Module 3
Uitwerkingen van de opdrachten

Hoofdstuk 2 Normaalspanningen

Opdracht 1

a De trekkracht volgt uit:

$$F_t = A \cdot f_s = (10 \cdot 100) \cdot 235 = 235\,000 \text{ N} = 235 \text{ kN}$$

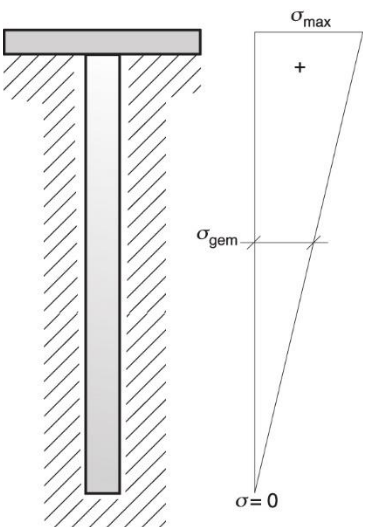
b De kracht kan als volgt worden bepaald:

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon = l \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{l \cdot F}{E \cdot A} \Rightarrow$$

$$F = EA\frac{\Delta l}{l} = 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot (10 \cdot 100) \cdot \frac{10}{2000} = 1050 \cdot 10^3 \text{ N} = 1050 \text{ kN}$$

c Kracht en verlenging gedragen zich lineair (zijn evenredig):

$$F = 1050 \cdot 10^3 \cdot \frac{20}{10} = 2100 \cdot 10^3 \text{ N} = 2100 \text{ kN}$$



Figuur 3.1

Opdracht 2

a Als het gat op diepte is, hangt de boorkop net vrij van de bodem. De boortafel krijgt dan het volledige gewicht van de boorstang te dragen.

De spanning is niet constant: aan de punt is deze nul, ter plaatse van het ophangpunt is de spanning maximaal. De gemiddelde spanning is:

$$\sigma_{\text{gem}} = \frac{\sigma_{\text{min}} + \sigma_{\text{max}}}{2} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{2}$$

Hiermee kan de gemiddelde rek worden bepaald en daarmee de verlenging:

$$\Delta l = \varepsilon_{\text{gem}} \cdot l = \frac{\sigma_{\text{gem}} \cdot l}{E} = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot l}{2E}$$

De onbekende in deze vergelijking is de maximale spanning ter plaatse van het ophangpunt. Met de gegevens van de boor kan worden gevonden:

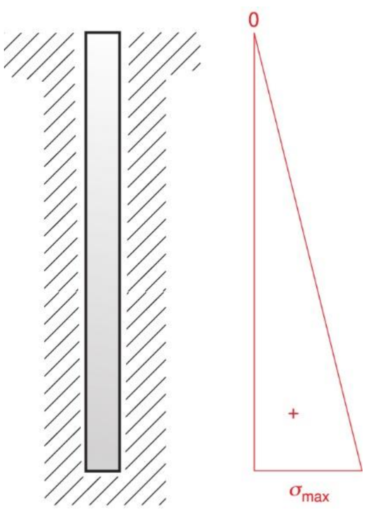
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} = \frac{\text{volume} \cdot \rho \cdot g}{A} = \frac{A \cdot l \cdot \rho \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot l$$

Hieruit volgt:

$$\Delta l = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot l}{2E} = \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{2E} = \frac{7800 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot (200 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} = 7{,}43\,\text{mm}$$

Het geboorde gat wordt hiermee 200 007,43 mm diep.

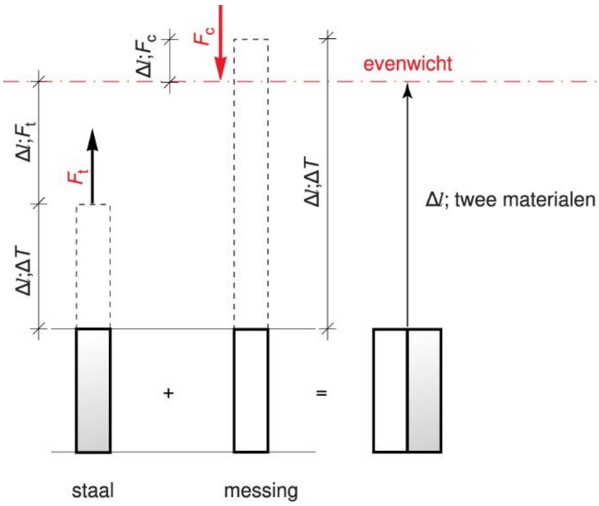
b Doordat de staaf op de punt rust, zal de boorstang onder druk komen te staan. De drukspanning is even groot als de trekspanning die is gevonden bij vraag a.
De kabel zal zover moeten worden gevierd dat de trekspanning kan overgaan in een drukspanning. De totale verkorting die daarmee gepaard gaat, is 7,43 + 7,43 = 14,86 mm. De kabel zal dus 14,86 mm moeten worden gevierd.



Figuur 3.2

Opdracht 3

Door de temperatuurverhoging zullen de beide materialen willen uitzetten. Doordat de materialen met elkaar zijn verbonden, zal de verlenging voor beide materialen gelijk zijn.



Figuur 3.3

a We kijken naar het afzonderlijke gedrag van de beide materialen. Uiteraard moet er krachtenevenwicht zijn. De evenwichtsvergelijking die kan worden opgesteld, luidt (zie hiervoor de theorie):

$$(\Delta l_{\mathrm{T}} + \Delta l_{F_{\mathrm{t}}})_{\mathrm{staal}} = (\Delta l_{\mathrm{T}} - \Delta l_{F_{\mathrm{c}}})_{\mathrm{messing}}$$

Met:

$$\Delta l_{\mathrm{T}} = \Delta T \cdot \alpha \cdot l;\ \Delta l_{F_{\mathrm{c}}} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Uit het evenwicht volgt dat de drukkracht even groot moet zijn als de trekkracht:

$$F_{\mathrm{c}} = F_{\mathrm{t}}$$

Invullen levert de basisvergelijking met als onbekende de kracht F:

$$\left(\Delta T \cdot \alpha \cdot l + \frac{F \cdot l}{E \cdot A}\right)_{\mathrm{staal}} = \left(\Delta T \cdot \alpha \cdot l - \frac{F \cdot l}{E \cdot A}\right)_{\mathrm{messing}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\Delta T \cdot \alpha + \frac{F}{E \cdot A}\right)_{\mathrm{staal}} = \left(\Delta T \cdot \alpha - \frac{F}{E \cdot A}\right)_{\mathrm{messing}}$$

Met:

