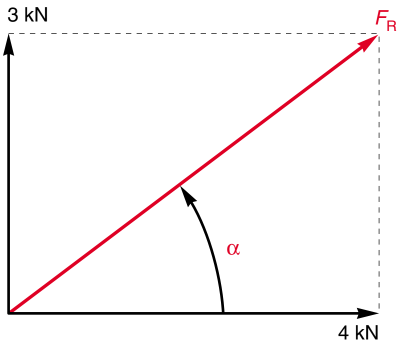
Module 1
Uitwerkingen van de opdrachten

Opdracht 1

Uitwerking
Bepaal de resultante in horizontale en verticale richting:
$\Sigma F_H = 0$
$-2 + 6 = 4$ kN dus naar rechts ($\rightarrow$)
$\Sigma F_V = 0$
$-4 + 1 = -3$ kN dus omhoog ($\uparrow$)



Figuur 1.1

De resultante wordt m.b.v. de stelling van Pythagoras bepaald:

$$F_R = \sqrt{\Sigma F_H^2 + \Sigma F_V^2}$$

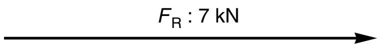
$F_R = \sqrt{\Sigma\, 4^2 + -3^2 = 5 \text{ kN}}$, dit antwoord was al eerder te zien door gebruik te maken van de 3-4-5 steek.
De richting wordt bepaald door de resultante van de twee richtingen te tekenen.

$$\alpha = \arctan(3/4) = 36{,}87°$$

Opdracht 2

Uitwerking
Bepaal de resultante in horizontale en verticale richting:
Als eerste dienen de krachten in de horizontale en verticale richting ontbonden te worden.
Ontbinding in horizontale richting: $7\sqrt{2} \cdot \cos\alpha = 7$ kN
Ontbinding in verticale richting: $7\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = 7$ kN

$\Sigma F_H = 0$
7 kN
$\Sigma F_V = 0$
$-7 + 7 = 0$, de krachten zijn tegengesteld en even groot.



Figuur 1.2

De resultante is direct af te lezen n.l. $\Sigma F_H = F_R = 7$ kN
$\alpha = \text{arc tan}\ (0/74) = 0°$

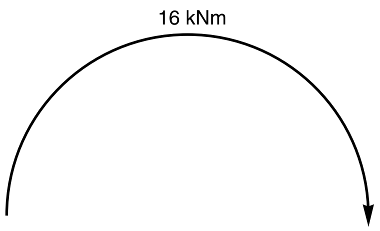
Opdracht 3

Uitwerking
Als eerste dienen de krachten in de horizontale en verticale richting ontbonden te worden.
Ontbinding in horizontale richting: $2 \cdot \cos \alpha = -\sqrt{2}$ kN
Ontbinding in verticale richting: $2 \cdot \cos \alpha = \sqrt{2}$ kN

Bepaal de momentensom t.o.v. O

$$\sum T_O = -(4\ \text{kN} \cdot 3\ \text{m}) + (\sqrt{2}\ \text{kN} \cdot 2\ \text{m}) - (\sqrt{2}\ \text{kN} \cdot 2\ \text{m}) - (5\ \text{kN} \cdot 2\ \text{m}) + (3\ \text{kN} \cdot 2\ \text{m}) = -16\ \text{kNm}$$
(draait dus rechtsom)

Opmerking: De werklijn van de 2 kN kracht gaat door O, deze kracht levert dus geen moment t.o.v. O.



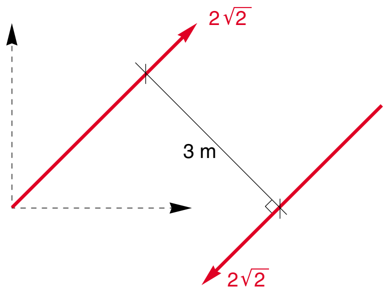
Figuur 1.3

Opdracht 4

Uitwerking
a geen krachtenevenwicht;
b geen krachtenevenwicht;
c evenwicht van krachten, en arm tussen de twee krachten.

$$T = -2\sqrt{2}\ \text{kN} \cdot 3\ \text{m} = -6\sqrt{2}\ \text{kNm}.$$

Draairichting is rechtsom, dus negatief. (zie figuur 1.4)



