Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 5 Functieonderzoek: toepassing van de differentiaalrekening

1.

a. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{\left(x^2 + x - 6\right)\cdot 2x - \left(x^2 - 4\right)(2x+1)}{\left(x^2 + x - 6\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 12x - \left(2x^3 - 8x + x^2 - 4\right)}{\left(x^2 + x - 6\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{\left((x+3)(x-2)\right)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x+3)^2(x-2)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}$$

Of: $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{x+2}{x+3}$ en dan differentiëren.

Of: $g(x) = \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{x+3-1}{x+3} = \dfrac{x+3}{x+3} - \dfrac{1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x+3}$ en dan differentiëren.

b. $g'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x+3)^2} = 0$. Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

Voor alle waarden van *x* in het domein van *g* geldt: $g'(x) > 0$. Dus geen tekenwisseling en dus ook geen maxima en/of minima.

c. $g'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} \Rightarrow g''(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^3}$

$g''(x)$ wisselt van teken voor $x = -3$. Maar $g(x)$ bestaat niet voor $x = -3$. Er is dus geen buigpunt in de grafiek van *g* aanwezig.

2.

a. $f(x) = x(\ln x - 2)^2 \Rightarrow$

$$f'(x) = 1\cdot(\ln x - 2)^2 + x\cdot 2\cdot(\ln x - 2)\cdot\frac{1}{x} = (\ln x - 2)^2 + 2\cdot(\ln x - 2) =$$

$$= (\ln x - 2)\left((\ln x - 2) + 2\right) = (\ln x - 2)(\ln x) = (\ln x - 2)\cdot\ln x$$

b. Eerst lossen we op: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln x - 2)\cdot\ln x = 0 \Rightarrow (\ln x = 2) \vee (\ln x = 0) \Rightarrow \left(x = e^2\right) \vee (x = 1)$

$f'(x)$ wisselt van teken voor $x = e^2$ en voor $x = 1$.

Het domein van f en ook van f' is $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) > 0$ voor $0 < x < 1$ en voor $x > e^2$. $f'(x) < 0$ voor $1 < x < e^2$.

Dus is er een maximum $f(1) = 1\cdot(\ln 1 - 2)^2 = (-2)^2 = 4$ is voor $x = 1$ en

Een minimum $f(e^2) = e^2 \cdot \left(\ln\left(e^2\right) - 2\right)^2 = e^2(2 - 2)^2 = 0$ is voor $x = e^2$

c. $f'(x) = (\ln x - 2)\cdot\ln x \Rightarrow$

$$f''(x) = (\ln x - 2)'\cdot\ln x + (\ln x - 2)\cdot(\ln x)'$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\ln x + (\ln x - 2)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cdot(2\ln x - 2) = \frac{2}{x}\cdot(\ln x - 1)$$

d. $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x}(\ln x - 1) \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

Het domein van f'' is $\mathbb{R}^+$.

$f''(x) < 0$ voor $0 < x < e$. $f''(x) > 0$ voor $x > e$.

$f''(x)$ wisselt van teken (van negatief naar positief) voor $x = e$.

Er is dus een hol-bol (concaaf-convex) buigpunt $(e, f(e)) = (e, e)$.

e. In een buigpunt gaat de grafiek over van steeds sterker stijgend naar zwakker stijgend of andersom. Of van steeds zwakker dalend naar sterker dalend of andersom.

In bovenstaand geval gaat de grafiek in het buigpunt (e, e) over van steeds sterker dalend naar zwakker dalend.

3.

a $y = f(x) = e^x\cos(x) \Rightarrow$

$$f'(x) = \left(e^x\right)'\cdot\cos(x) + e^x\cdot\left(\cos(x)\right)'$$
$$= e^x\cdot\cos(x) + e^x\cdot\left(-\sin(x)\right) = e^x\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$$

b We bepalen eerst de nulpunten van f':

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = 0 \Rightarrow \left(e^x = 0\right) \vee \left(\cos(x) - \sin(x)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(x) = \sin(x) \Rightarrow x = \tfrac{1}{4}\pi + k\cdot\pi, \text{ met } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\text{domein: } \left[-\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right]\right) x = \tfrac{1}{4}\pi$$

$f'(x) > 0$ voor $-\frac{1}{4}\pi \le x < \frac{1}{4}\pi$ en $f'(x) < 0$ voor $\frac{1}{4}\pi < x \le \frac{3}{4}\pi$

f is dus stijgend op het interval $\left[-\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{4}\pi\right\rangle$ en dalend op $\left\langle\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right]$.

c f' is positief voor $x = -\tfrac{1}{4}\pi$, wisselt van positief naar negatief voor $x = \tfrac{1}{4}\pi$ en is negatief voor $x = \tfrac{3}{4}\pi$. Dat geeft de volgende (rand-)extremen.

