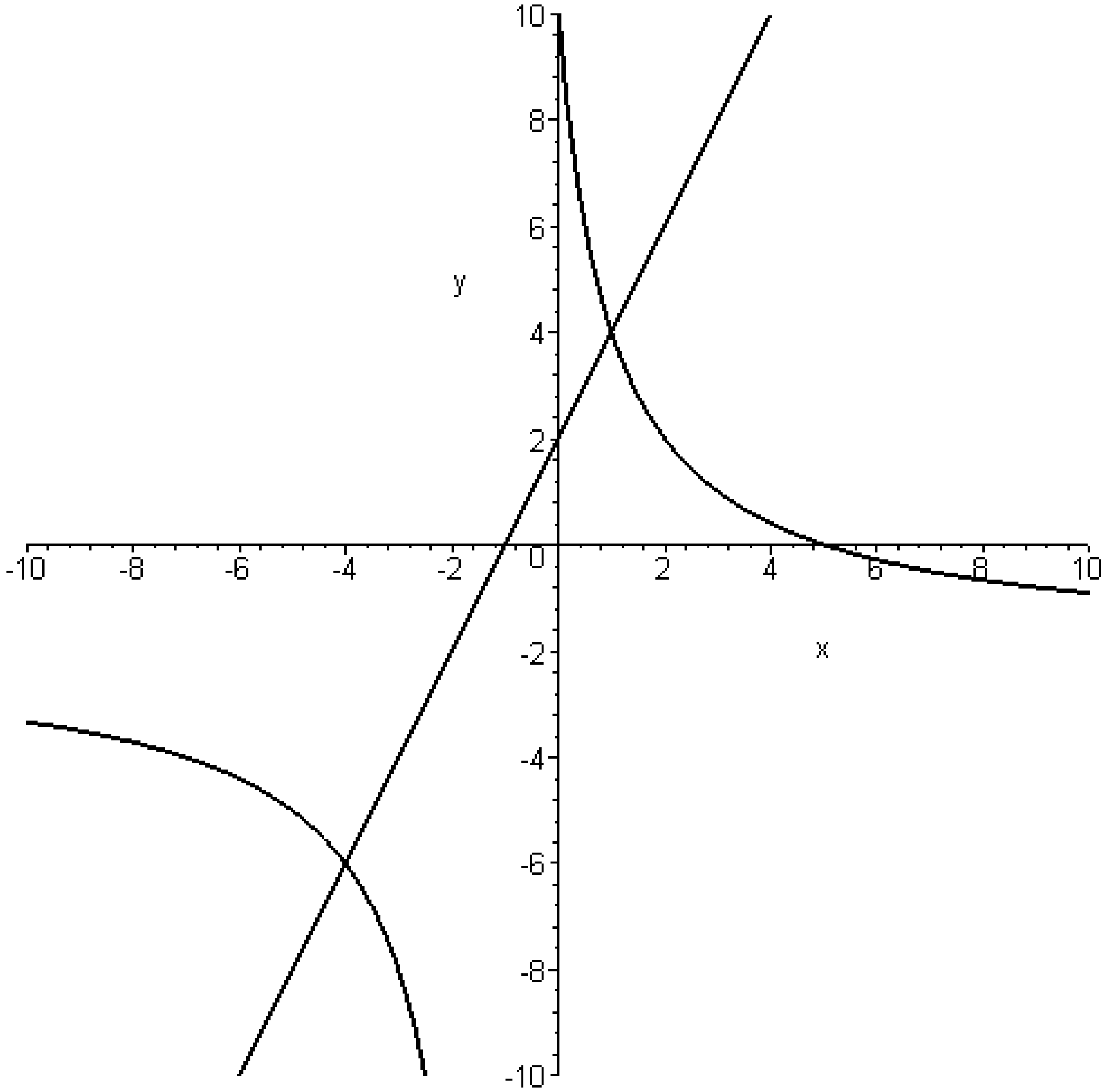
De grafiek van $y = f(x) = \dfrac{-2x+10}{x+1}$ is een (orthogonale) hyperbool met horizontale asymptoot $y = -2$ en verticale asymptoot $x = -1$. De grafiek van $y = g(x) = 2x + 2$ is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 2 en snijpunt met de x-as bij $x = -1$.

Bepaling van de snijpunten:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{-2x+10}{x+1} = 2x + 2$$
$$\Rightarrow -2x + 10 = (x+1)(2x+2)$$
$$\Rightarrow -2x + 10 = 2x^2 + 2x + 2x + 2$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -4 \vee x = 1$$

De snijpunten zijn: (-4,-6) en (1,4).