$\Delta T = 69 - 15 = 54°$
$A_{staal} = \frac{1}{4}\pi \cdot 100^2 = 78{,}54\ mm^2$
$A_{messing} = \frac{1}{4}\pi \cdot (24^2 - 10^2) = 373{,}85\ mm^2$

De onbekende kracht *F* kan nu worden opgelost en daarmee kunnen vervolgens de spanningen in het staal en messing worden bepaald:

$$\left(54 \cdot 12 \cdot 10^{-6} + \frac{F}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 78{,}54}\right) = \left(54 \cdot 19 \cdot 10^{-6} + \frac{F}{8 \cdot 10^4 \cdot 373{,}85}\right) \Leftrightarrow$$

$F = 4021\ N$

$$\sigma_{staal} = \frac{F}{A_{staal}} = \frac{4021}{78{,}54} = 51{,}2\ N/mm^2$$

$$\sigma_{messing} = \frac{-F}{A_{messing}} = \frac{-4021}{373{,}85} = -10{,}76\ N/mm^2$$

In het staal ontstaat een *trekspanning*, in het messing een *drukspanning*.

b De verlenging kan worden bepaald met:

$$\Delta l = \left(\Delta T \cdot \alpha \cdot l + \frac{F \cdot l}{E \cdot A}\right)_{staal} = \left(54 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100 + \frac{4021 \cdot 100}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 78{,}54}\right) = 0{,}089\ mm$$

Opdracht 4

Voor het oplossen van dit vraagstuk wordt uitgegaan van de volgende basisvergelijking:

$$(\Delta l_T + \Delta l_{F_t})_{staal} = (\Delta l_T - \Delta l_{F_c})_{beton}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\Delta T \cdot \alpha + \frac{F}{E \cdot A}\right)_{staal} = \left(\Delta T \cdot \alpha - \frac{F}{E \cdot A}\right)_{beton}$$

Met:

$$\sigma_{beton} = \frac{-F_{beton}}{A_{beton}} = -35\ N/mm^2 \Leftrightarrow F_{beton} = 35 \cdot 15 \cdot 10^4 = 5250 \cdot 10^3\ N = F_{staal}$$

Verder uitwerken levert voor de nog onbekende temperatuurverhoging:

$$\left(\tfrac{1}{2}\Delta T \cdot 1 \cdot 10^{-5} + \frac{5250 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^4}\right) = \left(\Delta T \cdot 2 \cdot 10^{-5} - \frac{35}{15 \cdot 10^4}\right) = \Delta T = 73{,}9°$$

Hoofdstuk 3 Spanningen als gevolg van buiging

Opdracht 5

a Algemeen geldt:

$$M = W_{y,\,el} \cdot f_s \qquad \text{met: } f_s = 235 \text{ N/mm}^2$$

Voor de gevraagde profielen levert dit tabel 3.1.

Tabel 3.1
Profielgegevens

Profiel	*W* [mm³]	e.g. [kg/m]	*M* [kNm]
HE200A	$388{,}6 \cdot 10^3$ mm³	42,3	91,3
HE200B	$569{,}6 \cdot 10^3$ mm³	61,3	133,9
HE200M	$967{,}4 \cdot 10^3$ mm³	103,0	227,3

b Door het moment te delen door het eigengewicht kan de capaciteit van het profiel ten opzichte van de hoeveelheid materiaal (prijs) worden bepaald (zie tabel 3.2).

Tabel 3.2
Capaciteit

Profiel	e.g. [kg/m]	*M* [kNm]	*M*/e.g. [kNm/kg]
HE200A	42,3	91,3	2,16
HE200B	61,3	133,9	2,18
HE200M	103,0	227,3	2,21

Conclusie: de *M*-profielen zijn wel sterker per kg dan de *A*- en *B*-profielen, maar qua prijs-prestatie maakt het niet veel uit.

Opdracht 6

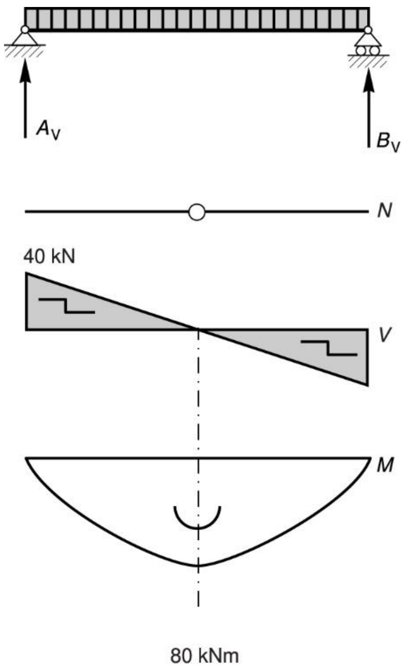
Uit symmetrie volgt:

$$A_V = B_V = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40 \text{ kN; } M_{veld} = \tfrac{1}{8} \cdot 10 \cdot 8^2 = 80 \text{ kNm}$$

Het benodigde profiel volgt uit de basisvergelijking:

$$M = W_{y,\,el} \cdot f_s$$
$$80 \cdot 10^6 = W_{y,\,el} \cdot 235 \Rightarrow W_{y,\,el} = 394{,}4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Kies een IPE270 met een $W_{y,\,el} = 428{,}9 \cdot 10^3$ mm³.



Figuur 3.4

Hoofdstuk 4 Schuifspanningen door een dwarskracht

Opdracht 7

Ter plaatse van de neutrale lijn in de doorsnede is de schuifspanning maximaal. De grootte van de schuifspanning wordt bepaald met:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{b \cdot I}$$

Het statisch moment van het afgeschoven deel (halve doorsnede) is:

$$S = (b \cdot \tfrac{1}{2}h) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}h = \frac{bh^2}{8} = \frac{100^3}{8} = 12\,500 \text{ mm}^3$$

Het traagheidsmoment van de doorsnede is:

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = 833{,}33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

De schuifspanning ter plaatse van de neutrale lijn wordt hiermee (b = 100 mm):

$$\tau_{\max} = \frac{5000 \cdot 125\,000}{100 \cdot 833{,}33 \cdot 10^4} = 0{,}75 \text{ N/mm}^2$$

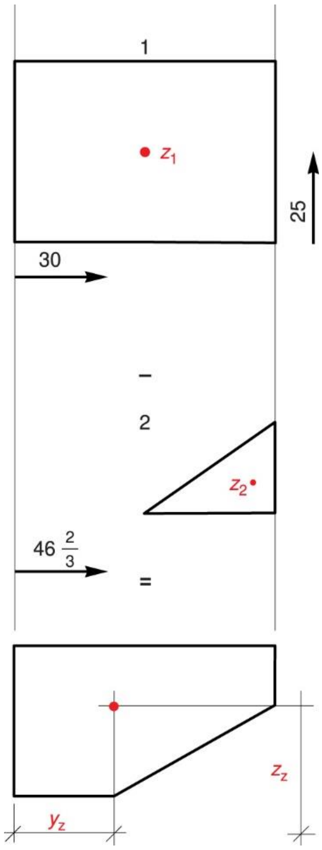
Het schuifspanningsverloop is parabolisch over de hoogte van de doorsnede. Aan de boven- en onderrand moet de schuifspanning nul zijn; ter plaatse van de neutrale lijn (halverwege) is de schuifspanning gelijk aan de hiervoor gevonden maximale waarde. Voor een rechthoekige doorsnede kan hiervoor worden gevonden:

$$\tau_{\max} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{5000}{100 \cdot 100} = 0{,}75 \text{ N/mm}^2$$

De maximale schuifspanning is dus 1,5 maal de ‘gemiddelde’ schuifspanning.