Randminimum $f(-\tfrac{1}{4}\pi) = e^{-\frac{1}{4}\pi}\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}\sqrt{2} \approx 0{,}322$ voor $x = -\tfrac{1}{4}\pi$;

Lokaal maximum $f(\tfrac{1}{4}\pi) = e^{\frac{1}{4}\pi}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\pi}\sqrt{2} \approx 1{,}551$ voor $x = \tfrac{1}{4}\pi$.

Randminimum $f(\tfrac{3}{4}\pi) = e^{\frac{3}{4}\pi}\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2} \approx -7{,}460$ voor $x = \tfrac{3}{4}\pi$.

d Eerst bepalen we f'': $f'(x) = e^{x}\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right) \Rightarrow$

$$f''(x) = \left(e^{x}\right)'\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right) + e^{x}\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right)' =$$
$$= e^{x}\cdot\left(\cos(x) - \sin(x)\right) + e^{x}\cdot\left(-\sin(x) - \cos(x)\right) = -2e^{x}\sin(x)$$

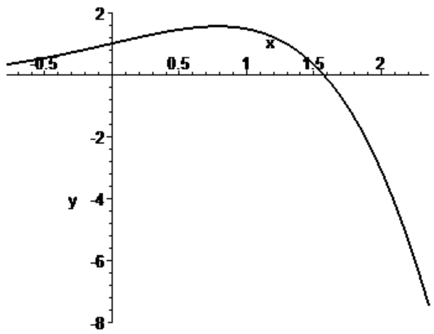
We bepalen de nulpunten van f'':

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2e^{x}\sin(x) = 0 \Rightarrow \left(e^{x} = 0\right)\vee\left(\sin(x) = 0\right) \Rightarrow \left(\text{domein: } \left[-\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right]\right) x = 0$$

f'' wisselt van teken bij $x = 0$ en wel van negatief naar positief.

De grafiek van *f* heeft dus een concaaf-convex (hol-bol) buigpunt: $\left(0, f(0)\right) = (0,1)$

e Schets van de grafiek van *f*.:



4.

a Vanwege de logaritme is het domein $\mathbb{R}^{+}$ (positieve reële getallen).

Voor onderstaande herschrijven we $f(x)$:

$$f(x) = \ln^{3}(x) - \ln(x) = \ln(x)\left(\ln^{2}(x) - 1\right)$$

Een kandidaat voor een verticale asymptoot is $x = 0$.

We bepalen $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left(\ln^3(x) - \ln(x)\right)$$
$$= \lim_{x\downarrow 0}\left(\ln(x)\cdot\left(\ln^2(x)-1\right)\right) = -\infty\cdot\left((-\infty)^2-1\right) = -\infty\cdot\infty = -\infty$$

Er is dus sprake van de verticale asymptoot $x = 0$ (naar beneden).

Om na te gaan of er sprake is van een horizontale asymptoot bepalen we $\lim_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln^3(x) - \ln(x)\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\ln(x)\cdot\left(\ln^2(x)-1\right)\right) = \infty\cdot\left(\infty^2-1\right) = \infty\cdot\infty = \infty$$

Er is dus geen horizontale asymptoot aanwezig.

b Eerst bepalen we f':

$$f(x) = \ln^3(x) - \ln(x) = \left(\ln(x)\right)^3 - \ln(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3\left(\ln(x)\right)^2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2(x)-1}{x}$$

We berekenen de nulpunten van f':

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3\ln^2(x)-1}{x} = 0 \Rightarrow 3\ln^2(x)-1 = 0 \Rightarrow \ln^2(x) = \tfrac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\ln(x) = -\sqrt{\tfrac{1}{3}} \vee \ln(x) = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \Rightarrow \ln(x) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \vee \ln(x) = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$x = e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}} \vee x = e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 0{,}561 \vee x \approx 1{,}781$$

In beide berekende nulpunten wisselt van f' van teken: bij $x = e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}} \approx 0{,}561$ van positief naar negatief en bij $x = e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \approx 1{,}781$ van negatief naar positief. Dit geeft de volgende extreme waarden:

Lokaal maximum :

$$f\left(e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) = \ln^3\left(e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) - \ln\left(e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) = \left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3 - \left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \tfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0{,}385 \text{ voor}$$

$x = e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}} \approx 0{,}561$.

