drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

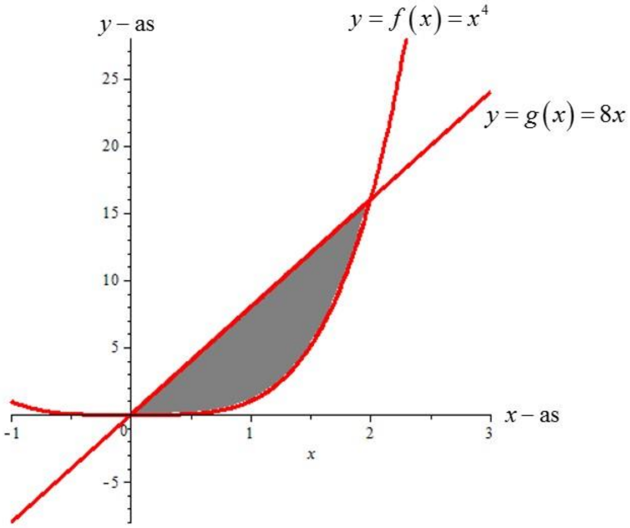
Toegepaste Wiskunde
voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 1
Zesde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 7
Toepassingen van de integraalrekening

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 7, paragraaf 7.10

Opgave 1
Een schets van het gebied is te zien in figuur 1.



Figuur 1

Berekenen van de *x*-coördinaten van de snijpunten:

$$x^4 = 8x \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 - 8\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

a

$$O = \int_0^2 \left(8x - x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[4x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 16 - \frac{32}{5} = \frac{48}{5}$$

b

$$V_x = \pi\int_0^2 (8x)^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 \left(x^4\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^2 \left(64x^2 - x^8\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[\frac{64}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^9\right]_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{64}{3}\cdot 8 - \frac{1}{9}\cdot 512\right) = \pi\left(\frac{3\cdot 64\cdot 8 - 512}{9}\right) = \frac{1024}{9}\pi$$

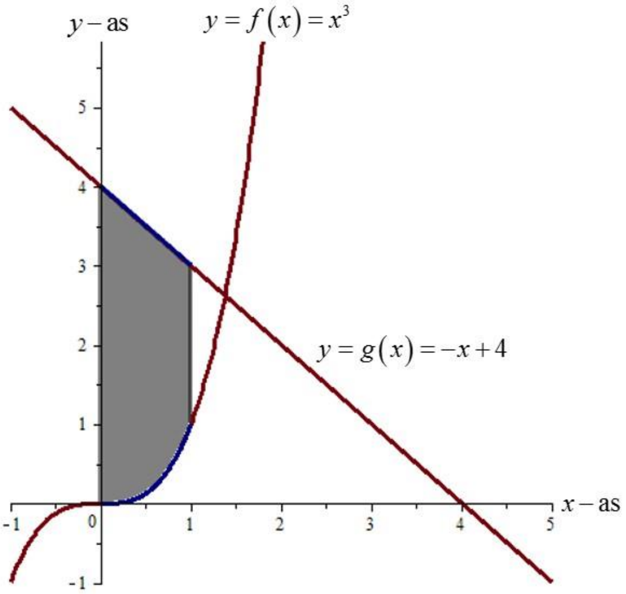
c

$$V_y = 2\pi\int_0^2 x\left(8x - x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^2 \left(8x^2 - x^5\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^2$$

$$= 2\pi\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{6}\right) = \frac{64}{3}\pi$$

Opgave 2
Een schets van het gebied is te zien in figuur 2.



Figuur 2

a

$$O = \int_0^1 (4-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[4x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 4 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{16-2-1}{4} = \tfrac{13}{4}$$

b

$$V_x = \pi\int_0^1 (4-x)^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^1 \left(x^3\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 \left(16 - 8x + x^2 - x^6\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[16x - 4x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{7}x^7\right]_0^1$$

$$= \pi\left(16 - 4 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}\right) = \pi\left(\tfrac{12\cdot 21+7-3}{21}\right) = \tfrac{256}{21}\pi$$