Hoofdstuk 5 Zwaartepunten en traagheidsgrootheden

Opdracht 8



Figuur 3.5

Deel de figuur op in een omhullende rechthoek en een driehoek. Deze driehoek is een negatief oppervlak, dit moet van de omhullende af om het gegeven oppervlak te verkrijgen.

$A_1 = 60 \cdot 50 = 3000 \text{ mm}^2$ (rechthoek)
$A_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600 \text{ mm}^2$ (driehoek)

De ligging van het zwaartepunt wordt bepaald ten opzichte van de *y*- en *z*-as.

$$z = \frac{\Sigma S_y}{A_{tot}} = \frac{z_1 A_1 - z_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{30 \cdot 3000 - 46{,}66 \cdot 600}{3000 - 600} = 25{,}83 \text{ mm}$$

$$y = \frac{\Sigma S_z}{A_{tot}} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{25 \cdot 3000 - 10 \cdot 600}{3000 - 600} = 28{,}75 \text{ mm}$$

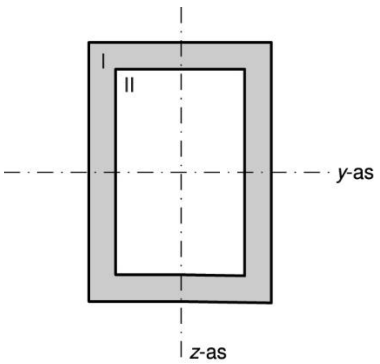
Visuele controle van de ligging van het zwaartepunt levert op dat dit punt inderdaad boven de halve hoogte moet liggen en links van de halve breedte. De gevonden waarden zijn hiermee in overeenstemming.

Opdracht 9

De gegeven figuur is symmetrisch ten opzichte van de horizontale en verticale as. Het zwaartepunt ligt in het midden van de figuur. Splits de figuur op in bekende basisvormen (zie hiervoor figuur 3.6).

deel 1 = $40 \cdot 60$ mm^2
deel 2 = $20 \cdot 40$ mm^2

$$\begin{aligned} I_{y\text{ – totaal}} &= I_{y\text{ eigen – 1}} - I_{y\text{ eigen – 2}} \\ &= \tfrac{1}{12} \cdot 40 \cdot 60^3 - \tfrac{1}{12} \cdot 20 \cdot 40^3 \\ &= 61{,}33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ I_{z\text{ – totaal}} &= I_{z\text{ eigen – 1}} - I_{z\text{ eigen – 2}} \\ &= \tfrac{1}{12} \cdot 60 \cdot 40^3 - \tfrac{1}{12} \cdot 40 \cdot 20^3 \\ &= 29{,}33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$



Figuur 3.6

Hoofdstuk 6 Transformaties van assenstelsels

Opdracht 10

De figuur is symmetrisch ten opzichte van de verticale as; het zwaartepunt ligt dus op de verticale as. Splits de figuur op in bekende basisdelen (zie hiervoor figuur 3.7a).

Om de oplossing te bepalen zijn de volgende stappen nodig:

1 Bepaal het zwaartepunt van de afzonderlijke bekende delen.
2 Bepaal het zwaartepunt van de samengestelde doorsnede.
3 Bepaal de verschuiving van de bekende delen ten opzichte van het gevonden zwaartepunt van de totale doorsnede (verschuifterm in de regel van Steiner).
4 Bepaal het eigen traagheidsmoment van de afzonderlijke delen.
5 Bepaal het totale traagheidsmoment, dus inclusief de translatie (verschuiving).

deel I = $10 \cdot 30 = 300$ mm^2
deel II = $10 \cdot 20 = 200$ mm^2
deel III = $20 \cdot 15 = 300$ mm^2

Het zwaartepunt van de doorsnede wordt gevonden met (zie ook figuur 3.7b):

$$z = \frac{\Sigma S_y}{A_{tot}} = \frac{300 \cdot (-15) + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 17{,}5}{300 + 200 + 300} = 0{,}94 \text{ mm}$$

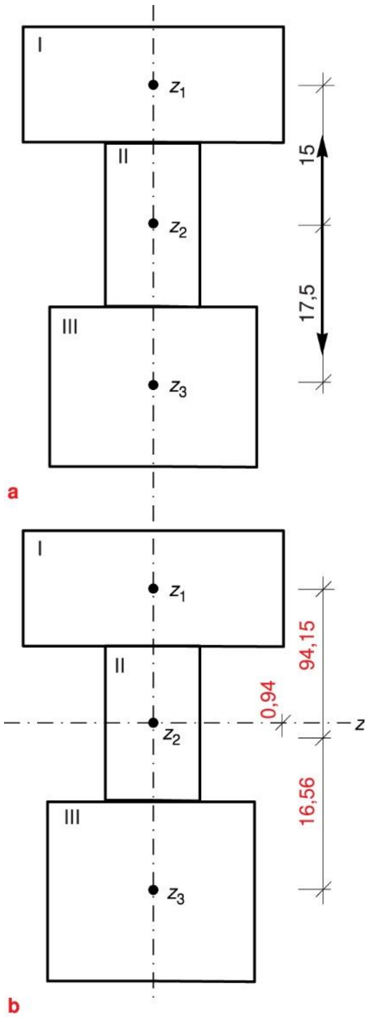
De stappen 2 tot en met 5 zijn in tabel 3.3 weergegeven.