Lokaal minimum:

$$f\left(e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) = \ln^3\left(e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right) = \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) = -\tfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx -0{,}385 \text{ voor}$$

$x = e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \approx 1{,}781$.

c Eerst bepalen we f'':

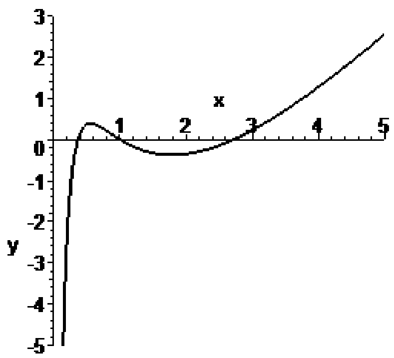
$$f'(x) = \frac{3\ln^2(x) - 1}{x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{x \cdot \left(3\ln^2(x) - 1\right)' - \left(3\ln^2(x) - 1\right) \cdot x'}{x^2}$$

$$= \frac{x \cdot \left(3 \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 0\right) - \left(3\ln^2(x) - 1\right) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{6\ln(x) - 3\ln^2(x) + 1}{x^2} = -\frac{3\ln^2(x) - 6\ln(x) - 1}{x^2}$$

d Schets de grafiek van *f*.



e Het bereik van *f* is $\mathbb{R}$

5.

a Domein van f.

Vanwege de logaritme: $x > 0$. Vanwege de noemer: $\ln(x) \neq -1$ en dus $x \neq \frac{1}{e}$.

Dus: $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{e}\right\}$;

Andere notatie: $D_f = \left\langle 0, \frac{1}{e}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{e}, \infty\right\rangle = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(0 < x < \frac{1}{e}\right) \vee \left(x > \frac{1}{e}\right)\right\}$.

Kandidaten voor verticale asymptoot: $x = 0$ en $x = \frac{1}{e}$.

Bijbehorende limieten:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \left(\frac{0^+}{1 - \infty}\right) = 0^-$$. Dus geen verticale asymptoot bij $x = 0$.

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \uparrow \frac{1}{e}} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \left(\frac{\frac{1}{e}}{1 + \left(-1^-\right)} = \frac{e^{-1}}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{e}} \frac{x}{1 + \ln(x)} = \left(\frac{\frac{1}{e}}{1 + \left(-1^+\right)} = \frac{e^{-1}}{0^+}\right) = +\infty$$

Er is dus een verticale asymptoot $x = \frac{1}{e}$; van zowel links als rechts.

b We bepalen de afgeleide van *f*.

$$f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\big(1+\ln(x)\big)\cdot 1 - x\cdot\left(0+\frac{1}{x}\right)}{\big(1+\ln(x)\big)^2} = \frac{1+\ln(x)-1}{\big(1+\ln(x)\big)^2} = \frac{\ln(x)}{\big(1+\ln(x)\big)^2}.$$

$f'(x)$ bestaat overal op het domein van *f*.

$f'(x) = 0$ als $\ln(x) = 0$, dus als $x = 1$.

Tekenverloop van $f'(x)$:

Voor $0 < x < \frac{1}{e}$ en voor $\frac{1}{e} < x < 1$ geldt: $f'(x) < 0$ en voor $x > 1$ geldt: $f'(x) > 0$.

Er is een (lokaal) minimum $f(1) = \dfrac{1}{1+\ln(1)} = 1$ voor $x = 1$.

c We bepalen de tweede afgeleide van *f*.

