

Drs. J.H. Blankespoor
Drs. C. de Joode
Ir. A. Sluijter

Toegepaste wiskunde

voor het hoger beroepsonderwijs

Deel 2

Derde, herziene druk

Uitwerking herhalingsopgaven hoofdstuk 6

© HBuitgevers, Baarn



Uitwerking herhalingsopgaven deel 2

Hoofdstuk 6 (Meervoudige integralen, bol- en cilindercoördinaten)

Opgave 1

a

Laat x variëren van 0 tot 2; kies een willekeurige maar wel vaste x tussen 0 en 2; de bijbehorende y varieert van 0 tot $\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$.

Korter:

$$0 \leq x \leq 2 \text{ en } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$$

De andere gebiedsbeschrijving in rechthoekscoördinaten:

$$0 \leq y \leq 1 \text{ en } 0 \leq x \leq 2\sqrt{1 - y^2}$$

Gebruikt is: $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 = 4(1 - y^2) \Rightarrow x = 2\sqrt{1 - y^2}$, omdat $x \geq 0$

We gaan het gebied nu in poolcoördinaten beschrijven. Het gebied wordt begrensd door de hoeken $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Voor een willekeurige, maar vaste waarde van φ tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ varieert de straal r van 0 tot op de ellips. We gaan de vergelijking van de ellips $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ omzetten in poolcoördinaten door te substitueren $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$:

$$\frac{1}{4}r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow r^2 \left(\frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) = 1$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{\frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{4}{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi}}, \text{ omdat } r \geq 0$$

Voor een willekeurige, maar vaste φ , loopt de straal r dus van 0 tot $\frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi}}$.

De beschrijving van G in poolcoördinaten wordt daarmee:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi}}.$$

b

De vergelijking van de cirkel $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ wordt na het uitwerken van de haakjes:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

De x -coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn berekenen we door $y = -x$ te substitueren in $x^2 + y^2 + 2x = 0$:

$$x^2 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Het is nodig het gebied in twee delen te splitsen voor de beschrijving in rechthoekscoördinaten. We beschrijven het gebied: x loopt van -1 tot 0 en voor een willekeurige, vaste x op het interval $[-1, 0]$ loopt y van -1 tot de cirkel.

We lossen y op uit $x^2 + (y-1)^2 = 1$:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y-1 = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

In dit geval is $y \geq 1$, zodat er geldt: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$

Vervolgens loopt x van 0 tot 1 en voor een willekeurige, vaste x op het interval $[0,1]$ loopt y dan van $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ tot $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Kortweg:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 & \text{en} & -x \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 & \text{en} & 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

De afleiding van de tweede gebiedsbeschrijving in rechthoekskoördinaten is op overeenkomstige wijze te geven en wordt achterwege gelaten. De beschrijving is:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 & \text{en} & -y \leq x \leq \sqrt{2y-y^2} \\ 1 \leq y \leq 2 & \text{en} & -\sqrt{2y-y^2} \leq x \leq \sqrt{2y-y^2} \end{cases}$$

We gaan het gebied nu in poolcoördinaten beschrijven. Het gebied wordt begrensd door de hoeken $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Voor een willekeurige, maar vaste waarde van φ tussen 0 en $\frac{3}{4}\pi$ varieert de straal r van 0 tot op de cirkel. We gaan de vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 - 2y = 0$ omzetten in poolcoördinaten door te substitueren $x^2 + y^2 = r^2$ en $y = r \sin \varphi$:

$$r^2 - 2r \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow r(r - 2 \sin \varphi) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = 2 \sin \varphi$$

Voor een willekeurige, maar vaste φ , loopt de straal r dus van 0 tot $r = 2 \sin \varphi$.