Tabel 3.3
Stap 2 t/m 5, eenheden in mm

Deel	***A***	z_y	$z_y^2 \cdot A$	$I_{y\text{ eigen}}$
I	300	−15,94	76 225,1	$\frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 10^3 = 2500{,}00$
II	200	− 0,94	176,72	$\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3 = 6666{,}67$
III	300	16,56	82 270	$\frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 15^3 = 5625{,}00$
Totaal	800		$158{,}7 \cdot 10^3$	$14{,}8 \cdot 10^3$

Voor de beide traagheidsmomenten wordt gevonden:

$$I_y = 158{,}7 \cdot 10^3 + 14{,}8 \cdot 10^3 = 173{,}5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$
$$I_z = I_{z\text{ eigen}-\text{I}} + I_{z\text{ eigen}-\text{II}} + I_{z\text{ eigen}-\text{III}}$$
$$= \tfrac{1}{12} \cdot 30^3 \cdot 10 + \tfrac{1}{12} \cdot 10^3 \cdot 20 + \tfrac{1}{12} \cdot 20^3 \cdot 15 = 34{,}2 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$



Figuur 3.7

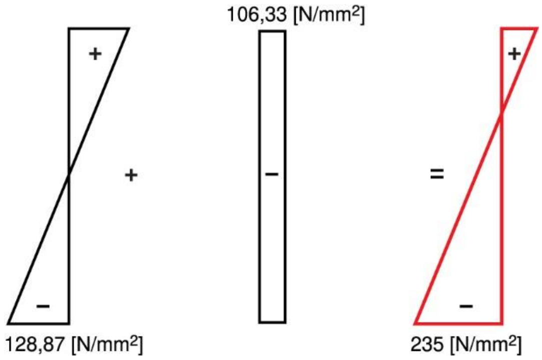
Hoofdstuk 7 Spanningscombinaties

Opdracht 11

Het profiel moet een moment en een normaal(druk)kracht opnemen. De maximale spanning is 235 N/mm².

De basisvergelijking die moet worden gebruikt, is:

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} \pm \frac{N}{A}$$



Figuur 3.8

De momentcapaciteit van een HE200A is:

$$M_{\text{max, el}} = W_{\text{y, el}} \cdot f_{\text{y}} = 388{,}6 \cdot 10^3 \cdot 235 = 91{,}3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 91{,}3 \text{ kNm}$$

Het optredende moment is 50 kNm, de bijbehorende spanning volgt uit het lineaire verband tussen het moment en de normaalspanning ten gevolgde van het moment:

$$\sigma_{\text{M}} = \pm \frac{50{,}0}{91{,}3} \cdot 235 = \pm 128{,}7 \text{ N/mm}^2$$

Voor de normaalspanning ten gevolge van een normaal(druk)kracht is de drukzone maatgevend. De drukspanning is maximaal gelijk aan -235 N/mm^2. Voor de spanning ten gevolge van de normaalkracht resteert:

$$-\sigma_{\text{M}} + \sigma_{\text{N}} = -f_{\text{s}} - 128{,}7 + \sigma_{\text{N}} = -235$$
$$\sigma_{\text{N}} = -106{,}3 \text{ N/mm}^2$$

De normaalkracht die hierbij hoort, is:

$$N = -106{,}3 \cdot A = -106{,}3 \cdot 5383$$
$$= -572 \cdot 10^3 \text{ N} = -572 \text{ kN}$$

De drukkracht heeft dus een grootte van 572 kN.

Opdracht 12

De basisvergelijking luidt:

$$\sigma = \pm \frac{M_{\text{y}} \cdot z}{I_{\text{y}}} \pm \frac{M_{\text{z}} \cdot y}{I_{\text{z}}} = \pm \frac{M_{\text{y}}}{W_{\text{y}}} \pm \frac{M_{\text{z}}}{W_{\text{z}}}$$

Voor een HE180B geldt:

$$W_{\text{y, el}} = 425{,}7 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$
$$W_{\text{z, el}} = 151{,}4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Ten gevolge van het optredende moment M_y ontstaat er in de uiterste vezel een spanning:

$$\sigma_{M_y} = \pm\frac{M_y}{W_y} = \pm\frac{25 \cdot 10^6}{425{,}7 \cdot 10^3} = \pm 58{,}73 \text{ N/mm}^2$$

De grootte van de normaalspanning in deze uiterste vezel kan door toedoen van een moment M_z nog maximaal toenemen tot de vloeispanning. Hieruit volgt voor de spanning ten gevolge van een moment M_z:

$$|\sigma_{M_z}| = 235 - 58{,}73 = 176{,}27 \text{ N/mm}^2$$

De grootte van het moment M_z is nu te bepalen met:

$$|M_z| = 176{,}27 \cdot W_{z,\,el} = 176{,}26 \cdot 151{,}4 \cdot 10^3 = 26{,}69 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 26{,}7 \text{ kNm}$$

Opdracht 13

De basisvergelijking die moet worden gebruikt, is:

$$\sigma = \pm\frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{N}{A}$$

De doorsnede is symmetrisch. De traagheidsmomenten en het oppervlak van de doorsnede zijn als volgt te bepalen:

$$I_y = \tfrac{1}{12} \cdot 25 \cdot 40^3 - 2 \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 5 \cdot 20^3 = 126{,}67 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$
$$I_z = 2 \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 25^3 \cdot 10 + \tfrac{1}{12} \cdot 15^3 \cdot 20 = 31{,}67 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$
$$A = 2 \cdot 25 \cdot 10 + 15 \cdot 20 = 800 \text{ mm}^2$$

In drie punten zijn de spanningen gegeven. Er kunnen nu dus drie vergelijkingen worden opgesteld met als onbekenden de momenten M_y, M_z en de normaalkracht N. In de vergelijkingen worden deze snedekrachten positief aangenomen. Uit de berekening zal blijken of deze aanname juist was. Voor elk punt moet per snedekracht worden nagegaan of de spanningsbijdrage positief of negatief is. Bestudeer hiervoor figuur 7.4 op blz. 191.

(1) $$\sigma_1 = -\frac{M_y \cdot 10}{I_y} + \frac{M_z \cdot 12{,}5}{I_z} + \frac{N}{A}$$

(2) $$\sigma_2 = -\frac{M_z \cdot 7{,}5}{I_y} + \frac{N}{A}$$

(3) $$\sigma_3 = \frac{M_y \cdot 10}{I_y} + \frac{M_z \cdot 7{,}5}{I_z} + \frac{N}{A}$$

Uitwerken levert:

(1) $$15 = -\frac{M_y \cdot 10}{126{,}67 \cdot 10^3} + \frac{M_z \cdot 12{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{N}{800}$$

(2) $$-3 = -\frac{M_z \cdot 7{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{N}{800}$$

(3) $$-10 = \frac{M_y \cdot 10}{126{,}67 \cdot 10^3} + \frac{M_z \cdot 7{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{N}{800}$$

Door vergelijking (1) en (3) bij elkaar op te tellen, valt de bijdrage van M_y eruit. Samen met vergelijking (2) resteren dan nog twee vergelijkingen met twee onbekenden:

(1) + (3) $$5 = -\frac{M_z \cdot 20}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{2N}{800}$$

(2) $$-3 = -\frac{M_z \cdot 7{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{N}{800}$$

Door de laatste vergelijking met 2 te vermenigvuldigen en van de eerste af te trekken, wordt N geëlimineerd en ontstaat:

$$11 = \frac{M_z \cdot 35}{31{,}67 \cdot 10^3} \Rightarrow M_z = 9953 \text{ Nmm}$$

Met vergelijking (2) kan voor de normaalkracht worden gevonden:

$$N = 800 \cdot \left(-3 + \frac{9953 \cdot 7{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} \right) = -514 \text{ N}$$

Door gebruik te maken van vergelijking (1) wordt voor het moment M_y gevonden:

$$15 = -\frac{M_y \cdot 10}{126{,}67 \cdot 10^3} + \frac{9953 \cdot 12{,}5}{31{,}67 \cdot 10^3} + \frac{-514}{800}$$

$M_y = -148\ 382$ Nmm

Met de basisformule en de nu bekende snedekrachten kan de spanning in elk punt (y, z) worden bepaald:

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

Voor de vier buitenste punten wordt zo tabel 3.4 gevonden.

Tabel 3.4

Spanningen in de hoekpunten

Punt	*y*	*z*	Spanning [N/mm²]
Linksboven	12,5	−20	18,9
Rechtsboven	−12,5	−20	26,7
Linksonder	12,5	20	−28,0
Rechtsonder	−12,5	20	−20,1

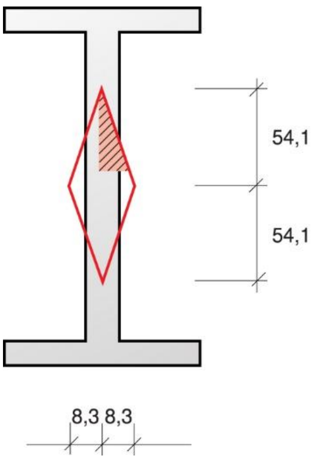
Opdracht 14

De gegevens van een IPE160 zijn:
$A = 2009 \text{ mm}^2$
$W_y = 108{,}7 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
$W_z = 16{,}66 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

Voor de kernafmetingen kan worden gevonden (zie figuur 3.9):

$$-\frac{1}{A} + \frac{e_y}{W_z} \leq 0 - \frac{1}{2009} + \frac{e_y}{16\,666} \leq 0 \Rightarrow e_y = 8{,}3 \text{ mm}$$

$$-\frac{1}{A} + \frac{e_z}{W_y} \leq 0 - \frac{1}{2009} + \frac{e_z}{108\,700} \leq 0 \Rightarrow e_z = 54{,}1 \text{ mm}$$



Figuur 3.9

Opdracht 15

De basisvergelijking waarmee moet worden gewerkt, is:

$$\sigma_M = \pm \frac{M \cdot z}{I_y} = \pm \frac{M}{W_y} \quad \text{met: } W_y = \tfrac{1}{6} bh^2 = 36 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

a Het moment ten gevolge van de q-last en de hierdoor optredende (buig)spanning:

$$M = \tfrac{1}{8} \cdot 10 \cdot 8^2 = 80 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \pm \frac{80 \cdot 10^6}{36 \cdot 10^6} = \pm 2{,}22 \text{ N/mm}^2$$

Het moment ten gevolge van de voorspankracht en de hierdoor optredende (buig)spanning:

$$M = -P_v \cdot e = -100 \cdot 0{,}2 = -20 \text{ kNm}$$

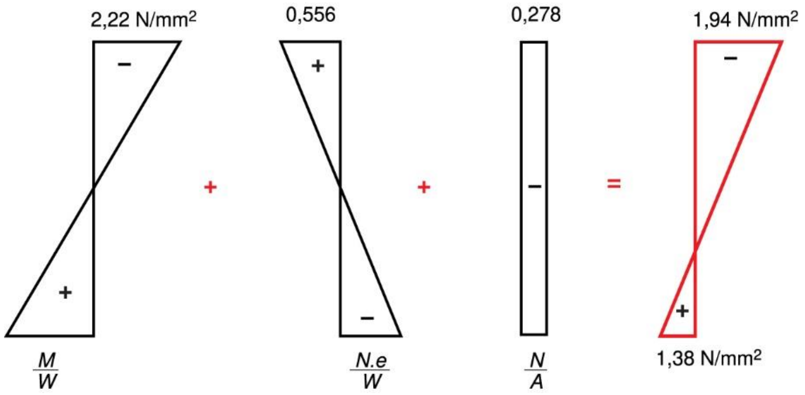
$$\sigma = \pm \frac{20 \cdot 10^6}{36 \cdot 10^6} = \pm 5{,}55 \text{ N/mm}^2$$

De spanning ten gevolge van de normaalkracht:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-100 \cdot 10^3}{600 \cdot 600} = -0{,}278 \text{ N/mm}^2$$

De uiteindelijke spanningen in de uiterste vezels aan de boven- en onderzijde van de balk worden hiermee (zie ook figuur 3.10):

$$\sigma_{\text{boven}} = -2{,}22 + 0{,}555 - 0{,}278 = -1{,}94 \text{ N/mm}^2$$
$$\sigma_{\text{onder}} = +2{,}22 - 0{,}555 - 0{,}278 = +1{,}38 \text{ N/mm}^2$$



Figuur 3.10

b Aan de onderzijde van de ligger is een trekspanning aanwezig. Beton kan geen trek opnemen (scheurt), dus de voorspanning moet zodanig worden aangebracht dat er juist een spanning nul optreedt in de uiterste vezel aan de onderzijde van de balk:

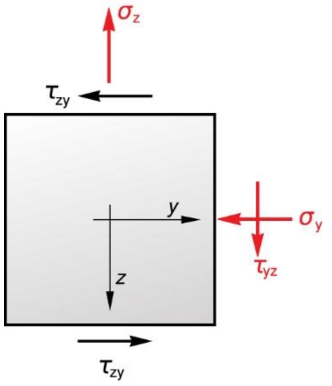
$$\sigma_{\text{onder}} = 2{,}22 - \frac{P_v \cdot 100}{W_y} - \frac{P_v}{A} = 0$$

Uitwerken levert een voorspankracht:

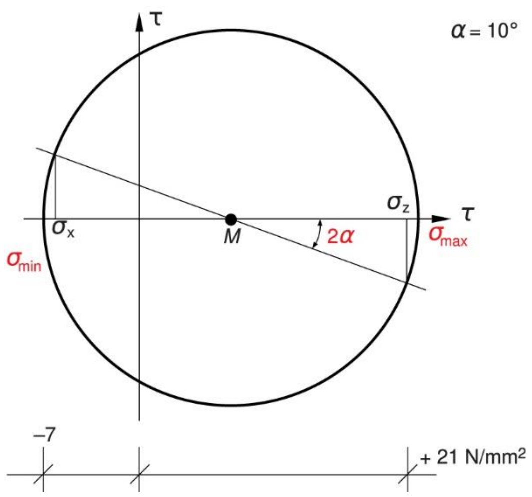
$$P_v = 399{,}6 \text{ kN}$$

Opdracht 16

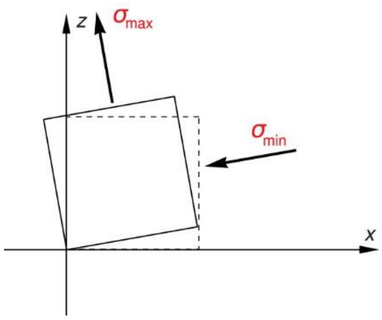
Zie voor de uitwerking figuur 3.11, 3.12 en 3.13.



Figuur 3.11



Figuur 3.12



Figuur 3.13

Hoofdstuk 8 Niet-homogene dwarsdoorsneden

Opdracht 17

De kolom van gewapend beton heeft de volgende gegevens:
$A = 350 \cdot 350\ \text{mm}^2 \Rightarrow A_c = 0{,}96A$; $A_s = 0{,}04A$
$E_c = 28\,500\ \text{N/mm}^2$
$E_s = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{N/mm}^2$

Met deze gegevens kan de kracht in het beton worden bepaald:

$$
\begin{aligned}
F_c &= \frac{E_c \cdot A_c}{E_c \cdot A_c + E_s \cdot A_s} \cdot F \\
&= \frac{28\,500 \cdot 0{,}96 \cdot 350 \cdot 350}{28\,500 \cdot 0{,}96 \cdot 350 \cdot 350 + 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 \cdot 350 \cdot 350} \cdot -800 \cdot 10^3 \\
&= -196{,}5 \cdot 10^3\ \text{N} = -196{,}5\ \text{kN}
\end{aligned}
$$

De spanning in het beton wordt hiermee:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_c} = \frac{-196{,}5 \cdot 10^3}{0{,}96 \cdot 350 \cdot 350} = -1{,}7\ \text{N/mm}^2$$

Op dezelfde wijze kunnen de kracht en de spanning in het staal worden bepaald:

$$
\begin{aligned}
F_s &= \frac{E_s \cdot A_s}{E_c \cdot A_c + E_s \cdot A_s} \cdot F \\
&= \frac{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 \cdot 350 \cdot 350}{28\,500 \cdot 0{,}96 \cdot 350 \cdot 350 + 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 \cdot 350 \cdot 350} \cdot -800 \cdot 10^3 \\
&= -603 \cdot 10^3\ \text{N} = -603{,}5\ \text{kN}
\end{aligned}
$$

De spanning in het staal wordt hiermee:

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{-603{,}5 \cdot 10^3}{0{,}04 \cdot 350 \cdot 350} = -123\ \text{N/mm}^2$$

In beide materialen zit dus een drukspanning. Uiteraard moet de kracht in het beton en het staal samen –800 kN zijn. Het blijkt dat het grootste deel van de belasting door het staal (!) wordt gedragen.

Opdracht 18

a Bepaal de plaats van de neutrale lijn (zie hiervoor figuur 3.14a).

$(ES)_k = (ES)_s$

$E_k S_k = E_s S_s$

$S_k = \dfrac{E_s}{E_k} S_s = n \cdot S_s$

$(50x) \cdot \frac{1}{2} x = \dfrac{2{,}1 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} \cdot (50 \cdot 10) \cdot 5$

$25x^2 = 5250$

$x = 14{,}49$ mm

b Zie figuur 3.14b.

$S_k = \dfrac{E_s}{E_k} S_s$

$(50x) \cdot \frac{1}{2} x = \dfrac{2{,}1 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} \cdot (50 \cdot (40 - x)) \cdot \dfrac{40 - x}{2}$

$25x^2 = 2{,}1 \cdot 25 \cdot (40 - x)^2$

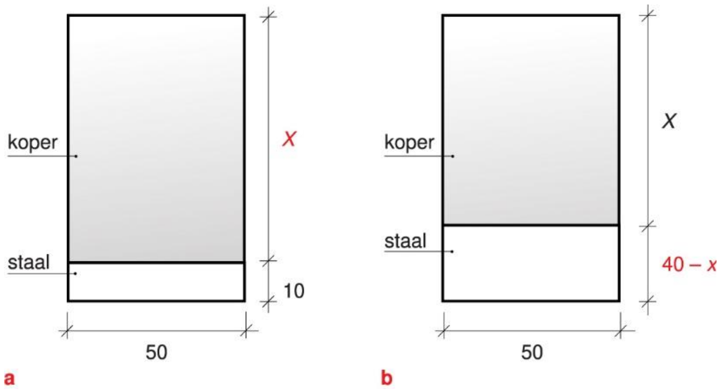
$x^2 = 2{,}1 \cdot (40 - x)^2$

$x^2 = 2{,}1 \cdot (1600 - 80x + x^2)$

$1{,}1x^2 - 168x + 3360 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-168) \pm \sqrt{168^2 - 4 \cdot 1{,}1 \cdot 3360}}{2 \cdot 1{,}1}$

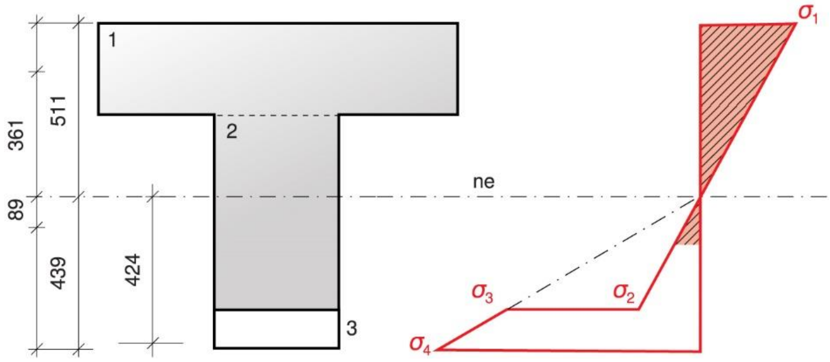
$x_1 = 23{,}67$ mm; $x_2 = 129{,}06$ mm (voldoet niet)



Figuur 3.14

Opdracht 19

De ligging van de neutrale lijn kan worden gevonden door de doorsnede op te delen in basisfiguren.