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\big(1+\ln(x)\big)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\big(1+\ln(x)\big)^2\cdot\frac{1}{x} - \ln(x)\cdot 2\big(1+\ln(x)\big)\cdot\left(0+\frac{1}{x}\right)}{\big(1+\ln(x)\big)^4}$$

$$= \frac{\big(1+\ln(x)\big)\Big(\big(1+\ln(x)\big)\cdot\frac{1}{x} - 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\Big)}{\big(1+\ln(x)\big)^4} = \frac{1+\ln(x)-2\ln(x)}{x\big(1+\ln(x)\big)^3} = \frac{1-\ln(x)}{x\big(1+\ln(x)\big)^3}$$

$f''(x)$ bestaat overal op het domein van *f*.

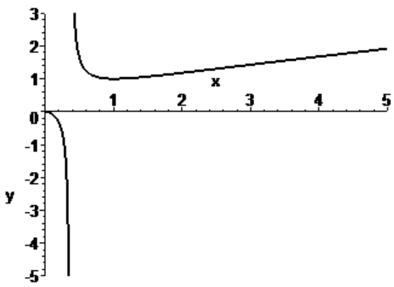
$f''(x) = 0$ als $\ln(x) = 1$, dus als $x = e$.

Tekenverloop van $f''(x)$:

Voor $0 < x < \frac{1}{e}$ geldt: $f''(x) < 0$; voor $\frac{1}{e} < x < e$ geldt: $f''(x) > 0$ en voor $x > e$ geldt: $f''(x) < 0$.

Het punt $\big(e, f(e)\big) = \left(e, \frac{1}{2}e\right)$ is een bol-hol (convex-concaaf) buigpunt.

d Schets de grafiek van *f*.



e Het bereik van f is $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle = \langle -\infty, 0\rangle \cup [1,\infty\rangle = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0 \vee y \geq 1\}$

6.

Voor de genoemde omtrek *L* van rechthoek PQOR geldt: $L = \mathrm{PQ} + \mathrm{QO} + \mathrm{OR} + \mathrm{RP}$

We kiezen het punt P: $\mathrm{P}(a,b)$.

Q op de X-as, dus $y_\mathrm{Q} = 0$, PQ evenwijdig aan de Y-as, dus $x_\mathrm{Q} = x_\mathrm{P} = a$, dus Q is $\mathrm{Q}(a,0)$.

R op de Y-as, dus $x_\mathrm{R} = 0$, PR evenwijdig aan de Y-as, dus $y_\mathrm{R} = y_\mathrm{P} = b$, dus R is $\mathrm{R}(0,b)$.

O is de oorsprong, dus O is O(0,0).
Voor de omtrek *L* geldt dan: $L = \mathrm{PQ} + \mathrm{QO} + \mathrm{OR} + \mathrm{RP} = b + a + b + a = 2a + 2b$.

Het punt $\mathrm{P}(a,b)$ ligt op de grafiek van f, dus: $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ligt, geldt: $b = \dfrac{1}{a^2}$.

Daarmee geldt voor de omtrek *L*: $L(a) = 2a + 2 \cdot \dfrac{1}{a^2} = 2a + \dfrac{2}{a^2}$

We bepalen de afgeleide van *L*.

$L(a) = 2a + \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow L'(a) = 2 - \dfrac{4}{a^3}$

$L'(a) = 0 \Rightarrow 2 - \dfrac{4}{a^3} = 0 \Rightarrow 2 = \dfrac{4}{a^3} \Rightarrow 2a^3 = 4 \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$

Voor deze waarde van *a* wisselt $L'(a)$ van teken; van negatief naar positief.

L heeft dus een minimale waarde voor $a = \sqrt[3]{2}$.

Deze minimale waarde is $L\left(\sqrt[3]{2}\right) = 2\sqrt[3]{2} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}^{\,2}} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \approx 3{,}780$.

7.

Voor de afstand *d* van een punt (x, y) tot de oorsprong $O(0,0)$ geldt: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Het punt (x, y) ligt op de grafiek van de gegeven functie, dus er geldt: $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Daarmee geldt voor de afstand *d* : $d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4}}$.

We bepalen de afgeleide van *d*:

$d(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4}} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$d'(x) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + x^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2x - 4x^{-5}\right) = \dfrac{x - 2x^{-5}}{\sqrt{x^2 + x^{-4}}} = \dfrac{x^6 - 2}{x^5\sqrt{x^2 + x^{-4}}}$

$d'(x) = 0 \Rightarrow x^6 - 2 = 0 \Rightarrow x^6 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[6]{2} \vee x = -\sqrt[6]{2}$.