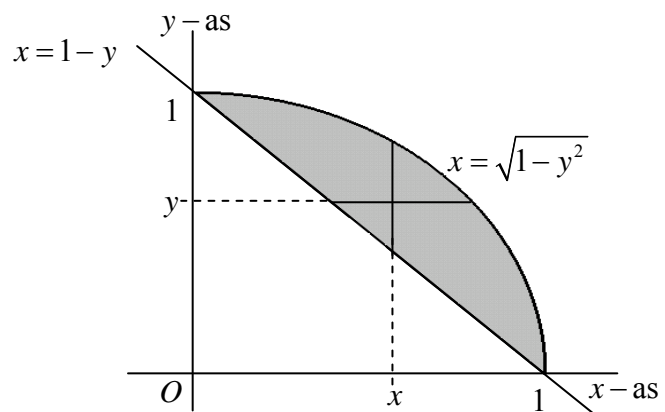
De beschrijving van G in poolcoördinaten wordt daarmee:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi \text{ en } 0 \leq r \leq 2 \sin \varphi.$$

Opgave 2

a

Schets van het gebied:



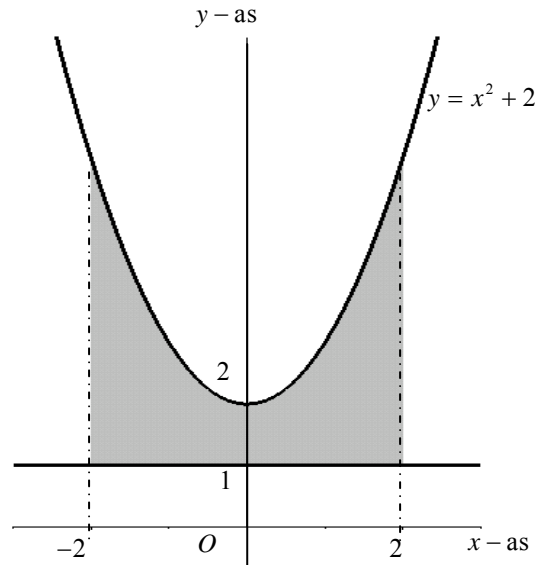
Figuur 1

Tweede gebiedsbeschrijving:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ en } 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

b

Schets van het gebied:



Figuur 2

Tweede gebiedsbeschrijving is in twee delen:

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \text{ en } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq y \leq 6 \text{ en } -2 \leq x \leq -\sqrt{y-2} \\ 2 \leq y \leq 6 \text{ en } \sqrt{y-2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Opgave 3

a

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-u}^{\sqrt{u}} (u+v+1) dv du &= \int_0^2 \left[uv + \frac{1}{2}v^2 + v \right]_{v=-u}^{\sqrt{u}} du \\ &= \int_0^2 \left(u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}u + \sqrt{u} - \left(-u^2 + \frac{1}{2}u^2 - u \right) \right) du \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}u^2 + u^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}u + u^{\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \left[\frac{1}{6}u^3 + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}u^2 + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{5}4\sqrt{2} + 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{13}{3} \end{aligned}$$