8 P.M.

9 $y = f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$

9a 3 omhoog: $y_1 = f_1(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1} + 3$

9b 2 naar rechts: $y_2 = f_2(x) = \dfrac{3(x-2)-2}{2(x-2)-1} + 3 = \dfrac{3x-8}{2x-5} + 3 = \dfrac{3x-8+3(2x-5)}{2x-5} = \dfrac{9x-22}{2x-5}$

10

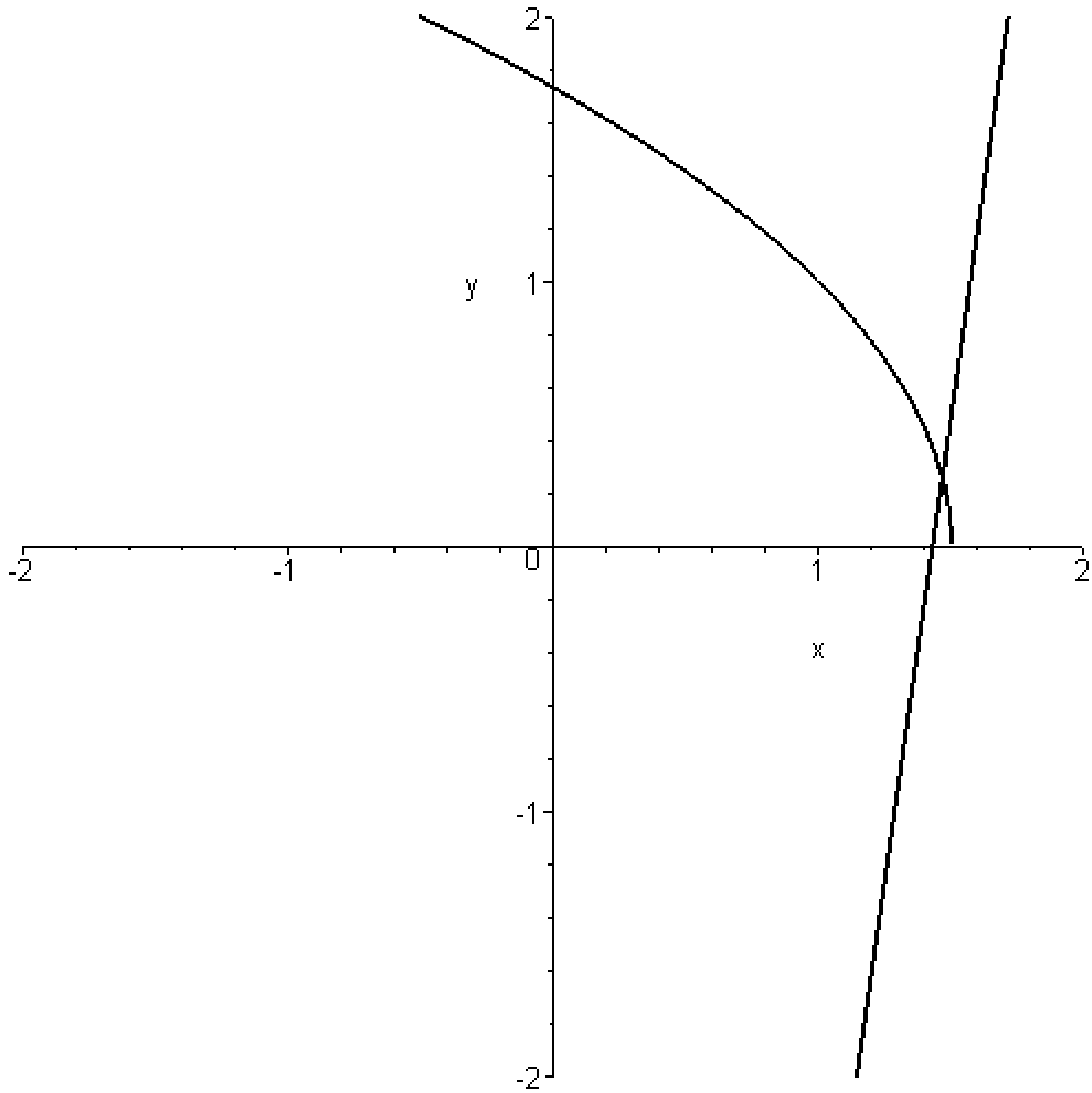
```
> f:=x->7*x-10;
```

$$f := x \to 7\,x - 10$$

```
> g:=x->sqrt(3-2*x);
```

$$g := x \to \sqrt{3-2\,x}$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-2..2,y=-
2..2,color=black,thickness=2);
```




```
> solve(f(x)<g(x),x);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(\frac{69}{49}+\frac{2\sqrt{2}}{49}\right)\right)$$

```
> solve(f(x)=g(x),x);
```

$$\frac{69}{49}+\frac{2\sqrt{2}}{49}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.465886268$$