Figuur 3.15

$A_i = A_1 + A_2 + n \cdot A_3$ met: $n = \dfrac{E_{Ke}}{E_b} = 13{,}1$

$A_i = 300 \cdot 900 + 600 \cdot 300 + n \cdot 300 \cdot 50$

$A_i = 646\,500 \text{ mm}^2$

De ligging van de neutrale lijn ten opzichte van de onderrand kan nu worden gevonden met behulp van:

$$z_{\text{n.l.}} = \frac{(300 \cdot 900) \cdot 800 + (600 \cdot 300) \cdot 350 + 13{,}1 \cdot (300 \cdot 50) \cdot 25}{646\,500} = 439 \text{ mm}$$

Het traagheidsmoment kan nu worden bepaald:

$$I_i = (I_{eigen} + a^2A)_{\text{beton – flens}} + (I_{eigen} + a^2A)_{\text{beton – lijf}} + n \cdot (I_{eigen} + a^2A)_{\text{staal}}$$

$$I_i = \left(\tfrac{1}{12} \cdot 900 \cdot 300^3 + 361^2 \cdot 300 \cdot 900\right) + \left(\tfrac{1}{12} \cdot 300 \cdot 600^3 + 89^2 \cdot 300 \cdot 600\right)$$
$$+ 13{,}1 \cdot \left(\tfrac{1}{12} \cdot 300 \cdot 50^3 + 424^2 \cdot 300 \cdot 50\right)$$
$$= 794 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

De spanningen in het beton en het Kevlar kunnen worden bepaald met:

$$\sigma_{\text{beton}} = \frac{M \cdot e}{I_i}$$

$$\sigma_{\text{Kevlar}} = n \cdot \frac{M \cdot e}{I_i}$$

Voor de spanningen in de punten uit figuur 3.15 worden de volgende waarden gevonden:

$$\sigma_1 = -\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 511}{794 \cdot 10^8} = -0{,}64\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -\frac{100 \cdot 10^6 \cdot (439 - 50)}{794 \cdot 10^8} = 0{,}49\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 13{,}1 \cdot \frac{100 \cdot 10^6 \cdot (439 - 50)}{794 \cdot 10^8} = 6{,}42\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = 13{,}1 \cdot \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 439}{794 \cdot 10^8} = 7{,}24\ \text{N/mm}^2$$

Opdracht 20

Voor het bepalen van de schuifspanning in de lijmverbinding tussen beton en staal van de samengestelde doorsnede die wordt belast met een dwarskracht van 100 kN, moeten de volgende stappen worden doorlopen:

1 Bepaal de ligging van de neutrale lijn.
2 Bepaal I_i.
3 Bepaal het statisch moment van het afgeschoven deel.
4 Bepaal de schuifspanning in de lijmverbinding.

De verhouding van de elasticiteitsmoduli is:

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{2{,}1 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^4} = 21$$

Stap 1
Bepaal de ligging van de neutrale lijn ten opzichte van het zwaartepunt van de stalen plaat. Zie hiervoor figuur 3.16.

$$(ES)_{beton} = (ES)_{staal} \Leftrightarrow S_{beton} = n \cdot S_{staal}$$
$$A_b \cdot z_b = n \cdot A_s \cdot z_s$$

Invullen geeft:

$$(600 \cdot 400) \cdot (330 - x) = 21 \cdot x(60 \cdot 400)$$
$$x = 106{,}45\ \text{mm}$$

Stap 2
Het traagheidsmoment van de samengestelde doorsnede kan nu worden bepaald met:

$$I_\mathrm{i} = (I_\mathrm{eigen} + a^2 \cdot A)_\mathrm{beton} + \mathrm{n} \cdot (I_\mathrm{eigen} + a^2 \cdot A)_\mathrm{staal}$$

$$I_\mathrm{i} = (\tfrac{1}{12} \cdot 400 \cdot 600^3 + (330 \cdot 106{,}45)^2 \cdot 400 \cdot 600)$$

$$+ 21 \cdot (\tfrac{1}{12} \cdot 400 \cdot 60^3 + 106{,}45^2 \cdot 60 \cdot 400)$$

$$= 250{,}56 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Stap 3
Als het betondeel als afschuivend deel wordt beschouwd, kan de schuifspanning in de lijmverbinding worden bepaald met:

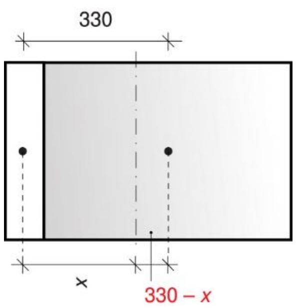
$$\tau = \frac{V \cdot (ES)_\mathrm{beton}}{b \cdot (EI)_\mathrm{totaal}} = \frac{V \cdot E_\mathrm{b} \cdot S_\mathrm{beton}}{b \cdot (E_\mathrm{b} I_\mathrm{b} + E_\mathrm{s} I_\mathrm{s})} = \frac{V \cdot E_\mathrm{b} \cdot S_\mathrm{beton}}{b \cdot E_\mathrm{b} \cdot (I_\mathrm{b} + n \cdot I_\mathrm{s})} = \frac{V \cdot S_\mathrm{beton}}{b \cdot I_\mathrm{i}}$$

Het statisch moment van het afgeschoven deel is:

$$S_\mathrm{beton} = (400 \cdot 600) \cdot (330 - 106{,}45 - 30) = 46\,452\,000 \text{ mm}^3$$

Stap 4
De schuifspanning in de lijmverbinding wordt hiermee:

$$\tau = \frac{V \cdot S_\mathrm{beton}}{b \cdot I_\mathrm{i}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 46\,452\,000}{400 \cdot 250{,}56 \cdot 10^8} = 0{,}46 \text{ N/mm}^2$$



Figuur 3.16

Module 3
Uitwerkingen van de toetsopgaven

Opgave 1

a $F = l_1 \cdot A_1 \cdot p \cdot g = f_m \cdot A_1 \Rightarrow l_1 = 100 \cdot 10^3$ mm
b $l_2 = 80 \cdot 10^3$ mm
c $\Delta l = 392$ mm

Opgave 2

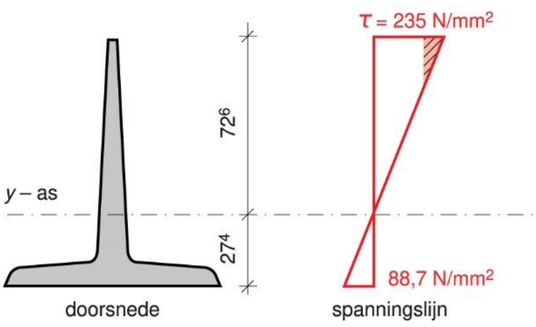
a $F = 84 \cdot 10^3$ N
b $\Delta T = 42{,}8°$