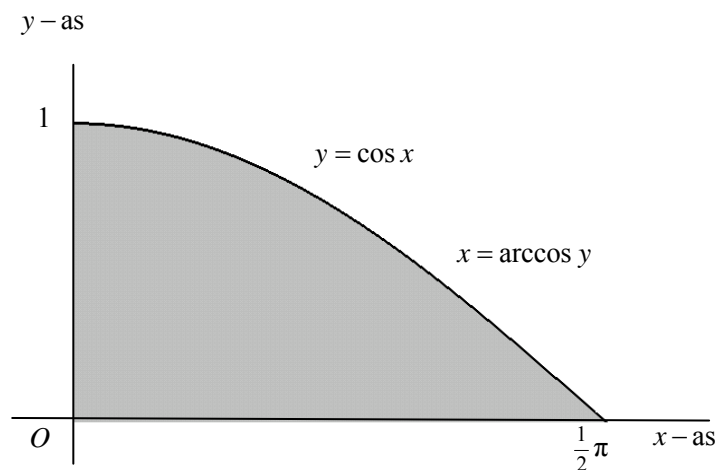
b

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^{t^2} t \cos(y+t^2) dy dt &= \int_0^\pi t \left\{ \int_{y=0}^{t^2} \cos(y+t^2) d(y+t^2) \right\} dt \\ &= \int_0^\pi t \left[\sin(y+t^2) \right]_{y=0}^{t^2} dt = \int_0^\pi t (\sin(2t^2) - \sin(t^2)) dt \\ &= \int_0^\pi t \sin(2t^2) dt - \int_0^\pi t \sin(t^2) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(2t^2) d(2t^2) - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(t^2) d(t^2) \\ &= -\frac{1}{4} [\cos(2t^2)]_0^\pi + \frac{1}{2} [\cos(t^2)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{4} \cos(2\pi^2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(\pi^2) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \cos(2\pi^2) + \frac{1}{2} \cos(\pi^2) - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opgave 4

a

We draaien de integratievolgorde om, zie figuur 3

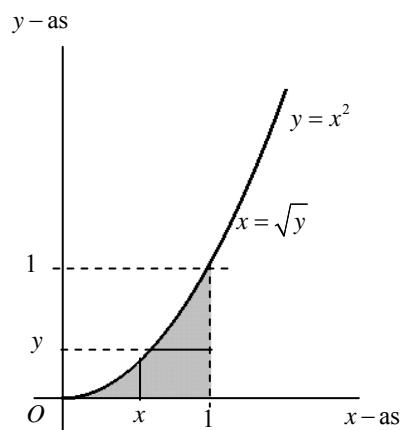


Figuur 3

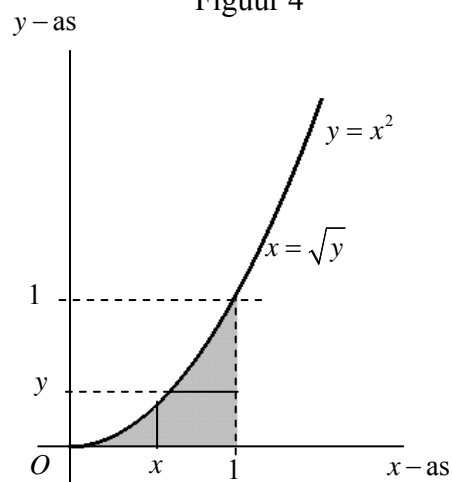
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\arccos y} e^{\sin x} dx dy &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\cos x} e^{\sin x} dy dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{\sin x} [y]_{y=0}^{\cos x} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{\sin x} \cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{\sin x} d \sin x \\
&= \left[e^{\sin x} \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = e^{\sin \frac{1}{2}\pi} - e^{\sin 0} = e - 1
\end{aligned}$$

b

We draaien de integratievolgorde om, zie figuur 4



Figuur 4



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{y}} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{y}} dy dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \int_0^{x^2} y^{-\frac{1}{2}} dy dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \left[2y^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x^2} dx \\
&= 2 \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\
&= \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Opgave 5

a

We gaan over op poolcoördinaten

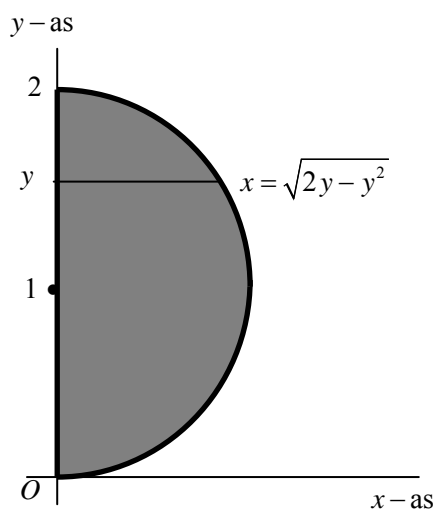
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy$$

Het gebied G volgt uit de integratiegrenzen:

Voor een y tussen 0 en 2 varieert x van 0 tot $x = \sqrt{2y - y^2}$

$$x = \sqrt{2y - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

De laatste uitdrukking is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(0,1)$ en straal 1. Het gebied G is geschetst in figuur 5.