Figuur 1.4

Opdracht 5

Uitwerking
Als eerste dienen de krachten in de horizontale en verticale richting ontbonden te worden.
Kracht: $4\sqrt{2}$ kN
Ontbinding in horizontale richting: $4\sqrt{2}$ kN $\cdot \cos \alpha = -4$ kN
Ontbinding in verticale richting: $4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = -4$ kN
Kracht: 5 kN (3-4-5 steek)
Ontbinding in horizontale richting: 4 kN
Ontbinding in verticale richting: 3 kN

Bepaal de resultante in horizontale en verticale richting:
$\Sigma F_H = 0$
$-4 + 3 + 4 = 3$ kN
$\Sigma F_V = 0$
$-4 + 3 = -1$

De resultante wordt m.b.v. de stelling van Pythagoras bepaald:

$$F_R = \sqrt{\sum F_H^2 + \sum F_V^2}$$

$$F_R = \sqrt{\sum 3^2 + -1^2} = \sqrt{10}\ \text{kN}$$

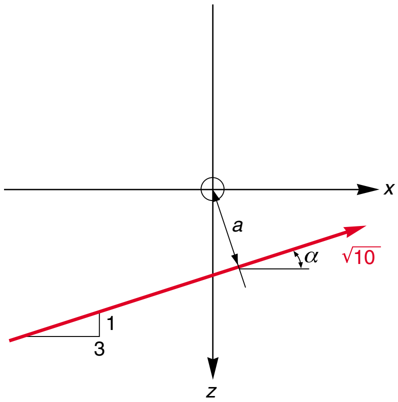
De richting wordt bepaald door de resultante van de twee richtingen te tekenen.

$\alpha =$ arc tan $(1/3) = 18{,}43°$

Bepaal de momentensom t.o.v. O
$\Sigma T_O = -(4\ \text{kN} \cdot 4\ \text{m}) + (4\ \text{kN} \cdot 4\text{m}) - 10\ \text{kNm} + (3\ \text{kN} \cdot 4\ \text{m}) + (4\ \text{kN} \cdot 4\ \text{m}) - (3\ \text{kN} \cdot 4\ \text{m}) = +6\ \text{kNm}$ (draait dus linksom)

De werklijn van de resultante wordt bepaald door:
$\sqrt{10} \cdot a = 6$
$a = 6/\sqrt{10}$ m

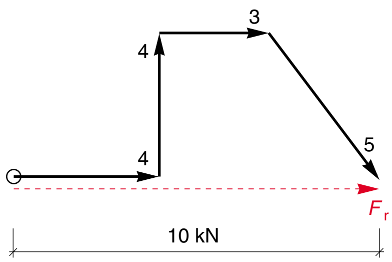
Zie figuur 1.5.



Figuur 1.5

Opdracht 6

Uitwerking
Zet de krachten met de juiste richting en grootte achter elkaar uit.
De resultante is de rechte lijn van beginpunt tot eindpunt van de achter elkaar getekende krachten.
$F_R = 10$ kN.

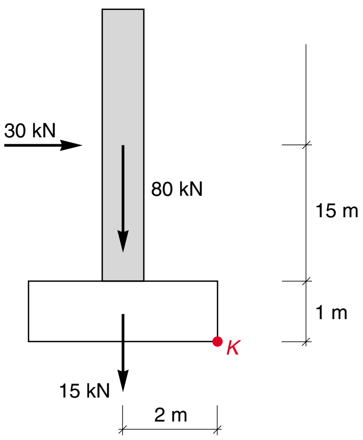


Figuur 1.6

Opdracht 7

Uitwerking
We gaan ervanuit dat de grond voldoende draagkrachtig is, dus de toren zal niet zakken.
Tevens zal de grond niet stuiken; de toren zal in horizontale zin niet verschuiven.