Opgave 3

a $\Delta T = 7{,}9° \rightarrow T_o = 19{,}9°$
b $\sigma = -50{,}55$ N/mm²

Opgave 4

$M_y = 5{,}77$ kNm



Figuur 3.17

Opgave 5

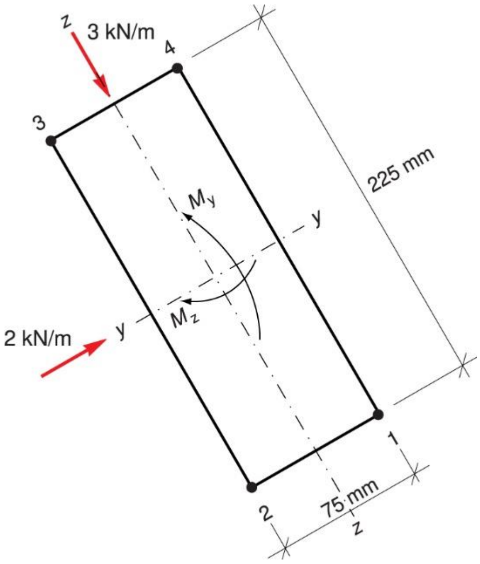
a Ten opzichte van de onderzijde: $y_z = 875$ mm
b $I_y = 872\ 334 \cdot 10^6$ mm⁴

Opgave 6

a $I_y = I_z = 42\ 725{,}6 \cdot 10^6$ mm⁴
b $W_y = 85\ 451 \cdot 10^3$ mm³
c Er mag geen trekspanning in de doorsnede aanwezig zijn: $M = 854{,}5$ kNm.

Opgave 7

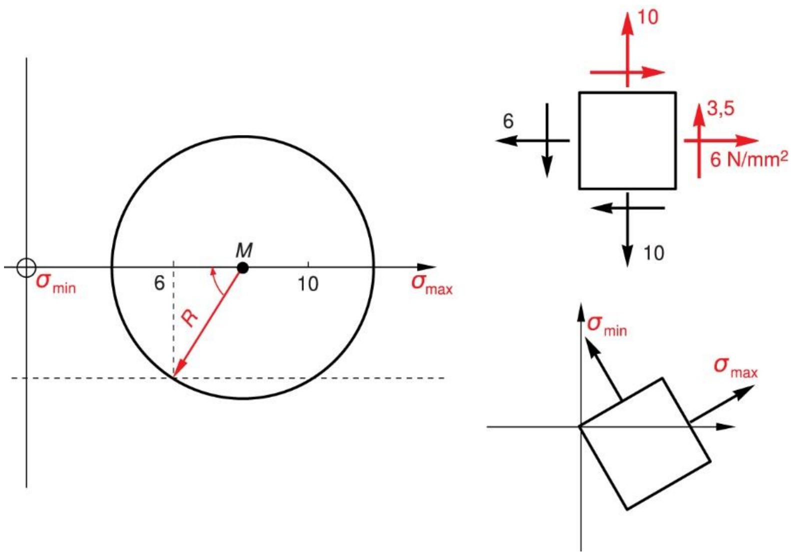
M_y = 3,375 kNm
M_z = 2,25 kNm
σ_1 = 5,33 + 10,667 = 16,0 N/mm^2
σ_2 = 5,33 – 10,667 = –5,3 N/mm^2
σ_3 = –5,33 – 10,667 = –16,0 N/mm^2
σ_4 = –5,33 + 10,667 = 5,3 N/mm^2



Figuur 3.18

Opgave 8

a Zie figuur 3.19.
b De hoofdspanningen zijn:
σ_{min} = 3,97 N/mm^2 en σ_{max} = 12,03 N/mm^2
c Zie figuur 3.19.



Figuur 3.19

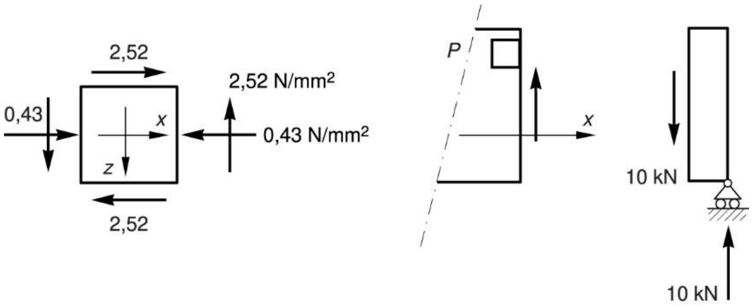
Opgave 9

a V_d = 10 kN; M_d = 1,0 kNm
IPE400: b = 180 mm; t_f = 13,5 mm; t_w = 8,6 mm
$I_y = 23\,128 \cdot 10^4$ mm^4

$$\tau = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (180 \cdot 13{,}5 \cdot 193{,}25 + 8{,}6 \cdot 86{,}5 \cdot 143{,}25)}{8{,}6 \cdot 23128 \cdot 10^4} = 2{,}90 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = -\frac{10 \cdot 0{,}1 \cdot 10^6 \cdot 100}{23128 \cdot 10^4} = -0{,}43 \text{ N/mm}^2$$

De normaalspanning op een vlakje evenwijdig aan de staafas is nul, de schuifspanning heeft dezelfde richting als de dwarskracht op de positieve snede. Zie figuur 3.20.



Figuur 3.20

b Hoofdspanningen en hoofdrichting:

$$\sigma_{min} = -0{,}215 - \sqrt{0{,}215^2 + 2{,}95^2} = -3{,}1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max} = -0{,}215 + \sqrt{0{,}215^2 + 2{,}95^2} = 2{,}7 \text{ N/mm}^2$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2{,}95}{0{,}215} \rightarrow \alpha = 43°$$

Opgave 10

a n = 21, neutrale lijn op 128,5 mm vanaf de bovenzijde van het hout
b Het totale traagheidsmoment van de samengestelde doorsnede:
$I_i = 19\,570 \cdot 10^4$ mm^4

Als de spanning in het hout maatgevend is geldt:

$$M = \frac{12{,}04 \cdot 19570 \cdot 10^4}{128{,}5} = 18{,}3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 18{,}3 \text{ kNm}$$

Als de spanning in het staal maatgevend is geldt:

$$M = \frac{235 \cdot 19570 \cdot 10^4}{21 \cdot (458 - 128{,}5)} = 6{,}6 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 6{,}6 \text{ kNm}$$

Maatgevend is dus een moment van 6,6 kNm waarbij de vloeispanning in het *staal* wordt bereikt.