Figuur 5

We gaan G in poolcoördinaten beschrijven. Vrij eenvoudig is in te zien dat $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. We zien ook dat voor willekeurige, maar vaste φ tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ de straal r loopt van 0 tot op de cirkel. Om de waarde van r op de cirkel te kunnen bepalen, moeten we de cirkel in poolcoördinaten beschrijven.

In de vergelijking $x^2 + y^2 - 2y = 0$ substitueren we $y = r \sin \varphi$ en $x^2 + y^2 = r^2$.

Dit geeft:

$$r^2 - 2r \sin \varphi = 0 \Rightarrow r(r - 2 \sin \varphi) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = 2 \sin \varphi$$

Dit betekent dat voor een willekeurige, maar vaste φ de straal r loopt van 0 tot $2 \sin \varphi$.

De gebiedsbeschrijving in poolcoördinaten is:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \leq r \leq 2 \sin \varphi.$$

De berekening van de gevraagde integraal verloopt nu als volgt:

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2 \sin \varphi} r^3 dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{2 \sin \varphi} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

We werken $\sin^4 \varphi$ om tot een integreerbare uitdrukking:

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= (\sin^2 \varphi)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \end{aligned}$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y^2) dx dy &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi d(2\varphi) - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 4\varphi d(4\varphi) \\ &= \left[\frac{3}{2} \varphi - \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

b

We gaan over op poolcoördinaten

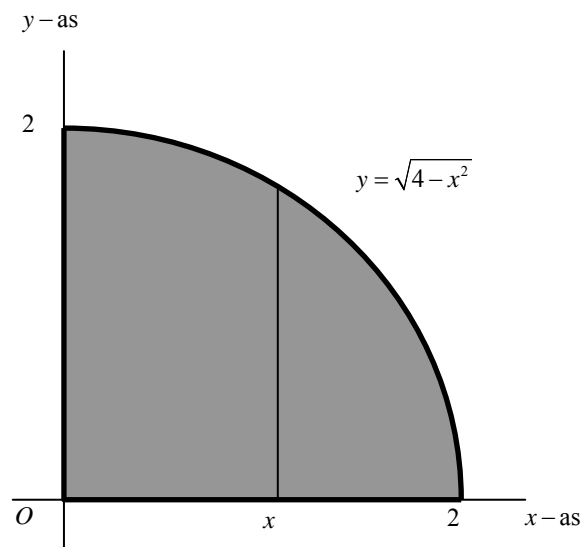
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx dy = \iint_G \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx dy$$

Het gebied G volgt uit de integratiegrenzen:

Voor een x tussen 0 en 2 varieert y van 0 tot $y = \sqrt{4-x^2}$

$$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

De laatste uitdrukking is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 2. Het gebied G is geschetst in figuur 6



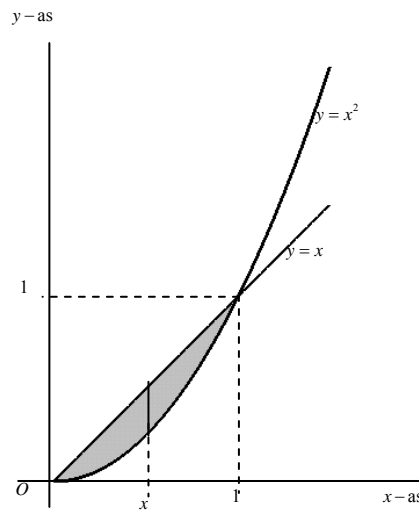
Figuur 6

Er volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx dy &= \iint_G \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \, r dr d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^2 (4-r^2)^{\frac{1}{2}} d(4-r^2) d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{2}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\varphi \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (0-8) d\varphi \\ &= \frac{8}{3} [\varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