Er is gegeven: $x > 0$. Dus $x = \sqrt[6]{2}\ (\approx 1{,}1225)$.

Voor deze waarde wisselt $d'(x)$ van teken en wel van negatief naar positief.

Bij $x = \sqrt[6]{2}$ is er dus sprake van een minimum.
De minimale afstand is

$$d\left(\sqrt[6]{2}\right)=\sqrt{\sqrt[6]{2}^{2}+\frac{1}{\sqrt[6]{2}^{4}}}=\left(2^{\frac{2}{6}}+2^{-\frac{4}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\left(1+2^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 1,3747$$

Of (korter)

$$d\left(\sqrt[6]{2}\right)\approx d(1,1225)=\sqrt{1,1225^{2}+\frac{1}{1,1225^{4}}}\approx 1,3747$$

8.

We noemen de lengte van de zijden van de rechthoek x en *y*.
Voor de oppervlakte *A* geldt dan: $A = x\cdot y$
De omtrek is 20 cm, dus er geldt: $2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$.
Dit invullen in *A* geeft: $A=A(x)=x\cdot(10-x)=10x-x^2$
We bepalen de afgeleide van *A*:

$A(x)=10x-x^2 \Rightarrow A'(x)=10-2x$

$A'(x)=0 \Rightarrow 10-2x=0 \Rightarrow x=5$

Voor $x=5$ wisselt $A'(x)$ van teken; van positief naar negatief.

$A(x)$ heeft dus een maximum voor $x=5$.

De afmetingen van de rechthoek zijn dan 5 bij 5 cm (het is een vierkant).
De bijbehorende maximale oppervlakte is $A(5)=5\cdot 5=25\text{ cm}^2$.

9.

De bodem van de kist is vierkant. De zijden van de bodem noemen we *x*. De hoogte van de kist noemen we *y*.
Voor de inhoud *V* van de kist geldt: $V = x^2\cdot y$.
De oppervlakte van de vier opstaande zijden is in totaal 4*xy*. De kosten daarvan zijn $4xy\cdot 6 = 24xy$ euro.
De oppervlakte van de bodem is x^2. De kosten ervan zijn $x^2\cdot 8 = 8x^2$ euro.
De totale kosten zijn dus $24xy+8x^2$ euro.
Er is gegeven dat de totale kosten voor het materiaal 96 euro mogen bedragen.

Er geldt dus: $24xy+8x^2=96 \Rightarrow 24xy=96-8x^2 \Rightarrow y=\dfrac{96-8x^2}{24x}=\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{3}x$.

Dit invullen in *V* geeft: $V=x^2\cdot y=x^2\cdot\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{3}x\right)=4x-\dfrac{1}{3}x^3$.

We bepalen de afgeleide van $V=V(x)$.

$V(x)=4x-\dfrac{1}{3}x^3 \Rightarrow V'(x)=4-x^2$

$V'(x)=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$. Omdat lengten positief zijn vervalt $x=-2$. Dus $x=2$ blijft als enige oplossing over.
Voor $x=2$ wisselt V' van teken; van positief naar negatief.
$V(x)$ heeft dus een maximum voor $x=2$.

De gevraagde maximale waarde voor de inhoud van de kist is

$$V(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = 8 - \frac{8}{3} = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

De bijbehorende afmetingen zijn: zijden van de bodem: $x = 2\ \mathrm{m}$ en opstaande zijde: $y = \frac{4}{x} - \frac{1}{3}x = \frac{4}{2} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\ \mathrm{m} \approx 1{,}33\ \mathrm{m}$.

10.

We noemen de straal van het grondvlak van het blikje *r.*
De oppervlakte van het cirkelvormige grondvlak is dan πr^2.
De hoogte noemen we *h*.
De oppervlakte van de zijwand van het blikje is: $(\text{omtrek grondvlak}) \cdot \text{hoogte} = 2\pi r \cdot h$.
Voor de totale oppervlakte *A* van het blikje geldt dan: $A = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$.
De inhoud van het blikje is $\pi r^2 h$. Gegeven is dat de inhoud $36\ \mathrm{cl} = 360\ \mathrm{cm}^3$ is.
Er geldt dus $\pi r^2 h = 360 \Rightarrow h = \frac{360}{\pi r^2}$.
Dit invullen in *A* geeft: $A = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{360}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{720}{r}$.
We bepalen de afgeleide van $A = A(r)$:

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{720}{r} \Rightarrow A'(r) = 2\pi r - \frac{720}{r^2}.$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{720}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{720}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{360}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}} \approx 4{,}857$$

Voor $r = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}$ wisselt A' van teken; van negatief naar positief.