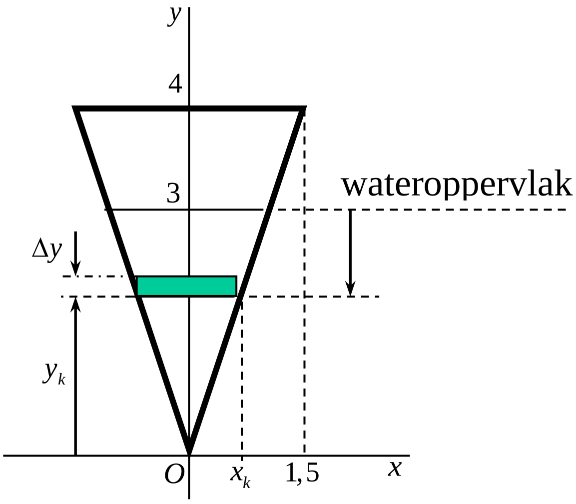
c

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x(4-x)\,\mathrm{d}x - 2\pi\int_0^1 x\cdot x^3\,\mathrm{d}x$$

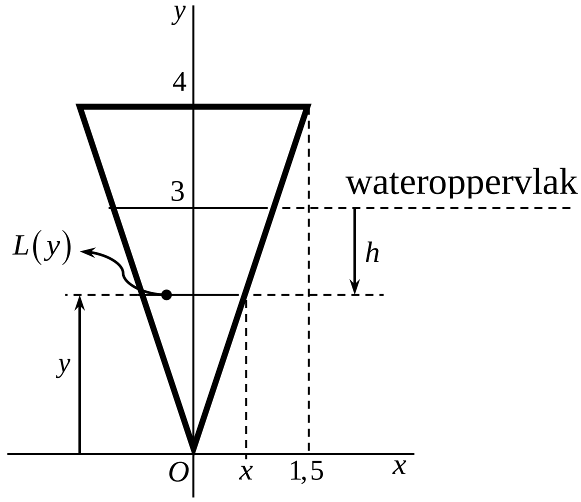
$$= 2\pi\int_0^1 \left(4x - x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left[2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = 2\pi\cdot\tfrac{30-5-3}{15} = \tfrac{44}{15}\pi$$

Opgave 3



Figuur 3



Figuur 4

a Een dwarsdoorsnede van de tank is geschetst in figuur 3. Voor het berekenen van de arbeid wordt het interval $[0,3]$ op de y-as verdeeld in n deelintervallen $[y_k, y_{k+1}]$ met lengte Δy, waarbij $0 = y_1$ en $3 = y_{n+1}$. De exact verrichte arbeid om de aangegeven vloeistoflaag met dikte Δy omhoog te brengen is $\Delta_k W$.

De zwaartekracht F_k op deze vloeistoflaag is:

$$\begin{aligned} F_k &= \rho \cdot g \cdot \Delta_k V \\ &\approx 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 2 \cdot x_k \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Er geldt $x_k = \frac{3}{8} y_k$, zodat $F_k \approx \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot y_k \cdot \Delta y$.

Deze vloestoflaag wordt verplaatst over een afstand van ongeveer $4 - y_k$.

Voor $\Delta_k W$ volgt er dan:

$$\Delta_k W \approx \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y$$

Voor de totale arbeid W geldt dan bij benadering:

$$W = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y$$

Voor $\Delta y \to 0$ gaat de gemaakte fout in de benadering op elk deelinterval naar nul. Er volgt:

$$W = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{8} \cdot 98100 \cdot (4 - y_k) y_k \cdot \Delta y = \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 (4 - y) y \, \mathrm{d}y$$

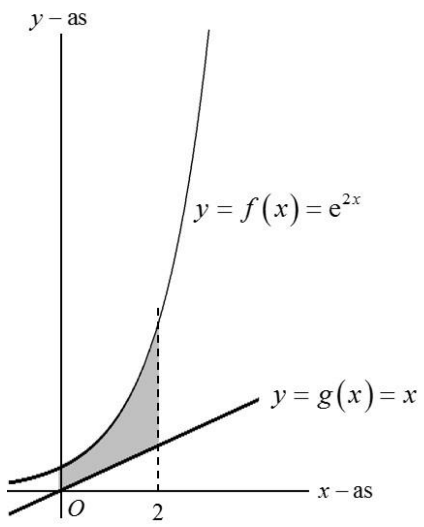
Het berekenen van de integraal:

$$W = \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 (4 - y)\, y \,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{8} \cdot 98100 \int_0^3 \left(4y - y^2\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{8} \cdot 98100 \left[2y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^3$$
$$= 331088\,\mathrm{J}$$

b Zie figuur 4.

$$F = \int_0^3 \rho \cdot g \cdot h \cdot L(y) \mathrm{d}y$$
$$= 9810 \int_0^3 (3 - y) \cdot \frac{3}{4} y \mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{4} \cdot 9810 \int_0^3 \left(3y - y^2\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{3}{4} \cdot 9810 \left[\frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^3$$
$$= 33109\,\mathrm{N}$$

Opgave 4
Een schets van het gebied is te zien in figuur 5.