Opgave 6

Het vlak $x + y + z = 2$ is de grafiek van de functie $z = f(x, y) = 2 - x - y$. Het lichaam wordt begrensd door de grafiek van f en het gebied G in het xy -vlak volgens figuur 7

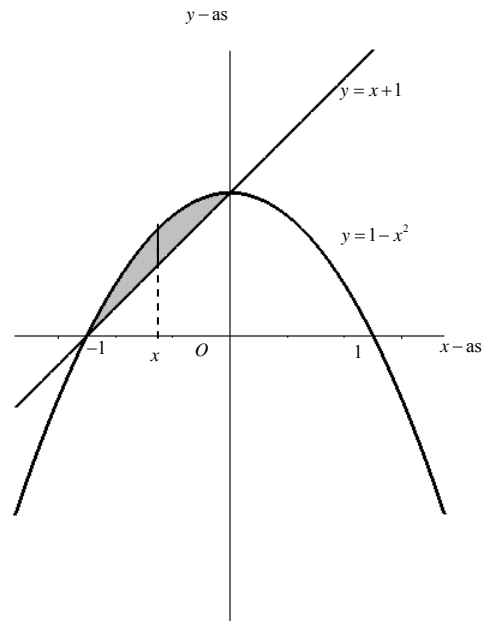


Figuur 7

$$\begin{aligned} V &= \iint_G (2 - x - y) dx dy = \int_0^1 \int_{y=x^2}^x (2 - x - y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[2y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2} x^2 - \left(2x^2 - x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 + x^3 - \frac{7}{2} x^2 + 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{4} x^4 - \frac{7}{6} x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 = \frac{6 + 15 - 70 + 60}{60} = \frac{11}{60} \end{aligned}$$

Opgave 7

Een schets van het gebied is te zien in figuur 8

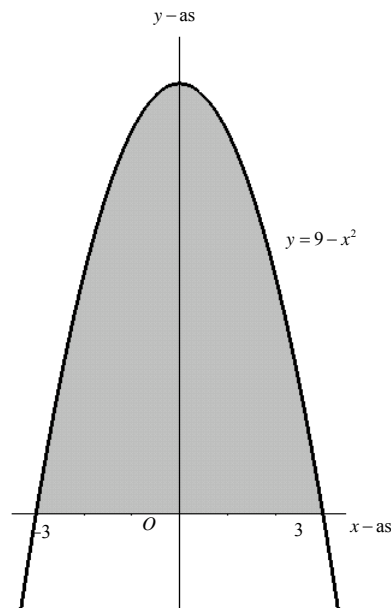


Figuur 8

$$\begin{aligned} O &= \iint_G dx dy = \int_{-1}^0 \int_{y=x+1}^{1-x^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^0 [y]_{y=x+1}^{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^0 (1-x^2 - (x+1)) dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Opgave 8