Rotatie-evenwicht dient nog gecontroleerd te worden.
De resultante van de windbelasting = 2 kN/m · 15 m = 30 kN
De toren wil om punt K roteren, weerstand van het grondlichaam wordt verwaarloosd.
ΣT_k = aandrijvend door windbelasting $= -30\ \text{kN} \cdot 16\ \text{m} = -480\ \text{kNm}$
ΣT_k = tegenwerkend door eigen gewicht toren en fundering =
$(80 + 15)\ \text{kN} \cdot 2\ \text{m} = 190\ \text{kNm}$



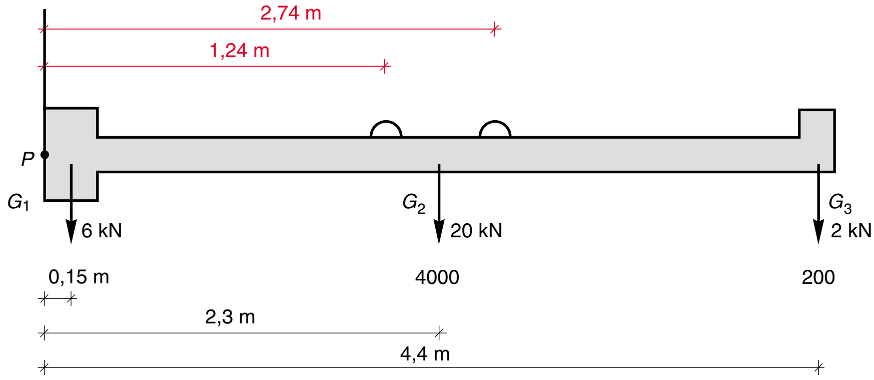
Figuur 1.7

Aandrijvend moment is groter dan tegenwerkend moment, dus toren zal kantelen.

Het eigengewicht van de toren dient minimaal;
480 kNm = (e.g toren + 15) kN · 2 m
e.g. toren $\geq$ 225 kN
Een meer praktische oplossing is de fundatieplaat te verzwaren en/of te vergroten. Ga dit zelf na!

Opdracht 8

Uitwerking

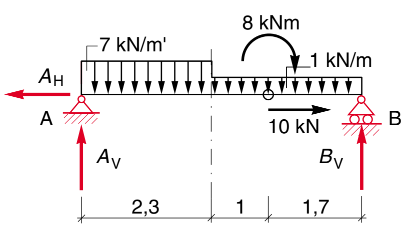


Figuur 1.8

De plaat dient horizontaal gehesen te worden. M.a.w. de resultante van de balkonplaat dient gelijk te vallen met het midden van de hijsogen.
$\Sigma F_v = G_1 + G_2 + G_3 = 6 + 20 + 2 = 28$ kN.
Plaats van de resultante volgt uit de momentensom.
$\Sigma T_P = 6 \text{ kN} \cdot 0{,}15 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 2{,}3 \text{ m} + 2 \text{ kN} \cdot 4{,}4 \text{ m} = 28 \text{ kN} \cdot a_R$
$55{,}7 \text{ kNm} = 28 \text{ kN} \cdot a_R$
$a_R = 55{,}7/28 = 1{,}99$ m vanuit P

Plaats hijsogen vanuit $P = 1{,}99 - 1{,}5/2 = 1{,}24$ m en
$1{,}99 + 1{,}5/2 = 2{,}74$ m

Opdracht 9



Figuur 1.9

Analyse
De onbekenden zijn:

$$A_V, B_V, A_H \Rightarrow 3 \text{ onbekenden}$$

De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\sum H = 0, \sum V = 0, \sum T = 0 \Rightarrow 3 \text{ vergelijkingen}$$

Conclusie: de constructie is Statisch Bepaald (SB).

De vergelijkingen met onbekenden zijn

$\Sigma F_H = 0$	$\Rightarrow A_H$	1^e op te lossen
$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow A_V, \underline{B_V}$	3^e (B_V volgt uit 2^e vergelijking)
$\Sigma T_{(A)} = 0$	$\Rightarrow B_V$	2^e
$\Sigma T_{(B)} = 0$	$\Rightarrow A_V$	4^e is de controle vergelijking

Uitwerking

1^e vergelijking $\Sigma F_H = 0$
$\Rightarrow \ -A_H + 10 = 0$
$A_H = 10$ kN

2^e vergelijking $\Sigma T_{(a)} = 0$
$\Rightarrow \ -(7 \text{ kN/m} \cdot 2{,}3) \cdot 2{,}3/2 - 8 \text{ kNm} -$
$(1 \text{ kN/m} \cdot 2{,}7 \text{ m}) \cdot (2{,}3 + 2{,}7/2) + B_V \cdot 5\text{m} = 0$
$\Rightarrow \ B_V = 7{,}274$ kN