$A(r)$ heeft dus een minimum voor $r = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}$.

De gevraagde straal is dus $r = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}} \approx 4{,}857\ \mathrm{cm}$.

Voor de bijbehorende hoogte *h* geldt:

$$h = \frac{360}{\pi r^2} = \frac{360}{\pi \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}^{2}} = \frac{360}{\pi \cdot 360^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}} = \frac{360^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}} \approx 4{,}857\ \mathrm{cm}\ .$$

De minimale oppervlakte is:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}\right) = \pi \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}^{2} + \frac{720}{\sqrt[3]{\frac{360}{\pi}}} = \pi \cdot \frac{360^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} + 2 \cdot 360 \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{360^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 360^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} 360^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} 360^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{360^2 \cdot \pi} \approx 222{,}35\ \mathrm{cm}^2$$

11.

Ter oriëntatie rekenen we twee voor de hand liggende scenario's door.:
Eerst bij de centrale loodrecht de rivier oversteken en dan over land naar de fabriek (of andersom) kost $300 \cdot 50 + 1000 \cdot 40 = 15000 + 40000 = 55000$ euro.

In een rechte lijn van de centrale naar de fabriek kost:

$\sqrt{300^2 + 1000^2} \cdot 50 = \sqrt{1090000} \cdot 50 = 5000\sqrt{109} \approx 52201,53$.

De minimale kosten zullen lager moeten zijn.

Nu op zoek naar de gevraagde minimale kosten.
We gaan er van uit dat de kabel vanaf de centrale eerst $1000 - x$ meter over land gaat en dan schuin de rivier oversteekt naar de fabriek.
Voor de kosten *K* geldt dan:

$K(x) = (1000 - x) \cdot 40 + \sqrt{x^2 + 300^2} \cdot 50 = 40000 - 40x + 50\sqrt{x^2 + 90000}$

We zoeken naar een minimum voor *K*. Daarom bepalen we de afgeleide van *K*.

$K(x) = 40000 - 40x + 50\sqrt{x^2 + 90000} \Rightarrow$

$K'(x) = 0 - 40 + 50\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 90000}} \cdot 2x = \dfrac{50x}{\sqrt{x^2 + 90000}} - 40$

$K'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{50x}{\sqrt{x^2 + 90000}} = 40 \Rightarrow 50x = 40\sqrt{x^2 + 90000} \Rightarrow 5x = 4\sqrt{x^2 + 90000}$

We kwadrateren links en rechts en krijgen dan:

$25x^2 = 16\left(x^2 + 900000\right) \Rightarrow 9x^2 = 16 \cdot 9000 \Rightarrow x^2 = 160000 \Rightarrow x = 400$ (de oplossing $x = -400$ is onwaarschijnlijk)

Bij $x = 400$ wisselt $K'(x)$ van teken: van negatief naar positief.

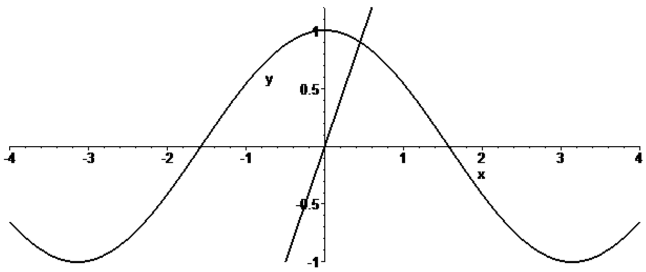
K gaat dus van dalend naar stijgend. Er is bij $x = 400$ dus sprake van een minimale waarde van *K*. Dan loopt de kabel dus eerst $1000 - 400 = 600\text{ m}$ over land en daarna steekt de kabel schuin over naar de fabriek.
De bijbehorende minimale waarde voor de kosten is:

$K(400) = 40000 - 40 \cdot 400 + 50\sqrt{400^2 + 90000} = 49000$ euro.

Dit is inderdaad lager dan de eerder ter oriëntatie berekende kosten.

12.

a. Schets van de grafieken van de $y = 2x$ en $y = \cos(x)$.