Figuur 5

Er geldt:

$$x_z = \frac{1}{O} \int_0^2 x\left(\mathrm{e}^{2x} - x\right) \mathrm{d}x \text{ en } y_z = \frac{1}{2O} \int_0^2 \left(\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$O=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x-\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}(2x)-\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{2x}\Big]_0^2-\Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^2=\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1)-2$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4-\tfrac{5}{2}$$
$$\int_0^2 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[x\mathrm{e}^{2x}\Big]_0^2-\tfrac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^4-\tfrac{1}{4}\Big[\mathrm{e}^{2x}\Big]_0^2$$
$$=\mathrm{e}^4-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^4+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4}\mathrm{e}^4+\tfrac{1}{4}$$
$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\Big[\tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^2=\tfrac{8}{3}$$
$$\int_0^2\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}\int_0^2 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}(4x)-\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\tfrac{1}{4}\Big[\mathrm{e}^{4x}\Big]_0^2-\Big[\tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^2=\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^8-\tfrac{35}{12}=\frac{3\mathrm{e}^8-35}{12}$$

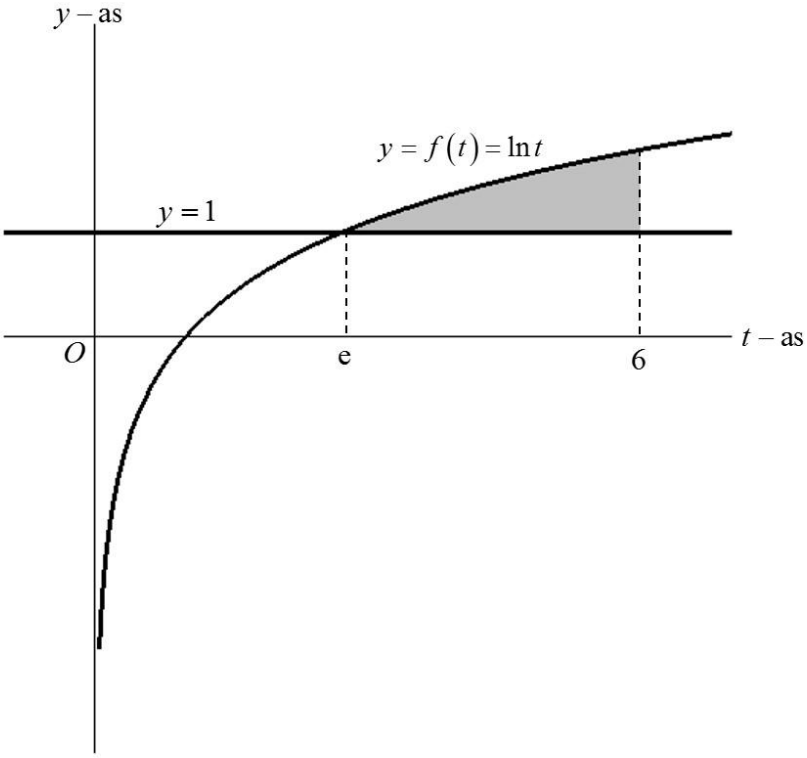
We vinden:

$$x_z=\tfrac{1}{O}\int_0^2 x\left(\mathrm{e}^{2x}-x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4-\tfrac{5}{2}}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\mathrm{e}^4+\tfrac{1}{4}-\tfrac{8}{3}\right)=\frac{\tfrac{3}{4}\mathrm{e}^4-\tfrac{29}{12}}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4-\tfrac{5}{2}}$$
$$=\frac{9\mathrm{e}^4-29}{6\mathrm{e}^4-30}$$

en

$$y_z=\tfrac{1}{2O}\int_0^2\left(\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}^4-5}\left(\frac{3\mathrm{e}^8-35}{12}\right)=\frac{3\mathrm{e}^8-35}{12\left(\mathrm{e}^4-5\right)}$$

Opgave 5
Een schets van het gebied is te zien in figuur 6.