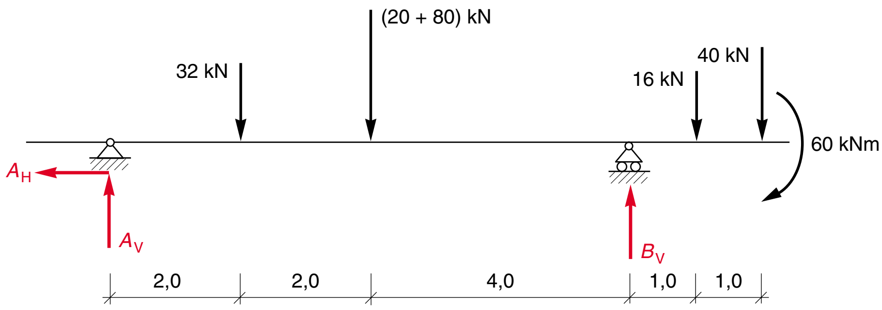
3^e vergelijking $\Sigma F_V = 0$
$\Rightarrow \ -A_V + 7 \cdot 2{,}3 + 1 \cdot 2{,}7 - A_V = 0$ (A_V invullen)
$\Rightarrow \ -7{,}274 + 18{,}8 - A_V = 11{,}526$ kN

Controle

– Bekijk het antwoord kritisch.

4^e vergelijking $\Sigma T_{(b)} = 0$
$\Rightarrow \ -11{,}526 \cdot 5 + (7 \cdot 2{,}3) \cdot (2{,}7 + 2{,}3/2) + -8 + (1 \cdot 2{,}7) \cdot 2{,}7/2 = 0$
$\Rightarrow \ -57{,}63 + 61{,}985 - 8 + 3{,}545 = 0$
$0 = 0$

Opdracht 10



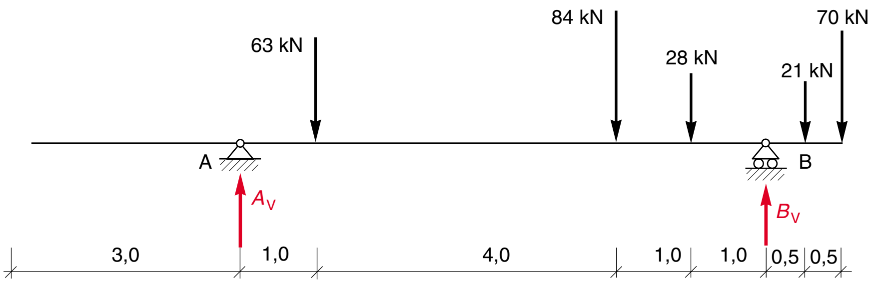
Figuur 1.10

1^e vergelijking $\Sigma F_H = 0$
$\Rightarrow \ -A_H + 40 = 0$
$A_H = 40 \text{ kN} \leftarrow$

2^e vergelijking $\Sigma t_{(a)} = 0$
$\Rightarrow \ -32 \cdot 2 - 100 \cdot 4 + B_V \cdot 8 - 16 \cdot 9 - 40 \cdot 10 - 60 = 0$
$B_V = 133{,}5 \text{ kN} \uparrow$

3^e vergelijking $\Sigma F_V = 0$
$\Rightarrow \ -A_V + 32 + 100 + 16 + 40 - 133{,}5 = 0$
$A_V = 54{,}5 \text{ kN} \uparrow$

Opdracht 11



Figuur 1.11

Antwoord
$A_V = 70{,}5$ kN $\uparrow$
$B_V = 195{,}5$ kN $\uparrow$

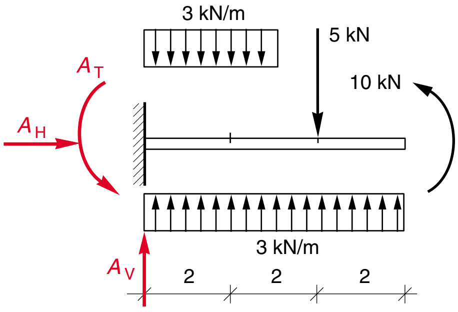
Opdracht 12

a $A_V = \frac{1}{2}ql \uparrow$
$B_V = \frac{1}{2}ql \uparrow$

b $A_V = \frac{1}{2}ql \uparrow$
$B_V = \frac{1}{2}ql \uparrow$

c $A_H = \frac{1}{2}ql \rightarrow$
$A_V = ql \uparrow$
$B_H = \frac{1}{2}ql \leftarrow$
$B_V = 0$