\>

11a $y=\frac{1}{x} \Rightarrow \log y = \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \Rightarrow Y = -X$ (rechte lijn door oorsprong, richtingscoëfficiënt -1)

11b $y=\sqrt{x} \Rightarrow \log y = \log\left(\sqrt{x}\right) = \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log x \Rightarrow Y = -\frac{1}{2}X$ (rechte lijn door oorsprong, richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$)

11c $y=\frac{1}{x} \Rightarrow \log y = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\log\left(x^2\right) = -2\log x \Rightarrow Y = -2X$ (rechte lijn door oorsprong, richtingscoëfficiënt -2)

12 a $x^2-2x-7=(x-1)^2-1-7=(x-1)^2-8$

b
$$2x^2+2x-2=2(x^2+x)-2=2\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right)-2$$
$$=2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2}-2$$
$$=2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-2\tfrac{1}{2}$$

c
$$-\tfrac{1}{2}x^2-2x+\tfrac{5}{2}=-\tfrac{1}{2}\left(x^2-4x\right)+\tfrac{5}{2}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left((x-2)^2-4\right)+\tfrac{5}{2}$$
$$=-\tfrac{1}{2}(x-2)^2+2+\tfrac{5}{2}$$
$$=-\tfrac{1}{2}(x-2)^2+4\tfrac{1}{2}$$

d
$$2x-3x^2+8=-3\left(x^2-\tfrac{2}{3}x\right)+8$$
$$=-3\left(\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2-\tfrac{1}{9}\right)+8$$
$$=-3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{1}{3}+8$$
$$=-3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2+8\tfrac{1}{3}$$

13a

${}^2\log(x+2) \le {}^2\log(x^2-3x-4)$

Voorwaarden: $x+2>0 \Rightarrow x>-2$ en

$x^2-3x-4>0 \Rightarrow (x-4)(x+1)>0 \Rightarrow x<-1 \vee x>4$

Conclusie: Stel als voorwaarde: $-2<x<-1 \vee x>4$.

Nu kunnen we stellen: $x+2 \le x^2-3x-4$ (let op: het ongelijkheidsteken klapt niet om, want het grondtal (2) is groter dan 1.

$x+2 \le x^2-3x-4 \Rightarrow x^2-4x-6 \ge 0$

Stel nu: $x^2-4x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot(-6)}}{2}=2\pm\sqrt{10}$.

Met een tekenoverzicht vinden we;

$x^2-4x-6 \ge 0 \Rightarrow x \le 2-\sqrt{10} \vee x \ge 2+\sqrt{10}$.

$2-\sqrt{10}\approx -1{,}16$ en $2+\sqrt{10}\approx 5{,}16$.

Met de gestelde voorwaarden in acht genomen vinden we:
$-2 < x \leq 2-\sqrt{10} \vee x \geq 2+\sqrt{10}$

13b $\quad {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \leq {}^{\frac{1}{2}}\log(2x-5)$

Voorwaarden: $x > 0$ en $2x-5 > 0 \Rightarrow x > 2\frac{1}{2}$.

Conclusie: Stel als voorwaarde: $x > 2\frac{1}{2}$.

Nu kunnen we stellen: $x \geq 2x-5$ (let op: het ongelijkheidsteken klapt om, want het grondtal ($\frac{1}{2}$) is kleiner dan 1.

$x \geq 2x-5 \Rightarrow x \leq 5$

Met de gestelde voorwaarde in acht genomen vinden we: $2\frac{1}{2} < x \leq 5$

13c $\quad 2^{x^2-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-10} \Rightarrow 2^{x^2-x} > \left(2^{-1}\right)^{4x-10} \Rightarrow 2^{x^2-x} > 2^{-4x+10}$

We kunnen nu stellen dat $x^2-x > 4x-10$. Het ongelijkheidsteken klapt niet om want het grondtal (2) is groter dan 1.
$x^2-x > -4x+10 \Rightarrow x^2+3x-10 > 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) > 0$.
Met een tekenoverzicht vinden we dat $x < -5 \vee x > 2$

13d $\quad 2^{-x} \leq 4^{3x-2} \Rightarrow 2^{-x} \leq (2^2)^{3x-2} \Rightarrow 2^{-x} \leq 2^{6x-4}$.
We kunnen nu stellen dat $-x \leq 6x-4$. Het ongelijkheidsteken klapt niet om want het grondtal (2) is groter dan 1.
$-x \leq 6x-4 \Rightarrow -7x \leq -4 \Rightarrow x \geq \frac{-4}{-7} \Rightarrow x \geq \frac{4}{7}$.
Let op: In de laatste bewerking klapt het ongelijkheidsteken om, omdat aan beide kanten van het ongelijkheidsteken door een negatief getal (-7) gedeeld wordt.