Het snijpunt ligt in de buurt van $x = 0,5$. Voor de startwaarde van een iteratief benaderingsproces kan gekozen worden voor 0,5.

b. We kiezen het interval $[0; 0,8]$.

c. We benaderen via de methode van bisectie het nulpunt van de functie *f* in één decimaal nauwkeurig uitgaande van het gekozen interval

$f(0) = -0 + 1 = 1$

$f(0,8) \approx \cos(0,8) - 2 \cdot 0,8 \approx -0,90$

α ligt tussen 0 en 0,8. Het *midden* is 0,4.

$f(midden) = f(0,4) \approx \cos(0,4) - 2 \cdot 0,4 \approx 0,12 > 0$

Dus α ligt tussen 0,4 en 0,8. Het *midden* is 0,6.

$f(midden) = f(0,6) \approx \cos(0,6) - 2 \cdot 0,6 \approx -0,37 < 0$

Dus α ligt tussen 0,4 en 0,6. Het *midden* is 0,5.

$f(midden) = f(0,5) \approx \cos(0,5) - 2 \cdot 0,5 \approx -0,12 < 0$

Dus α ligt tussen 0,4 en 0,5. Het *midden* is 0,45.

$f(midden) = f(0,45) \approx \cos(0,45) - 2 \cdot 0,45 \approx 0,00045 > 0$

Dus α ligt tussen 0,45 en 0,5. In één decimaal geldt dus: $\alpha = 0,5$

d. De iteratiefunctie *g* voor het NR-proces is:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos(x) - 2x}{-\sin(x) - 2} =$$

$$= x + \frac{\cos(x) - 2x}{\sin(x) + 2} = \frac{x(\sin(x) + 2) + \cos(x) - 2x}{\sin(x) + 2} = \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + 2}$$

Het bedoelde NR-proces is dan:

$$\begin{cases} x_0 = 0,5 \\ x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{x_n \sin(x_n) + \cos(x_n)}{\sin(x_n) + 2} \end{cases}$$

Dit geeft de volgende benaderingen (in 6 decimalen nauwkeurig):

$x_0 = 0,5$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0 \sin(x_0) + \cos(x_0)}{\sin(x_0) + 2} = \frac{0,5 \cdot \sin(0,5) + \cos(0,5)}{\sin(0,5) + 2} \approx 0,450626$$

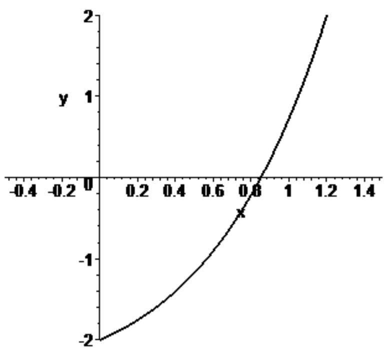
$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1 \sin(x_1) + \cos(x_1)}{\sin(x_1) + 2} \approx 0,450184$$

$x_3 = g(x_2) \approx 0,450184$

De eerste 5 decimalen veranderen niet. We concluderen: $\alpha \approx 0,450184$.

13.

a. Schets van de grafiek van *f.*



α ligt tussen 0,8 en 1,0, dus zeker tussen 0 en 1,6.

b. We benaderen α in één decimaal nauwkeurig via de methode van bisectie.

$f(0) = 0 - 2 = -2 < 0$

$f(1,6) \approx 5,92 > 0$

Dus α ligt tussen 0 en 1,6. Het *midden* is 0,8.

$f\left(midden\right)=f(0{,}8)\approx -0{,}22<0$

Dus α ligt tussen 0,8 en 1,6. Het *midden* is 1,2.

$f\left(midden\right)=f(1{,}2)\approx 1{,}98>0$

Dus α ligt tussen 0,8 en 1,2. Het *midden* is 1,0.

$f\left(midden\right)=f(1{,}0)\approx 0{,}72>0$

Dus α ligt tussen 0,8 en 1,0. Het *midden* is 0,9.

$f\left(midden\right)=f(0{,}9)\approx 0{,}21>0$.

Dus α ligt tussen 0,8 en 0,9. Het *midden* is 0,85.