Opdracht 13



Figuur 1.13

Analyse
De onbekenden zijn:

$$A_V, A_H, A_T \;\Rightarrow\; 3 \text{ onbekenden}$$

De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\sum H = 0, \sum V = 0, \sum T = 0 \;\Rightarrow\; 3 \text{ vergelijkingen}$$

Conclusie: de constructie is Statisch Bepaald (SB).

De vergelijkingen zijn direct op te lossen:

$\Sigma F_H = 0$	$\Rightarrow A_H$	1ᵉ op te lossen
$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow A_V$, 2ᵉ	(B_V volgt uit 2ᵉ verg.)
$\Sigma T_{(A)} = 0$	$\Rightarrow A_T$ 3ᵉ	

Uitwerking

1ᵉ vergelijking $\Sigma F_H = 0$

$\Rightarrow A_H = 0$

2ᵉ vergelijking $\Sigma F_V = 0$

$\Rightarrow -A_V + 3 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 6 = 0$

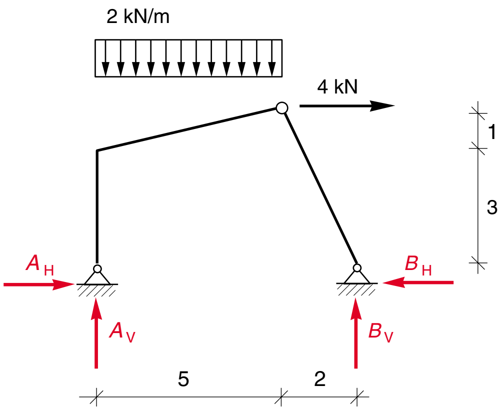
$\Rightarrow A_V = -7$ kN, dus tegengesteld aan wat was aangenomen

3ᵉ vergelijking $\Sigma T_{(a)} = 0$

$\Rightarrow -(3 \text{ kN/m} \cdot 2) \cdot 2/2 - 5 \text{ kN} \cdot 4 + 10 + (3 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 3 + A_T = 0$

$\Rightarrow A_T = -38$ kNm, dus tegengesteld aan wat was aangenomen

Opdracht 14



Figuur 1.14

Analyse

A_V, A_H, B_V, B_H $\Rightarrow$ 4 onbekenden,

3 vergelijkingen + scharnier $\Rightarrow$ SB

Vergelijkingen	onbekende	pad
$\Sigma F_H = 0$	$\Rightarrow A_H, B_H$	4ᵉ
$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow A_V, B_V$	2ᵉ
$\Sigma T_{(a)} = 0$	$\Rightarrow B_V$	1ᵉ vergelijking
$\Sigma T_{(s)}$ links $= 0$	$\Rightarrow A_V, A_H$	3ᵉ
$\Sigma T_{(s)}$ rechts $= 0$	$\Rightarrow B_V, B_H$	5ᵉ controle vergelijking

Uitwerking

Totale constructie

1ᵉ vergelijking $\Sigma T(a) = 0$

$-(2 \cdot 5) \text{ kN} \cdot 5/2 \text{ m} - 4 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 7 \cdot B_V = 0$

$\Rightarrow B_V = 5{,}86$ kN

2^e^ vergelijking $\Sigma F_V = 0$

$-A_V + (2 \cdot 5) - B_V = 0$

$-A_V + 10 - 5{,}86 = 0$

$\Rightarrow\ A_V = 4{,}14$ kN

3^e^ vergelijking $\Sigma T_{(s)}$ links $= 0$ ($A_V = 4{,}14$ kN)