Een schets van het gebied is te zien in figuur 9

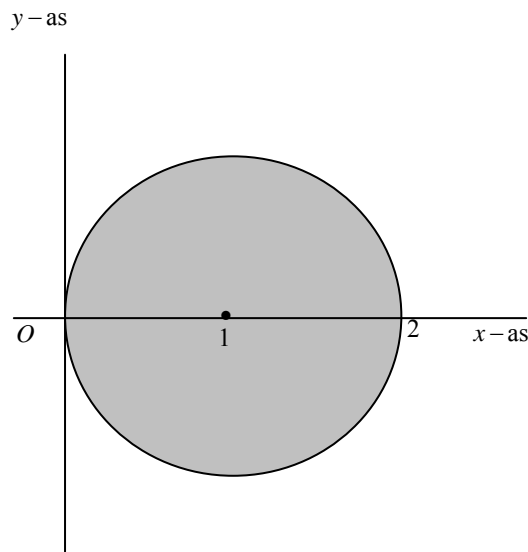


Figuur 9

$$\begin{aligned} I &= \iint_G x^2 dx dy = \int_{-3}^3 \int_{y=0}^{9-x^2} x^2 dy dx \\ &= \int_{-3}^3 x^2 [y]_{y=0}^{9-x^2} dx \\ &= \int_{-3}^3 (9x^2 - x^4) dx \\ &= \left[\left(3x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \right]_{-3}^3 \\ &= 3 \cdot 27 - \frac{3^5}{5} - \left(3 \cdot -27 - \frac{(-3)^5}{5} \right) = \frac{324}{5} \end{aligned}$$

Opgave 9

Een schets van het gebied is te zien in figuur 10.



Figuur 10

Er geldt:

$$I_p = \iint_G \rho(x, y) r^2 dx dy = \iint_G (x^2 + y^2)^2 dx dy$$

We gaan G in poolcoördinaten beschrijven. Vrij eenvoudig is in te zien dat $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$.

We zien ook dat voor willekeurige, maar vaste φ tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ de straal r loopt van 0 tot op de cirkel. Om de waarde van r op de cirkel te kunnen bepalen, moeten we de cirkel in poolcoördinaten beschrijven.

De vergelijking van de cirkel $(x-1)^2 + y^2 = 1$ is na het uitwerken van de haakjes te herschrijven tot $x^2 + y^2 - 2x = 0$

In de vergelijking $x^2 + y^2 - 2x = 0$ substitueren we $x = r \cos \varphi$ en $x^2 + y^2 = r^2$.

Dit geeft:

$$r^2 - 2r \cos \varphi = 0 \Rightarrow r(r - 2 \cos \varphi) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = 2 \cos \varphi$$

Dit betekent dat voor een willekeurige, maar vaste φ de straal r loopt van 0 tot $2 \cos \varphi$.

De gebiedsbeschrijving in poolcoördinaten is:

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi.$$

De berekening van de gevraagde integraal verloopt nu als volgt:

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2 + y^2)^2 dx dy &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\cos\varphi} r^5 dr d\varphi \\
&= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= \frac{32}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^6 \varphi d\varphi
\end{aligned}$$

Deze laatste integraal is handmatig veel werk, maar het is wel mogelijk. We moeten dan als volgt handelen:

$$\begin{aligned}
\cos^6 \varphi &= (\cos^2 \varphi)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \right)^3 \\
&= \frac{1}{8} (1 + 3 \cos 2\varphi + 3 \cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi) \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + 3 \cos 2\varphi + 3 \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \right) + \cos^2 2\varphi \cos 2\varphi \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + 3 \cos 2\varphi + \frac{3}{2} \cos 4\varphi + (1 - \sin^2 2\varphi) \cos 2\varphi \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + 4 \cos 2\varphi + \frac{3}{2} \cos 4\varphi + \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right)
\end{aligned}$$

Nu is elke term te integreren:

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2 + y^2)^2 dx dy &= \frac{32}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^6 \varphi d\varphi \\
&= \frac{4}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{5}{2} + 4 \cos 2\varphi + \frac{3}{2} \cos 4\varphi + \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right) d\varphi \\
&= \frac{10}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi + \frac{16}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi d\varphi + 2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos 4\varphi d\varphi + \frac{4}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi \\
&= \frac{10}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi + \frac{8}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi d(2\varphi) + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos 4\varphi d(4\varphi) + \frac{2}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 2\varphi d(\sin 2\varphi) \\
&= \left[\frac{10}{3} \varphi + \frac{8}{3} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi + \frac{2}{9} \sin^3 2\varphi \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{10}{3} \pi
\end{aligned}$$

Opgave 10

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{en} \quad -\sqrt{r^2+1} \leq z \leq \sqrt{r^2+1}$$

Opgave 11

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \quad \text{en} \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$