Figuur 6

a De oppervlakte van het gebied:

$$O=\int_{\mathrm{e}}^{6}\left(\ln(t)-1\right)\mathrm{d}t=\left[t\left(\ln(t)-1\right)\right]_{\mathrm{e}}^{6}-\int_{\mathrm{e}}^{6}t\,\mathrm{d}\left(\ln(t)-1\right)$$
$$=6\left(\ln(6)-1\right)-\int_{\mathrm{e}}^{6}t\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$=6\left(\ln(6)-1\right)-\int_{\mathrm{e}}^{6}1\mathrm{d}t$$
$$=6\ln(6)-6-(6-\mathrm{e})=6\ln(6)-12+\mathrm{e}$$

b Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de t-as:

$$
\begin{aligned}
V_t &= \pi\int_{e}^{6}\left(\left(\ln(t)\right)^2 - 1^2\right)\mathrm{d}t \\
&= \pi\int_{e}^{6}\left(\ln(t)\right)^2\,\mathrm{d}t - \pi\int_{e}^{6}1\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\left[t\left(\ln(t)\right)^2\right]_{e}^{6} - \pi\int_{e}^{6}t\,\mathrm{d}\left(\ln(t)\right)^2 - \pi(6-\mathrm{e}) \\
&= 6\pi\left(\ln(6)\right)^2 - \pi\mathrm{e} - 6\pi + \pi\mathrm{e} - 2\pi\int_{e}^{6}\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 6\pi\left(\ln(6)\right)^2 - 6\pi - 2\pi\left[t\ln(t) - t\right]_{e}^{6} \\
&= 6\pi\left(\ln(6)\right)^2 - 6\pi - 2\pi\left(6\ln(6) - 6\right) + 2\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}) \\
&= 6\pi\left(\ln(6)\right)^2 + 6\pi - 12\pi\ln(6) \\
&= 6\pi\left(\left(\ln(6)\right)^2 + 1 - 2\ln(6)\right)
\end{aligned}
$$

c Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het wentelen van G om de y-as:

$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi\int_{e}^{6}t\left(\ln(t) - 1\right)\mathrm{d}t \\
&= \pi\int_{e}^{6}\left(\ln(t) - 1\right)\mathrm{d}\left(t^2\right) \\
&= \pi\left[t^2\left(\ln(t) - 1\right)\right]_{e}^{6} - \pi\int_{e}^{6}t^2\mathrm{d}\left(\ln(t) - 1\right) \\
&= 36\pi\left(\ln(6) - 1\right) - \int_{e}^{6}t\,\mathrm{d}t \\
&= 36\pi\left(\ln(6) - 1\right) - \tfrac{1}{2}\pi\left[t^2\right]_{e}^{6} \\
&= 36\pi\left(\ln(6) - 1\right) - \tfrac{1}{2}\pi\left(36 - \mathrm{e}^2\right) \\
&= 36\pi\ln(6) - 54\pi + \tfrac{1}{2}\pi\mathrm{e}^2 \\
&= \pi\left(36\ln(6) - 54 + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\right)
\end{aligned}
$$

Opgave 6
We berekenen achtereenvolgens de snelheid $v(t)$, de remtijd, de afstandsfunctie $s(t)$ en uiteindelijk de remweg.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{4}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t \\ &= -4\int (1+t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+t) \\ &= -8\sqrt{1+t} + C \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $v = 30$ m/s, dit levert op de vergelijking $30 = -8 + C$, zodat $C = 38$ en $v(t) = 38 - 8\sqrt{1+t}$ (m/s).

Vervolgens berekenen we de remtijd: het tijdstip *t*, waarvoor $v(t) = 0$.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 38 - 8\sqrt{1+t} = 0 \Rightarrow 38 = 8\sqrt{1+t} \Rightarrow 38^2 = 8^2(1+t)$$

$$\Rightarrow t = \frac{38^2}{8^2} - 1 = 21{,}5625 \text{ s}$$

De afstandsfunctie:

$$\begin{aligned} s &= \int v\,\mathrm{d}t = \int\left(38 - 8\sqrt{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 38t - 8\cdot\tfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + C_2 \\ &= 38t - \tfrac{16}{3}(1+t)\sqrt{1+t} + C_2 \end{aligned}$$

Als $t = 0$ s, dan is $s = 0$ m, zodat $C_2 = \frac{16}{3}$ en $s(t) = 38t - \frac{16}{3}(1+t)\sqrt{1+t} + \frac{16}{3}$ (m).

De remweg:

$$s(21{,}5625) = 253{,}125 \text{ m}$$