$-A_V \cdot 5 + A_H \cdot 4 + (2 \cdot 5) \cdot 5/2 = 0$

$-4{,}14 \cdot 5 + 4A_H + 25 = 0$

$\Rightarrow\ A_H = -1{,}07$ kN

4^e^ vergelijking $\Sigma F_H = 0$ ($A_H = -1{,}07$ kN)

$A_H + 4 - B_H = 0$

$\Rightarrow\ -1{,}07 + 4 - B_H = 0$

$B_H = 2{,}93$ kN

Controle

5^e^ vergelijking $\Sigma T_{(s)}$ rechts $= 0$

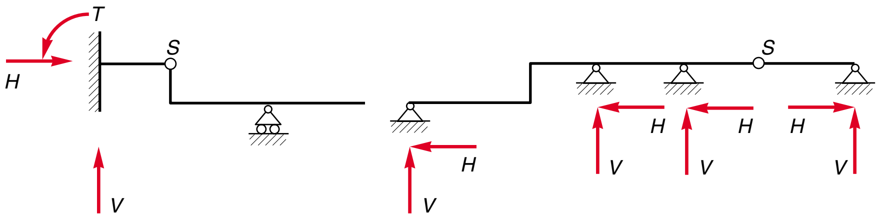
$+2 \cdot B_V - 4B_H = 0$

$2 \cdot 5{,}86 - 4 \cdot 2{,}93 = 0$

$\Rightarrow\ 0 = 0$ akkoord

Opdracht 15

Uitwerking



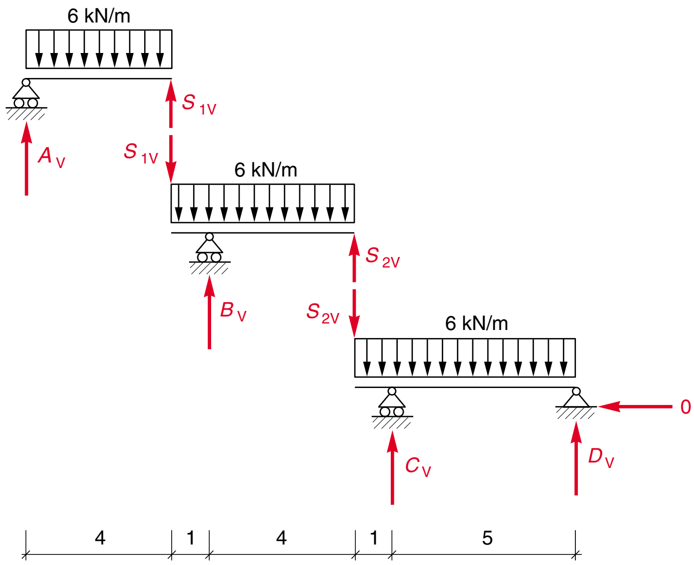
Figuur 1.15 a b

Figuur a:
Opleggingen: 4 onbekenden
Evenwichtsvergelijkingen: 3 stuks ($\Sigma F_H = 0$, $\Sigma F_V = 0$, $\Sigma T_{(a)} = 0$) + scharnier = 4 $\Rightarrow$ dus oplosbaar $\Rightarrow$ statisch bepaald.
Graad van statisch onbepaald zijn is: $4 - 4 = 0$

Figuur b:
Opleggingen: 8 onbekenden
Evenwichtsvergelijkingen: 3 stuks ($\Sigma F_H = 0$, $\Sigma F_V = 0$, $\Sigma T_{(a)} = 0$) + scharnier = 4 $\Rightarrow$ dus onoplosbaar $\Rightarrow$ statisch onbepaald.
Graad van statisch onbepaald zijn is: $8 - 4 = 4$
Antwoord: viervoudig statisch onbepaald

Opdracht 16

Analyse
Geef het assenstelsel aan dat wordt bepaald door de ondersteuningen. Schematiseer de constructie en teken de opleggingen in, zoals ze volgens de symbolen aanwezig zijn. Breng de reactiekrachten aan, zie fig. 1.16.
We zien dat deel A-S1 hangt in deel S1-S2. Deel S1- S2 is op zich niet stabiel.
Dit deel hangt weer in deel S2-D. Deel S2-D heeft twee steunpunten en is stabiel. M.a.w. de gehele constructie wordt door deel S2-D gestabiliseerd. Gekeken naar de totale constructie zien we geen horizontale actieve krachten. Omdat de constructie een rechte is, is er geen horizontale reactiekracht aanwezig, dus $D_H = 0$. We gaan de constructie op de plaats van de scharnieren opsplitsen.