$f\left(midden\right)=f(0{,}85)\approx -0{,}01<0$

Dus α ligt tussen 0,85 en 0,9. In één decimaal nauwkeurig is α dus gelijk aan 0,9

c. De iteratiefunctie *g* voor het Newton-Raphson-proces is:

$$g\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=x-\frac{xe^x-2}{e^x+xe^x}=\frac{x\left(e^x+xe^x\right)}{e^x+xe^x}-\frac{xe^x-2}{e^x+xe^x}=\frac{xe^x+x^2e^x-xe^x+2}{e^x+xe^x}=\frac{2+x^2e^x}{e^x\left(1+x\right)}$$

Het bedoelde Newton-Raphson -proces is dan:

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=g\left(x_n\right)=\dfrac{2+{x_n}^2e^{x_n}}{e^{x_n}\left(1+x_n\right)} \end{cases}$$

Dit geeft de volgende benaderingen:

$x_0=1$.

$x_1=g\left(x_0\right)=\dfrac{2+{x_0}^2e^{x_0}}{e^{x_0}\left(1+x_0\right)}=\dfrac{2+1^2e^1}{e^1\left(1+1\right)}=\dfrac{2+e}{2e}\approx 0{,}86788$ (afgerond op 3 decimalen: 0,868).

$x_2=g\left(x_1\right)=\dfrac{2+{x_1}^2e^{x_1}}{e^{x_1}\left(1+x_1\right)}\approx 0{,}85278$ (afgerond op 3decimalen: 0,853).

$x_3=g\left(x_2\right)\approx 0{,}85261$(afgerond op 3decimalen: 0,853)

De afronding op 3 decimalen verandert niet. We concluderen: $\alpha\approx 0{,}853$.

14.

a. $\sqrt{3}$ is oplossing van de vergelijking $x^2=3$; dus van de vergelijking $x^2-3=0$.

We zoeken naar het positieve nulpunt van de functie met voorschrift $f\left(x\right)=x^2-3$.

De iteratiefunctie *g* voor het Newton-Raphson -proces is:

$$g\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=x-\frac{x^2-3}{2x}=\frac{x\cdot 2x-\left(x^2-3\right)}{2x}=\frac{x^2+3}{2x}$$

Het bedoelde Newton-Raphson -proces is dan:

$$\begin{cases} x_0=2 \\ x_{n+1}=g\left(x_n\right)=\dfrac{{x_n}^2+3}{2x_n} \end{cases}$$

We benaderen $\sqrt{3}$ is 5 decimalen en ronden de resultaten af op 6 decimalen

$x_0=2$

$x_1=g\left(x_0\right)=\dfrac{{x_0}^2+3}{2x_0}=\dfrac{2^2+3}{2\cdot 2}=\dfrac{7}{4}=1{,}75$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1^{\ 2}+3}{2x_1} = \frac{1,75^2+3}{2\cdot 1,75} \approx 1,732143$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{x_2^{\ 2}+3}{2x_2} \approx 1,732051$$

$$x_4 = g(x_3) \approx 1,732051$$

De eerste 5 decimalen veranderen niet. We concluderen: $\alpha \approx 0,73205$.

b. $\sqrt[5]{400}$ is oplossing van de vergelijking $x^5 = 400$; dus van de vergelijking $x^5 - 400 = 0$.

We zoeken naar het nulpunt van de functie met voorschrift $f(x) = x^5 - 400$.

De iteratiefunctie *g* voor het Newton-Raphson -proces is:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5-400}{5x^4} = \frac{x\cdot 5x^4 - (x^5-400)}{5x^4} = \frac{4x^5+400}{5x^4}$$

Het bedoelde Newton-Raphson -proces is dan:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{4x^5+400}{5x^4} \end{cases}$$

We benaderen $\sqrt[5]{400}$ is 5 decimalen en ronden de resultaten af op 6 decimalen

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{4x_0^{\ 5}+400}{5x_0^{\ 4}} = \frac{4\cdot 3^5+400}{5\cdot 3^4} = \frac{1372}{495} \approx 3,387654$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{4x_1^{\ 5}+400}{5x_1^{\ 4}} \approx 3,317550$$

$$x_3 = g(x_2) \approx 3,314460$$

$$x_4 = g(x_3) \approx 3,314454$$

$$x_5 = g(x_4) \approx 3,314454$$

De eerste 5 decimalen veranderen niet. We concluderen: $\sqrt[5]{400} \approx 3,31445$.