Figuur 1.16

Lokaal: deel A-S1

Vergelijking	Onbekende	pad
$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow A_V, S_{1V}$	2e
$\Sigma T_{(A)} = 0$	$\Rightarrow S_{1V}$	1e

Lokaal: deel S1-S2

$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow B_V, S_{1V}, S_{2V}$	4e
$\Sigma T_{(B)} = 0$	$\Rightarrow S_{1V}, S_{2V}$	3e

Lokaal: deel S2-D

$\Sigma F_V = 0$	$\Rightarrow S_{2V}, C_V, D_V$	6e
$\Sigma T_{(C)} = 0$	$\Rightarrow S_{2V}, D_V$	5e

Totaal

$\Sigma V = 0$	$\Rightarrow A_V, B_V, C_V, D_V$	controle

Uitwerking

Lokaal: deel A-S1

1^e $\Sigma T_{(A)} = 0$

$-(6 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m}) \cdot 4 \text{ m}/2 + 4 \text{ m} \cdot S_{1V} = 0$ $\qquad S_{1V} = 12 \text{ kN}$

2^e $\Sigma F_V = 0$

$-A_V + 6 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} - S_{1V} = 0$

$-A_V + 24 - 12 = 0$ $\qquad A_V = 12 \text{ kN}$

Lokaal: deel S1-S2

3^e $\Sigma T_{(B)} = 0$

$S_{1V} \cdot 1 \text{ m} - (6 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m}) \cdot 1{,}5 \text{ m} + 4 \cdot S_{2V} = 0$

$12 \cdot 1 \text{ m} - 45 \text{ m} + 4 \cdot S_{2V} = 0$ $\qquad S2_V = 8{,}25 \text{ kN}$

4^e $\Sigma F_V = 0$

$S_{1V} - B_V + 6 \text{ kN/m} \cdot 5 - S_{2V} = 0$

$12 - B_V + 30 - 8{,}25 = 0$ $\qquad B_V = 33{,}75 \text{ kN}$

Lokaal: deel S2-D

5^e $\Sigma T_{(C)} = 0$

$S_{2V} \cdot 1 \text{ m} - (6 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} + 5 \cdot D_V = 0$

$8{,}25 \cdot 1 \text{ m} - 72 + 5 \cdot D_V = 0$ $\qquad D_V = 12{,}75 \text{ kN}$

6^e $\Sigma F_V = 0$

$S_{2V} - C_V + 6 \text{ kN/m} \cdot 6 - D_V = 0$

$8{,}25 - C_V + 36 - 12{,}75 = 0$ $\qquad C_V = 31{,}5 \text{ kN}$

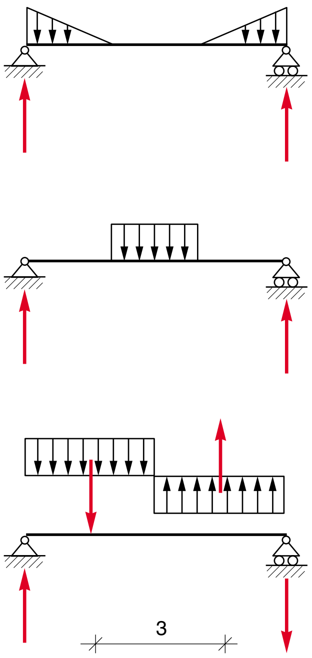
Controle

de totale constructie: $\Sigma V = 0$

$-A_V - B_V - C_V - D_V + 6 \text{ kN/m} \cdot 15 \text{ m} = 0$

$-12 - 33{,}75 - 31{,}5 - 12{,}75 + 90 = 0$

$0 = 0$ akkoord



a

b

c

Figuur 1.17

Opdracht 17

Uitwerking

a driehoeksbelasting is q kN $\cdot$ 2 m/2 $= q$
Totale driehoeksbelasting is $2 \cdot q = 2\,q$
Reactiekrachten zijn vanuit symmetrie $A_V = B_V = 2q/2 = q$ kN.

b totale belasting is $2 \cdot q = 2q$ kN
Reactiekrachten zijn vanuit symmetrie $A_V = B_V = 2q/2 = q$ kN.

c De twee tegengestelde belastingen vormen een koppel.
$T_{\text{koppel}} = \text{F} \cdot a$, met $F = 3q$ kN, dus $T_{\text{koppel}} = 3q \text{ kN} \cdot 3\text{m} = 9 \text{ kNm}$
De twee reactiekrachten vormen eveneens een koppel maar dan tegengesteld van richting. $T_{\text{reactie}} = A_V \cdot 6$
Gelijkstelling levert: $A_V = 9 \text{ kNm}/6 \text{ m} = -1{,}50 \text{ kN}$ ($\uparrow$),
$B_V = 1{,}50 \text{ kN}$ ($\downarrow$),

Opdracht 18

Uitwerking

P last — symmetrie $= P/2$

$2q$ last — vervangen door q last en keersymmetrie q last
q last: $\quad q \cdot 6 \text{ m}/2 = 3\ q$
keersymm: $\quad q \cdot 3 \cdot 3/6 = \pm\ 1{,}5\ q$

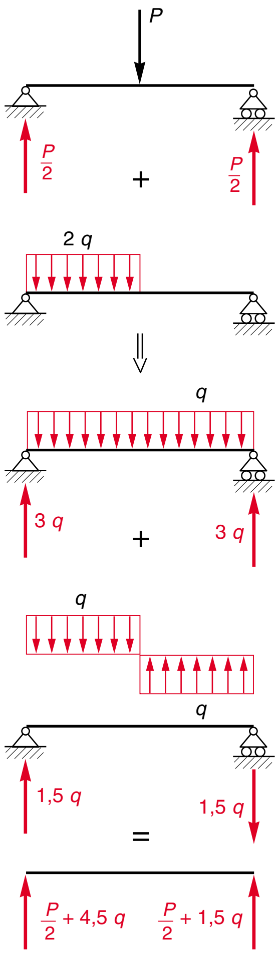
sommatie: $A_V = P/2 + 3\ q + 1{,}5$
$q = P/2 + 4{,}5\ q$
$B_V = P/2 + 3\ q - 1{,}5$
$q = P/2 + 1{,}5\ q$

$2 \cdot P$ last — symmetrie $= 2\ P/2 = P$

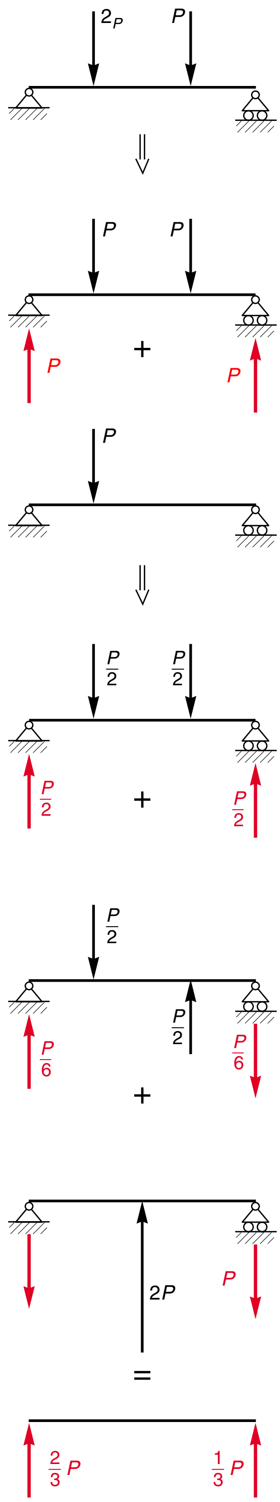
P — vervangen door symmetrisch deel en keersymmetrisch deel
symm: $\quad P/2 \cdot 2/2 = P/2$
keersymm: $\quad P/2 \cdot 2 \text{ m}/6 \text{ m} = P/6$

$-2\ P$ last — symmetrie $= -2\ P/2 = -P$

sommatie: $A_V = P + P/2 + P/6 - P = 2/3\ P$
$B_V = P + P/2 - P/6 - P = 1/3\ P$



Figuur 1.18a



Figuur 1.18b